INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO DE JANEIRO

Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu
Mestrado Profissional em Ensino de Ciências
Campus Nilópolis

Erison de Oliveira Monçores

UMA PROPOSTA PARA FACILITAR A PRÁTICA DOCENTE NO ENSINO DA TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL NO ENSINO MÉDIO

NILÓPOLIS- RJ
2014

Erison de Oliveira Monçores

UMA PROPOSTA PARA FACILITAR A PRÁTICA DOCENTE NO ENSINO DA TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação Stricto Sensu em Ensino de Ciências do Campus Nilópolis do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências.

Orientador: Prof. Dr. João Alberto Mesquita Pereira

NILÓPOLIS - RJ
2014

Erison de Oliveira Monçores

UMA PROPOSTA PARA FACILITAR A PRÁTICA DOCENTE NO ENSINO DA TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação Stricto Sensu em Ensino de Ciências do Campus Nilópolis do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências.

Data de aprovação: ______ de ________________ de 2013.

____

Prof. Dr. João Alberto Mesquita Pereira (orientador)
Universidade Federal do Estado do
Rio de Janeiro

____

Prof. Dr. Alexandre Lopes de Oliveira
Instituto Federal do Rio de Janeiro, Campus Nilópolis

____

Prof. Dr. Leonardo Mondaini
Universidade Federal do Estado do
Rio de Janeiro

Nilópolis – RJ
2014

A Ligia Figueiredo Silveira Lopes Monçores, que em todos os momentos me deu força para continuar.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. João Alberto Mesquita Pereira, orientador desta dissertação, agradeço pelo incentivo, dedicação e, principalmente, pela paciência durante a elaboração deste trabalho. Agradeço pelas valiosas contribuições dadas não somente ao trabalho em si, mas à vida.

Ao colega e professor Marcelo Alberto Vieira de Macedo Junior, agradeço o incentivo e as boas conversas sobre Física.

Aos docentes do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências (PRO-PEC) do IFRJ - Campus Nilópolis que tanto se dedicaram para torná-lo uma referência em qualidade.

Aos colegas de turma, agradeço pelas palavras de apoio e incentivo durante os momentos de angústia e aflição.

“A menos que modifiquemos a nossa maneira
de pensar, não seremos capazes de resolver os
problemas causados pela forma como nos
acostumamos a ver o mundo”. (Albert Einstein)

MONÇORES, E. O. UMA PROPOSTA PARA FACILITAR A PRÁTICA DOCENTE NO ENSINO DA TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL NO ENSINO MÉDIO. Dissertação de conclusão do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências. Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Ensino de Ciências, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Campus Nilópolis, Nilópolis, RJ, 2014.

RESUMO

O presente trabalho busca reapresentar o tema Teoria da Relatividade Especial (TR) para professores de ensino médio, visando aprimorar o conhecimento do docente acerca do tema, consequentemente facilitando a prática docente em sala de aula. A TR é considerada por muitos como um tema de difícil compreensão, porém, trata-se de uma teoria fundamental da Física e que pode ser discutida em nível médio, para tanto há a necessidade de um professor bem preparado para abordar o assunto com clareza e uma visão histórica. A construção matemática aqui presente fornece uma base sólida para a discussão e entendimento dos conceitos envolvidos, partindo das Leis de Newton, a Mecânica Clássica é demonstrada juntamente com o princípio da relatividade de Galileu, chegando ao Eletromagnetismo, evidenciando as incompatibilidades entre as duas teorias. Posteriormente são apresentadas as transformações de Lorentz e suas consequências. Em paralelo a todo este desenvolvimento ocorre a construção da TR e seus postulados. Ao final do trabalho é apresentado um quadro dos livros didáticos disponibilizados para o ensino médio da Secretaria Estadual de Educação do Estado do Rio de Janeiro, revelando que o tema é negligenciado.

Palavras-chave: Ensino de Física, Formação de Professores, Teoria da Relatividade Especial

MONÇORES, E. O. UMA PROPOSTA PARA FACILITAR A PRÁTICA DOCENTE NO ENSINO DA TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL NO ENSINO MÉDIO. Dissertação de conclusão do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências. Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Ensino de Ciências, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Campus Nilópolis, Nilópolis, RJ, 2014.

ABSTRACT

This study aims to restate the theme Theory of Relativity (TR) for high school teachers, aiming to improve knowledge of the teaching on the subject, thus facilitating the teaching practice in the classroom. The TR is considered by many as a difficult topic to understand, however, it is a fundamental theory of physics and it can be discussed in high school, therefore there is the need for a well-prepared teacher to broach the subject with clarity and a historical view. The mathematical construction presented here provides a solid basis for discussion and understanding of the concepts involved, leaving the Newton's Laws, classical mechanics is demonstrated along with the principle of Galilean relativity, coming to Electromagnetism, showing the incompatibilities between the two theories. Later Lorentz transformations and their consequences. In parallel with all this development, the construction of TR and its postulates occurs. At the end of this paper, is presented framework of the available textbooks for high school of the State Department of Education of the State of Rio de Janeiro, revealing that the theme is neglected.

Keywords: Physics Education, Teacher Training, Special Theory of Relativity

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

1.1 – APRESENTAÇÃO

A sequência adotada neste trabalho visa o desencadeamento da Teoria da Relatividade Especial como consequência evolutiva das teorias anteriores. Não há aqui o objetivo de reduzir a teoria a mera exposição de fórmulas prontas a serem aplicadas em um determinado caso, já que a beleza da Física está em sua compreensão. Através de oito capítulos, o leitor poderá observar como a Teoria da Relatividade Especial supre a necessidade de uma nova linguagem que pudesse intermediar a já consolidada Mecânica Clássica e o Eletromagnetismo, preservando ambas as teorias e expondo que o eletromagnetismo não infringe as Leis de Newton.

O primeiro capítulo do trabalho apresenta a motivação desta pesquisa, uma realidade na qual a maioria dos professores de nível médio da Secretaria Estadual de Educação do Rio de Janeiro (SEEDUC RJ), estão imersos. O segundo capítulo aborda as bases da mecânica clássica, formando uma base para os capítulos seguintes serem discutidos. O terceiro capítulo demonstra o eletromagnetismo, sua solidez e as incoerências ao se aplicar o princípio da relatividade a esta teoria. No quarto capítulo são apresentadas as transformações de Lorentz e evidenciadas carências conceituais. O capítulo cinco apresenta as consequências das transformações de Lorentz ao ser aplicada ao eletromagnetismo, construindo uma linguagem correta e culminando na Dinâmica Relativística.

Os capítulos seguintes voltam ao problema inicial visando expor a realidade dos livros didáticos e da necessidade de um material para o aperfeiçoamento docente.

1.2 – MOTIVAÇÃO

No ano de 2012, o Governo do Estado do Rio de Janeiro, através da SEEDUC RJ implantou um currículo mínimo (CM), a ser adotado pelas disciplinas ministradas no ensino médio, entre elas a Física. Esta ação pressupõe que os professores estão aptos a discursar sobre os temas propostos pelo CM e que estes temas são adequados a todas as turmas, independente da realidade a qual cada uma está imersa.

O termo currículo admite uma pluralidade de definições e cada definição pressupõe diferentes concepções de educação. Para estabelecer um discurso sobre currículo, será adotada aqui a concepção de que este é o conjunto de decisões educativas que norteiam o ensino na escola (CONTRERAS, 1989). O currículo então passa a ser uma ferramenta que tem como objetivo responder as questões: o que ensinar, como e por quê? Desta forma, pensar em currículo apenas como um conjunto de conteúdos a serem ministrados em sala de aula é no mínimo uma visão parcial de um conceito muito mais amplo.

A implantação de um CM, que oriente a escolha de temas específicos, estabelecendo padrões mínimos para a adequada formação discente pode ser visto como um facilitador da prática pedagógica, no entanto, é apenas mais uma ação de *"proletarização*[1]*"* da autonomia docente. A qualidade do ensino não pode ser vinculada a uma grade curricular norteadora, que é idealizada por especialistas além dos muros escolares. O conceito de qualidade do ensino não pode ser concebido como algo neutro, invariável no tempo e aplicável a todo tipo de estudante, escola, sociedade ou país (SAVIANI, 1991).

-O que ensinar? Esta pergunta está relacionada a uma política cultural, a formação desejada às gerações futuras. A ela estão ligadas as mudanças, reformas e projetos educacionais.

-Como ensinar? Trata-se não só das ações docentes, metodologias de ensino, mas de todo o contexto educacional, de todas as ações necessárias para tornar o ensino realidade.

A última pergunta torna justificável a primeira e é impossível ser respondida isoladamente. Não é o objetivo deste trabalho se ater ao currículo, mas é pertinente refletir sobre o mesmo, já que este é uma das motivações que deram origem a este trabalho, uma mudança curricular (CM). Aos professores cabe avaliar as mudanças e suas consequências visto que o processo contribui para uma prática reflexiva.

O CM apresenta-se estruturado em forma de competências e habilidades, de acordo com os PCNEM. Não há aqui julgamento da viabilidade e eficiência deste modelo, cabe apenas destacar que os profissionais não estão habituados a esta estrutura e devem efetuar a mudança sem que haja um suporte ou treinamento para tal. Uma real política educacional não pode estar concentrada na elaboração de um CM, dada as considerações acima, sobre o currículo, fica pendente a resposta a segunda pergunta, como ensinar?

[1]Segundo CONTRERAS (2002, p. 296), a proletarização é o processo que representa as diversas subtrações que conduzem a perda da autonomia docente.

Os PCNEM apresentam algumas considerações sobre como ensinar, mas não há um modelo a ser seguido, não há uma fórmula que funcione em todos os casos, cabe então esclarecer que mesmo um CM, deve ser avaliado dentro do contexto escolar e da realidade de cada instituição de ensino.

Partindo do pressuposto que a massificação da educação, má formação e despreparo dos professores (QUEIROZ, et al. 2012, p. 250), cria um solo improdutivo para a formação de um cidadão, é necessário voltar o olhar para o percurso formativo do professor, sua qualificação nessa trajetória e os reflexos dessa qualificação na prática docente, e que a escolha da forma lógica em que se há de expressar a teoria depende do estado do conhecimento do docente (LAKATOS, 1979). Este trabalho busca contribuir para o aprimoramento docente através do desenvolvimento de um tema específico do ensino médio, adotado a partir da implantação do CM, possibilitando uma construção do conhecimento a partir da ideia de teoria de unificação[2] tão presente na Física e tão pouco explorada pelos professores em aulas de ensino médio. Dentre os temas escolhidos para o CM está presente no primeiro ano do ensino médio, terceiro bimestre, as teorias da relatividade (TR) de Albert Einstein. Esta teoria é normalmente apresentada cercada de "mistérios" e paradoxos e sempre carregada de um tom de genialidade inalcançável pelo público.

Compreender a construção do conhecimento é tão importante quanto a teoria em si. Isto possibilita a humanização da ciência e a contextualização do saber, facilitando o aluno a formar uma opinião crítica a respeito do assunto abordado (MION, ANGOTTI, 2005). A exposição do processo de construção, de uma teoria científica revela sua importância e o contexto em que esta é concebida, dando sentido à pesquisa e ao aprendizado. A educação científica se apresenta como parte de uma educação geral para todos os futuros cidadãos (CACHAPUZ et al., 2005), com base nessa premissa, podemos afirmar que uma educação científica de qualidade não pode se ater exclusivamente aos aspectos conceituais, sendo vital integrar aspectos procedimentais, axiológicos e socioculturais. Assim, ao se deparar com esta forma alternativa de ensino e aprendizagem, desmistificando o que é a ciência, o aluno se aproxima do conhecimento cientifico e se apodera deste saber, dando sentido a sua elaboração e aplicação.

Este trabalho pretende desenvolver a construção da TR, fornecendo a professores de Física uma ferramenta facilitadora de sua prática. O trabalho mescla o formalismo

[2]A unificação citada refere-se a compatibilização entre o eletromagnetismo e a mecânica clássica, através da relatividade restrita.

matemático necessário para a elaboração da teoria, com conceitos e comentários que buscam facilitar a compreensão do tema. Há ainda a oportunidade de remover o caráter de curiosidade / leitura complementar, de um conteúdo que passou a se efetivamente obrigatório (RODRIGUES, PIETROCOLA, 1999). Não se trata de apresentar diagramas, esquemas ou maneiras de se tornar fácil algo de difícil compreensão como é a teoria de relatividade. O elemento facilitador, no caso deste trabalho, será uma apresentação dos mínimos detalhes da teoria, desde sua concepção até suas consequências, e trazer à tona o seu significado mais profundo. Acreditamos que esse entendimento possibilitará uma apreciação adequada da teoria, da genialidade de seu autor e, ainda, permite o acesso às bases dessa teoria aumentando a percepção que o público tem sobre a natureza.

Boa parte do desenvolvimento matemático exposto aqui está fora do alcance de alunos do ensino médio. O texto é dirigido aos docentes que desejam se aprimorar buscando novos elementos para prática profissional. Portanto, a última parte do trabalho consiste em um guia conceitual frisando os conceitos chave que são necessários para o entendimento da Teoria da Relatividade Especial de modo a ser adaptado ao conteúdo que é mostrado aos alunos.

Por se tratar de uma teoria unificadora, o campo conceitual abrangido pela relatividade é bastante amplo e requer elementos de diversas áreas da Física. Isso traz dificuldades ao planejamento da atividade didática e, em muitos momentos, uma abordagem fenomenológica é mais adequada.

2. O PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE NA MECÂNICA CLÁSSICA

> *Mesmo que se compreenda que o significado de um conceito jamais será definido com precisão absoluta, alguns conceitos são parte integrante dos métodos da ciência, pelo fato de representarem, pelo menos por algum tempo, o resultado final do desenvolvimento do pensamento humano desde um passado assaz remoto; eles podem mesmo ter sido herdados e são, qualquer que seja o caso, instrumentos indispensáveis na execução do trabalho cientifico em nosso tempo.*
>
> (Werner Heisenberg)

O ensino de Física delega a grandes personalidades da ciência um caráter de magos, que criam suas teorias a partir de um momento de iluminação, no entanto a criação de uma teoria se dá através de árdua pesquisa e evolução de ideias. Partindo deste pressuposto, é possível delinear o cenário científico em que Albert Einstein estava imerso em sua época. As teorias da mecânica clássica e do eletromagnetismo apresentavam um embate no qual uma teoria contradizia a validade da outra.

Einstein, munido de um arsenal de conhecimentos, gerados por outros cientistas de sua época e de uma grande curiosidade sobre o eletromagnetismo, encarou o desafio de compatibilizar as duas teorias. Sua genialidade não está somente no desenvolvimento da teoria, mas principalmente na ideia de uma teoria Física unificada. Com poucos pressupostos Einstein constrói a Teoria da Relatividade Especial e cria uma nova forma de se ver o mundo, não mais dividido em “o mundo mecânico”, governado pelas leis de Newton, e “o mundo eletromagnético” descrito pelas equações de Maxwell, mas um mundo em que as leis da Física são válidas em quaisquer referenciais. Enfim, a Teoria da Relatividade Especial, "salvou" todo o conhecimento produzido acerca da Física revelando ao mundo que as incompatibilidades na época existente eram fruto de uma linguagem conceitual e matemática que não descreviam a realidade Física por completo.

Simultaneamente aos estudos de Einstein, Hendrik Antoon Lorentz[3] desenvolve um conjunto de equações capaz de transpor as informações de um sistema de referencial imóvel para outro em movimento uniforme, mantendo a integridade das equações de Maxwell. Lorentz acreditava se tratar apenas de uma transformação de coordenadas, mas seu trabalho já revelava uma intima ligação entre as coordenadas espaciais e o tempo. A transformação de Lorentz foi uma contribuição matemática fundamental na construção da Teoria da Relatividade Especial.

[3]Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) – Físico holandês. Professor de Física e matemática na Universidade de Leyden. Ganhador do prêmio Nobel de Física em 1902.

Em resposta ao trabalho de Lorentz, Henri Poincaré[4] analisou as propriedades de transformação de muitas grandezas físicas, mostrando a validade das transformações e suas propriedades. Poincaré uniu o grupo de transformações de Lorentz a teoria dos invariantes e representou a coordenada temporal como uma quarta dimensão imaginária no espaço, cunhando o termo espaço-tempo. O trabalho de Poincaré, *Sur la dynamique de l'electron* foi publicado de forma resumida pouco antes do trabalho de Einstein, em 1905.

Atualmente, um erro muito comum é associar os efeitos relativísticos apenas a grandes velocidades. Na realidade, a Teoria da Relatividade Especial revela que o mundo é relativístico e seus efeitos podem ser observados no cotidiano. A limitada capacidade humana de observação pode prejudicar a detecção dos efeitos relativísticos, no entanto ao desenvolver a teoria, com uma matemática simples, é possível explicar fenômenos como o magnetismo e a óptica.

Convém nesse momento voltar as ideias que originaram o chamado princípio da relatividade

2.1 – INTRODUÇÃO AO PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE

O físico, matemático e astrônomo italiano Galileu Galilei (1564 – 1642) introduziu o princípio da relatividade no estudo da cinemática. Tal princípio surge da necessidade de uma descrição quantitativa do movimento e é bastante valioso para o desenvolvimento da Física. Para se descrever o movimento de uma partícula com precisão é necessário estabelecer um sistema de referência (ou referencial) a partir do qual a posição, velocidade e aceleração serão computadas. Ocorre que a descrição do movimento pode, em geral, depender da escolha do referencial, ou seja, não há uma correspondência unívoca entre o movimento de uma partícula e a descrição desse movimento. É este o problema que torna necessário o princípio da relatividade. Como exemplo pode-se citar o movimento de duas bolas de bilhar (esferas A e B). Se o referencial adotado for o ponto de partida do movimento, será percebido um movimento uniforme da bola A até que ela encoste na parede. Se, por outro lado, o referencial adotado

[4] Henri Poincaré (1854-1912) – Matemático, físico e filósofo da ciência, Frances. Professor de Física e matemática na Sorbonne durante 31 anos.

for a bola B, o movimento de A não será percebido. A distância entre a bola A e a parede continua diminuindo porém as versões sobre o movimento da bola A serão diferentes. Em outras palavras, já que existem duas (ou mais) leituras de uma mesma realidade, deve ser possível traduzir uma leitura na outra. Essa tradução corresponde ao uso do princípio da relatividade *e resolve a controvérsia da descrição do movimento a partir de diferentes referenciais.*

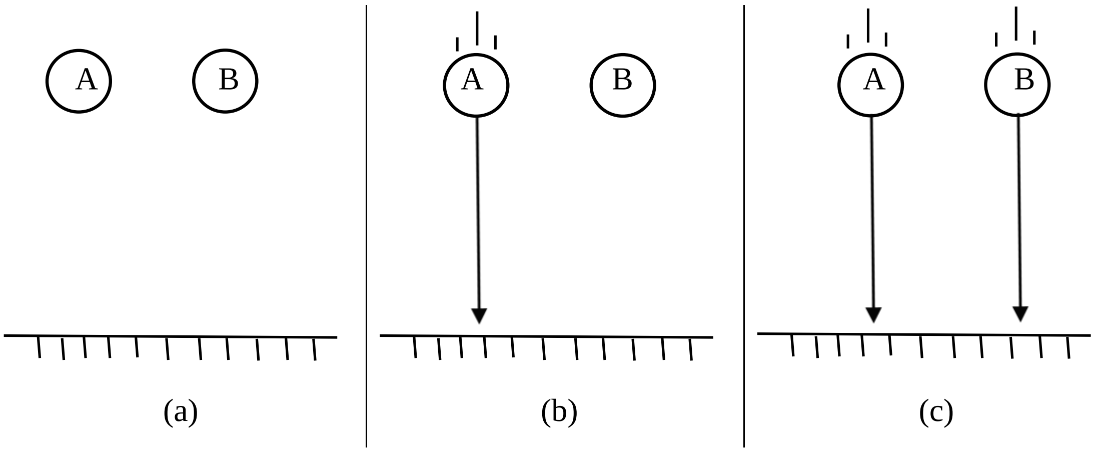


Figura 2.1: Duas esferas (A e B) sobre uma mesa de bilhar, em três situações; (a) ambas em repouso; (b) a esfera A em movimento e a esfera B em repouso; (c) Ambas as esferas em movimento.

2.2 - AS LEIS DE NEWTON

Posteriormente, o físico e matemático inglês Isaac Newton (1642 – 1727), usou as ideias de Galileu para formular as leis que regem os movimentos na mecânica clássica – as Leis de Newton. Em seu Principia, Newton formula três leis para a descrição do movimento. A tradução do latim dessas leis para o Português segue abaixo:

** Lex I: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.*

(Todo corpo continua em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta, a menos que seja forçado a mudar aquele estado por forças imprimidas sobre ele.)

** Lex II: Mutationem motis proportionalem esse vi motrici impressae, etfieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*

(A mudança de movimento é proporcional à força motora imprimida, e é produzida na direção da linha reta na qual aquela força é imprimida.)

<u> Lex III:</u> Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sine corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.*

(A toda ação há sempre oposta uma reação igual, ou, as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas a partes opostas.)

Atualmente a lei I é conhecida como lei da inércia, a lei II como segunda lei de Newton e a lei III é a lei da ação reação. Destaca-se da problemática do princípio da relatividade, o caso onde os referenciais estão em movimento uniforme um em relação ao outro, uma vez que a uniformidade do movimento é algo válido em qualquer referencial. O valor da velocidade pode ser diferente, mas ela será sempre constante ou zero. Assim, esses referenciais são ditos referenciais inerciais, pois neles a primeira lei de Newton é obedecida.

Sendo mais rigoroso, para definir se um corpo (A) está ou não em movimento é necessário adotar um ponto a partir do qual será analisado o movimento, este ponto adotado passa então a ser chamado de referencial (S) do movimento, e todas as afirmações quanto ao movimento serão feitas com base nele (figura 2.1). Assim, o movimento de um corpo sempre é relativo ao referencial adotado. Quando um novo referencial (S') encontra-se em movimento uniforme, na direção x, com velocidade $\vec{u}$, em relação ao primeiro referencial (S), é possível efetuar uma transformação matemática e transpor as informações do movimento do corpo A do referencial S para o referencial S'. A restrição da velocidade constante vem por conta da lei da inércia. A ideia é a de que observadores em movimento relativo uniforme concordarão com esta lei. Assim a denominação referencial inercial deve ser entendida dessa forma. Referenciais em aceleração relativa podem ser tratados mas não vêm ao caso neste ponto do trabalho.

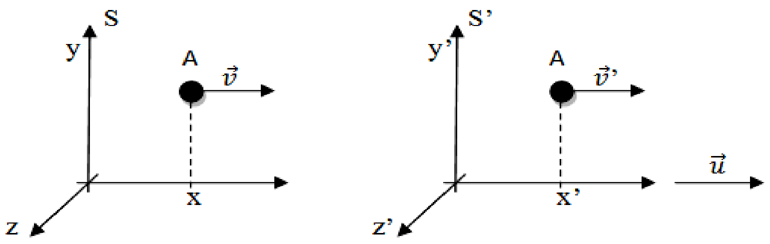


Figura 2.1: Partícula A movendo-se nos referenciais S e S', com eixos paralelos. O referencial S' move-se na direção x com velocidade $\vec{u}$.

A transformação matemática leva em conta as coordenadas do corpo no referencial S e a velocidade $\vec{u}$ do referencial S' permitindo transpor as coordenadas do referencial S para o referencial S'.

$$\begin{cases} x' = x - u_x t \\ y' = y - u_y t \\ z' = z - u_z t \\ t' = t \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Usando a notação vetorial para representar a posição e a velocidade de S' em relação a S, a equação acima fica:

$$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{r}}' = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{t}' = \boldsymbol{t} \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Nesta representação não há nenhuma distinção para o tempo nos referenciais adotados. Pode-se concluir que para a transformação de referenciais de Galileu, o tempo é absoluto e, por consequência, independente do referencial.

Para obter a velocidade da partícula em cada referencial basta efetuar a derivada temporal da posição, assim:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{2.2.3}$$

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} \tag{2.2.4}$$

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t \tag{2.2.5}$$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{d(\vec{u}t)}{dt} \tag{2.2.6}$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u} \tag{2.2.7}$$

Aplicando novamente a derivada temporal a eq. (2.2.7) é possível determinar a aceleração.

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{d\vec{u}}{dt} \tag{2.2.8}$$

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}' \tag{2.2.9}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} \qquad (2.2.10)$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = 0 \qquad (\vec{u} \text{ é constante}) \qquad (2.2.11)$$

$$\vec{\boldsymbol{a}}' = \vec{\boldsymbol{a}} \qquad (2.2.12)$$

Multiplicando a eq. (2.3) pela massa da partícula obtemos a segunda lei de Newton.

$$m\vec{a}' = m\vec{a} \qquad (2.2.13)$$

Ou ainda $\vec{F}' = \vec{F}$.

Isso permite concluir que se as leis de Newton são válidas para um referencial inercial, serão válidas para qualquer outro referencial inercial, pois seu formato matemático é invariante pela transformação de Galileu.

Consequentemente todas as leis que se originem das leis de Newton (mecânica clássica) possuem validade em qualquer referencial inercial.

2.3 - MOMENTO LINEAR E ENERGIA CINÉTICA

Vale a pena ainda lembrar das definições do momento linear e da energia obtidas pela integração da 2ª lei, que serão retomadas mais tarde no contexto relativístico.

Para o caso da massa ser constante, a segunda lei de Newton pode ser escrita em termos do momento linear como:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (2.3.1)$$

Podemos integrar a 2ª lei de Newton no espaço. Para tanto, devemos formar o produto interno de $\vec{F}$ por um deslocamento infinitesimal, $d\vec{r}$, definindo uma grandeza escalar denominada trabalho como se segue:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} \qquad (2.3.2)$$

A qual pode ser escrita como:

$$dW = d\vec{p} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = d\vec{p} \cdot \vec{v} = d\vec{p} \cdot \frac{\vec{p}}{m} = d\left(\frac{p^2}{2m}\right) \qquad (2.3.3)$$

Segue-se que em um deslocamento macroscópico o trabalho da força resultante deverá ser igual à variação da grandeza $K = p^2/2m$, ou seja, quando a (2.3.3) for integrada ao longo do caminho percorrido pela partícula, de uma posição i até uma posição f, teremos:

$$\int dW = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{K_i}^{K_f} d\left(\frac{p^2}{2m}\right) \qquad (2.3.4)$$

Ou, simplesmente:

$$W = K_f - K_i = \Delta K \qquad (2.3.5)$$

Este é o chamado teorema trabalho-energia e traz consigo uma definição para a energia cinética K. O valor de K também ser escrito em termos da velocidade da partícula como:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \qquad (2.3.6)$$

A equação (2.3.3) pode ser escrita em termos da diferencial dK:

$$dK = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = d\vec{p} \cdot \vec{v} \qquad (2.3.7)$$

A variação da energia no tempo define a potência desenvolvida pela força resultante. Matematicamente, tem-se:

$$P = \frac{dK}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} \qquad (2.3.8)$$

Que será utilizada mais tarde.

Podemos também integrar a 2ª lei de Newton no tempo o que traz uma definição para o momento linear como se segue:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (2.3.9)$$

$$\vec{F}dt = m\, d\vec{v} \qquad (2.3.10)$$

$$\int \vec{F} dt = \int m \, d\vec{v} \qquad (2.3.11)$$

O lado direito da equação é facilmente integrado para qualquer situação e tem como resultado o produto $m\,\vec{v}$. O lado esquerdo depende de como a força $\vec{F}$ varia com o tempo, o que deve ser estudado caso a caso. Define-se o impulso como $\vec{J} = \int \vec{F} dt$ e o momento linear como o produto $\vec{p} = m\,\vec{v}$.

Essa grandeza possui um valor inestimável para a Física. Ela possui uma lei de conservação através da qual, muitas previsões podem ser realizadas como, por exemplo, a existência do neutrino, e generalizações conceituais importantes, como o momento linear da radiação eletromagnética, podem ser alcançadas.

Esta lei de conservação está diretamente relacionada com a terceira lei de Newton. A colisão entre duas partículas, de massas m_1 e m_2 e velocidades iniciais v_1 e v_2, pode ser descrita através da segunda lei de Newton aplicada a cada partícula individualmente. Temos duas equações:

$$\begin{cases} F_{12} = m_1 a_1 \\ F_{21} = m_2 a_2 \end{cases} \qquad (2.3.12)$$

Onde F_{12} é a força que a partícula 1 faz na partícula 2 e F_{21} é a força que a partícula 2 faz na partícula 1. Quando somadas resultam em:

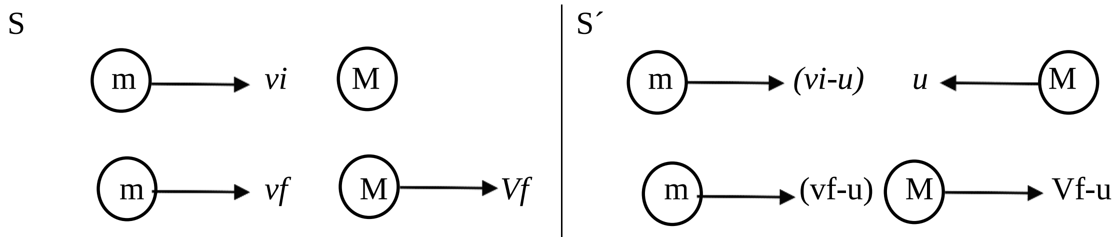
$$F_{12} + F_{21} = m_1 a_1 + m_2 a_2 = m_1 \frac{dv_1}{dt} + m_2 \frac{dv_2}{dt} = \frac{d}{dt}(m_1 v_1 + m_2 v_2) \qquad (2.3.13)$$

Ocorre que as forças que agem durante a colisão formam um par ação-reação. Isso significa que a força que a partícula 1 faz na partícula 2 tem o mesmo módulo que a força que a partícula 2 faz na partícula 1, porém tem o sentido contrário, ou seja, $F_{21} = -F_{12}$ e assim o lado esquerdo da (2.3.13) é anulado o que resulta em:

$$\frac{d}{dt}(m_1 v_1 + m_2 v_2) = \frac{d}{dt}(p_1 + p_2) = 0 \qquad (2.3.14)$$

Onde foi reconhecido o momento linear p = mv de cada uma das partículas. O resultado da equação (2.3.14) é que o valor da soma dos momentos lineares das partículas, ou seja, o momento linear do sistema, permanece constante durante todo o tempo e é isso o que caracteriza uma grandeza conservada.

Cabe ilustrar o funcionamento dessa lei no contexto da relatividade clássica usando uma situação onde ocorre uma colisão entre duas esferas de massas m e M. A figura 2.2 ilustra a situação em S (referencial onde M está parada inicialmente) e S´ (que se move para a direita com velocidade u).



$$mv_i = mv_f + MV_f$$

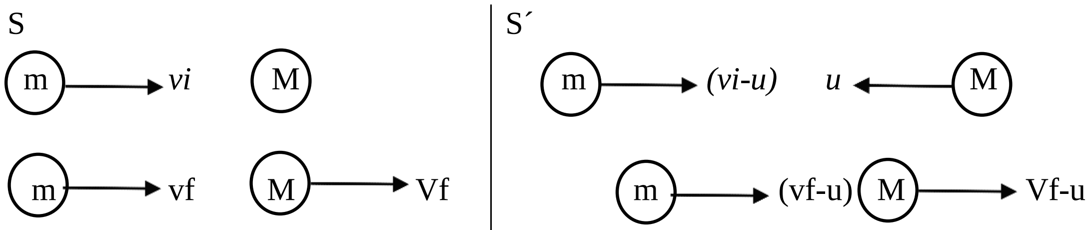
(a)

$$m(v_i\text{-}u) - Mu = m(v_f\text{-}u) + M(V_f\text{-}u)$$

(b)

Figura 2.3: (a) colisão entre a massa m, com velocidade vi, e a massa M; (b) colisão entre a massa m com velocidade (vi-u) e a massa M com velocidade u. Conservação do momento linear.

Apesar do valor dos momentos lineares de cada esfera serem diferentes em S´, a lei de conservação do momento se aplica nos dois referenciais, afinal os termos que possuem a velocidade relativa *u* se cancelam na equação do sistema S´ e o que resta é exatamente a expressão montada para o caso de referencial S. O mesmo vale para a energia cinética.



$$(1/2)mv_i^2 = (1/2)mv_f^2 + (1/2)MV_f^2$$

(a)

$$(1/2)m(v_i\text{-}u)^2+(1/2)Mu^2=(1/2)m(v_f\text{-}u)^2+(1/2)M(V_f\text{-}u)^2$$

(b)

Figura 2.4: (a) colisão entre a massa m, com velocidade vi, e a massa M; (b) colisão entre a massa m com velocidade (vi-u) e a massa M com velocidade u. Conservação da energia.

Desenvolvendo o quadrado chegamos a conservação do momento linear. Pode-se, neste ponto, citar o princípio da relatividade Galileana como:

As leis Físicas são válidas em todos os referenciais inerciais.

Nota-se que ela traz um caráter de universalidade para a Física no sentido ser ela válida independentemente de estarmos ou não nos movendo.

3. O ELETROMAGNETISMO

Em 1865, James Clark Maxwell realizou uma das sínteses mais importantes da Física, revelando que a eletricidade, o magnetismo e a óptica poderiam ser descritas com um conjunto de quatro equações, conhecidas como equações de Maxwell.

$$\vec{\nabla} \mathrm{x} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \textit{(Lei de Faraday)}$$

$$\vec{\nabla} \mathrm{x} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \textit{(Lei de Ampère-Maxwell)}$$

$$\vec{\nabla} . \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \textit{(Lei de Gauss Elétrica) (3.1)}$$

$$\vec{\nabla} . \vec{B} = 0 \qquad \textit{(Lei de Gauss Magnética)}$$

Estas equações descrevem o comportamento de campos elétricos e campos magnéticos, os quais regem a força eletromagnética que atua em partículas carregadas, ou força de Lorentz. Se uma carga Q está se movendo com velocidade $\vec{v}$ numa região onde estão presentes um campo elétrico, $\vec{E}$, e um campo magnético, $\vec{B}$, a força $\vec{F}$ que atuará sobre a carga é dada por:

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \qquad (3.2)$$

Neste ponto vale relembrar que uma carga em movimento uniforme gera um campo elétrico e um campo magnético. Esses campos são dados por:

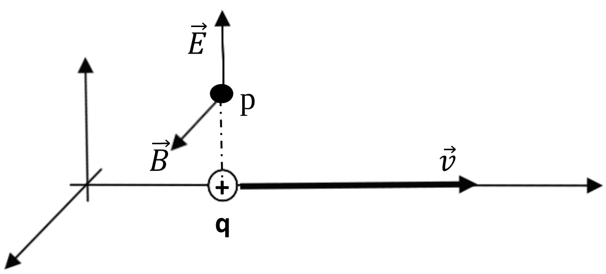


Figura 3.1: As leis de campo elétrico e magnético para uma carga *q* (+), pontual em movimento uniforme.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \;\; ; \;\; \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q}{r^2}\vec{v} \times \hat{r} \tag{3.3}$$

A partir desta síntese, é possível prever a existência de ondas elétricas e magnéticas no vácuo e ainda determinar a velocidade de propagação dessas ondas eletromagnéticas. Adotando o vácuo como meio de propagação, assume-se que as ondas não sofram influência da distribuição de carga e as equações de Maxwell podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla}\mathrm{x}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ &\vec{\nabla}\mathrm{x}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\ &\vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \\ &\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Aplicando o rotacional as eq. de Faraday e Ampère-Maxwell, temos:

$$\begin{cases} \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\mathrm{x}(\vec{\nabla}\mathrm{x}\vec{B}) \; = \; \frac{1}{\mu_0}\left[\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{B}) - \nabla^2\vec{B}\right] \; = \; \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\mathrm{x}\vec{E}) \; = \; -\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \\ \vec{\nabla}\mathrm{x}(\vec{\nabla}\mathrm{x}\vec{E}) \; = \; \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} \; = \; -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\mathrm{x}\vec{B}) \; = \; -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} \nabla^2\vec{B} \; - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

O conjunto de equações (3.6) satisfaz a equação de onda de d'Alambert[5]. Para uma onda que se propaga em uma dimensão esta se torna a equação de ondas que se estuda no curso de Física Básica:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{3.7}$$

Que resultam nas funções de propagação de onda para o campo elétrico e magnético, na direção *x*:

[5] Jean Le-Round d'Alambert, matemático Frances (1750).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

A comparação entre as (3.8) e (3.7) fornece para a velocidade de propagação das ondas o valor:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \times 10^8 m/s \tag{3.9}$$

A teoria desenvolvida por Maxwell previu a velocidade da onda eletromagnética compatível com a velocidade obtida experimentalmente para a propagação da luz (c), aproximadamente $3\text{x}10^8 m/s$. A conclusão era inevitável: a luz é uma onda eletromagnética. Os valores que definem a velocidade da luz têm origem nas constantes ε_0 e μ_0 as quais definem os campos elétrico e magnético na força de Lorentz. O que foi visto sobre referenciais inerciais na seção anterior deve se aplicar aqui. Assim os valores de ε_0 e μ_0 não podem depender do referencial, pois, do contrário, as forças seriam alteradas quando se passa de um referencial inercial a outro contradizendo o princípio da relatividade. Tem-se aqui a origem do segundo postulado da relatividade especial que afirma ser a velocidade da luz uma constante universal. Uma vez que a força tem que ter o mesmo valor nos diferentes referenciais inerciais (equação 2.3), as constantes ε_0 e μ_0 não podem depender da escolha do referencial.

Partindo da teoria eletromagnética para a óptica, é possível estabelecer uma relação para o índice de refração (n) no meio, definido pela razão entre a velocidade de propagação da luz no vácuo (c) e a velocidade de propagação da luz no meio (v).

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \tag{3.10}$$

Todas as leis da ótica, como a lei de Snell, a lei de Brewster, etc., podem ser derivadas das 4 equações (3.1). Aqui vale chamar atenção para um aspecto importante que é o da unificação das leis da Física. Percebe-se que as quatro equações de Maxwell detém um domínio fenomenológico extremamente amplo. Elas traduzem a eletricidade, o magnetismo e a ótica de forma bela e concisa. Na verdade, após considerar a questão da relatividade, que também atua para campos E e B, essas equações podem ser reduzidas a uma só:

$$\Box^2 A^\mu = -\mu_0 J^\mu \tag{3.11}$$

Onde A é o chamado quadrivetor potencial, J é a quadricorrente e $\Box^2 = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, é o D'alambertiano, que traz a forma matemática da unificação entre os três ramos da Física (ver apêndice B).

Aplicar a relatividade de Galileu às ondas eletromagnéticas gera uma incoerência, como visto a seguir. A velocidade das ondas eletromagnéticas, c, calculadas por meio das equações de Maxwell, depende apenas dos valores de ε_0 e μ_0. Por sua vez, como visto acima, esses valores não podem depender do referencial adotado para que o princípio da relatividade seja algo válido. Assim, *c* tem que ser um valor universal. Por outro lado, as transformações de Galileu violam a universalidade da velocidade da luz pois ela assumiria novos valores para diferentes referenciais. Isto revelava um problema, as equações de Maxwell e a relatividade de Galileu não podem ser verdades simultâneas sem que o princípio da relatividade seja violado. O trabalho era então o de conceber outro conjunto de transformações que preservem a velocidade da luz quando se muda de referencial. Note que este é um passo ousado, pois e mecânica Newtoniana deve ser reformulada e basicamente define o eletromagnetismo como uma teoria mais consistente do que a mecânica de Newton.

4. TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

> *[...] a Teoria da relatividade restrita estava pronta para ser formulada em 1905. Lorentz já havia observado que as transformações que agora levam seu nome são essenciais para a análise das equações de Maxwell, e Poincaré já tinha penetrado mais profundamente nessas conexões.*
>
> (Albert Einstein)

4.1 - TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ EM UMA DIMENSÃO

Em uma tentativa de compatibilizar o eletromagnetismo de Maxwell com a mecânica, Lorentz formula um conjunto de equações que permitem manter a estrutura ondulatória que descreve a dinâmica eletromagnética ao se efetuar uma mudança de referencial. Esta invariância não se mantinha ao se aplicar a formulação da relatividade de Galileu, o que sugeria mudança nos valores das constantes elétricas e magnéticas, que claramente é incoerente. As equações de Lorentz receberam seu nome e foram chamadas de transformações.

Para se obter as equações da transformação de Lorentz basta analisar como as equações de Maxwell se comportam com relação a uma transformação geral de coordenadas. Mas para simplificar a matemática, utiliza-se no lugar das equações de Maxwell uma de suas soluções, isto é, a equação da onda no vácuo propagando-se na direção x com velocidade c:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{4.1.1}$$

O objetivo é definir uma transformação linear[6] de coordenadas x, t para um novo referencial, x', t' que se move com velocidade *u* em relação ao primeiro:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}t \\ t' = a_{21}x + a_{22}t \end{cases} \tag{4.1.2}$$

[6] Linear, pois o espaço e o tempo não deixam de ter propriedades similares por conta de um observador estar em movimento. De outra forma, a densidade de pontos no espaço-tempo deve ser igual para os dois observadores. Melhor ainda, deve haver uma correspondência unívoca entre os pontos do espaço nos dois referenciais.

Ou ainda, no formato matricial:

$$\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \tag{4.1.3}$$

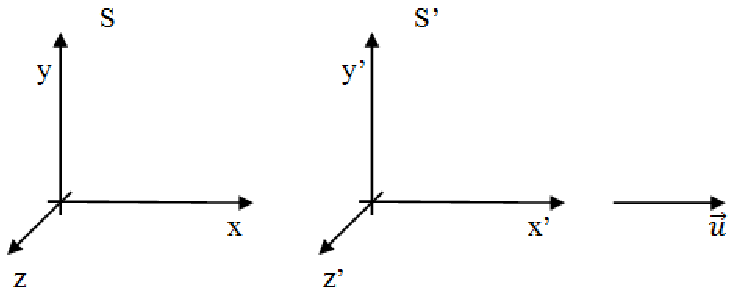


Figura 4.1: referenciais S e S', com eixos paralelos. Referencial S' movendo-se com velocidade $\vec{\boldsymbol{u}}$.

O problema é encontrar os valores de a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22} de forma a que a equação de onda acima continue sendo uma equação de onda no novo referencial, ou seja:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t'^2} = 0 \tag{4.1.4}$$

Para este propósito, é necessário relacionar as derivadas $\partial^2 \vec{E}/\partial x'^2$, $\partial^2 \vec{E}/\partial x^2$, $\partial^2 \vec{E}/\partial t'^2$ e $\partial^2 \vec{E}/\partial t^2$. Tem-se, seguindo a regra da cadeia para a função de duas variáveis $E(x'(x,t), t'(x,t))$:

$$\begin{gathered} \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} \end{gathered} \tag{4.1.5}$$

Que, em virtude de (4.1.2), se tornam:

$$\begin{gathered} \frac{\partial E}{\partial x} = a_{11} \frac{\partial E}{\partial x'} + a_{21} \frac{\partial E}{\partial t'} \\ \\ \frac{\partial E}{\partial t} = a_{12} \frac{\partial E}{\partial x'} + a_{22} \frac{\partial E}{\partial t'} \end{gathered} \tag{4.1.6}$$

Seguindo adiante para as derivadas segundas:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x^{\prime}}\left[\frac{\partial E}{\partial x}\right]\frac{\partial x^{\prime}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t^{\prime}}\left[\frac{\partial E}{\partial x}\right]\frac{\partial t^{\prime}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x^{\prime}}\left[\frac{\partial E}{\partial t}\right]\frac{\partial x^{\prime}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t^{\prime}}\left[\frac{\partial E}{\partial t}\right]\frac{\partial t^{\prime}}{\partial x} \tag{4.1.7}$$

Que, em termos de (4.1.6) e (4.1.2) se escrevem:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = a_{11}\frac{\partial}{\partial x^{\prime}}\left[a_{11}\frac{\partial E}{\partial x^{\prime}} + a_{21}\frac{\partial E}{\partial t^{\prime}}\right] + a_{21}\frac{\partial}{\partial t^{\prime}}\left[a_{11}\frac{\partial E}{\partial x^{\prime}} + a_{21}\frac{\partial E}{\partial t^{\prime}}\right]$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = a_{12}\frac{\partial}{\partial x^{\prime}}\left[a_{12}\frac{\partial E}{\partial x^{\prime}} + a_{22}\frac{\partial E}{\partial t^{\prime}}\right] + a_{22}\frac{\partial}{\partial t^{\prime}}\left[a_{12}\frac{\partial E}{\partial x^{\prime}} + a_{22}\frac{\partial E}{\partial t^{\prime}}\right] \tag{4.1.8}$$

E, finalmente, temos:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = a_{11}^2\frac{\partial^2 E}{\partial x^{\prime 2}} + a_{21}^2\frac{\partial^2 E}{\partial t^{\prime 2}} + 2a_{11}a_{21}\frac{\partial^2 E}{\partial x^{\prime}\partial t^{\prime}}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = a_{12}^2\frac{\partial^2 E}{\partial x^{\prime 2}} + a_{22}^2\frac{\partial^2 E}{\partial t^{\prime 2}} + 2a_{12}a_{22}\frac{\partial^2 E}{\partial x^{\prime}\partial t^{\prime}} \tag{4.1.9}$$

Assim a equação de onda (4.1.1), no referencial S, fica transformada em S´ como:

$$a_{11}^2\frac{\partial^2 E}{\partial x^{\prime 2}} + a_{21}^2\frac{\partial^2 E}{\partial t^{\prime 2}} + 2a_{11}a_{21}\frac{\partial^2 E}{\partial x^{\prime}\partial t^{\prime}} - \frac{a_{12}^2}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial x^{\prime 2}} - \frac{a_{22}^2}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^{\prime 2}} - \frac{2a_{12}a_{22}}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial x^{\prime}\partial t^{\prime}} = 0 \tag{4.1.10}$$

ou ainda, agrupando os termos:

$$\left[a_{11}^2 - \frac{a_{12}^2}{c^2}\right]\frac{\partial^2 E}{\partial x^{\prime 2}} + \left[a_{21}^2 - \frac{a_{22}^2}{c^2}\right]\frac{\partial^2 E}{\partial t^{\prime 2}} + \left[2a_{11}a_{21} - \frac{2a_{12}a_{22}}{c^2}\right]\frac{\partial^2 E}{\partial x^{\prime}\partial t^{\prime}} = 0 \tag{4.1.11}$$

Para que esta equação tenha a mesma forma que a (4.1.4) devemos exigir que:

$$\begin{cases} a_{11}^2 - \frac{a_{12}^2}{c^2} = 1 \\ a_{21}^2 - \frac{a_{22}^2}{c^2} = -\frac{1}{c^2} \\ 2a_{11}a_{21} - \frac{2a_{12}a_{22}}{c^2} = 0 \end{cases} \tag{4.1.12}$$

Devemos ressaltar neste ponto que a transformação de Galileu, com $a_{11} = 1$, $a_{12} = -u$, $a_{21} = 0$ e $a_{22} = 1$ não satisfazem o sistema (4.1.12), portanto ela não satisfaz o princípio da relatividade de Einstein.

A resolução de (4.1.12) conduz às duas relações:

$$a_{11} = a_{22}$$
$$a_{12} = c^2\, a_{21} \tag{4.1.13}$$

Podemos agora introduzir a velocidade relativa u entre os dois referencias notando que para um observador em S, a origem do sistema S´ ($x' = 0$) está em movimento uniforme e sua equação horária é

$$x - ut = 0 \tag{4.1.14}$$

Assim:

$$x' = a_{11}x + a_{12}t$$
$$0 = a_{11}x + a_{12}t \tag{4. 1.16}$$
$$x + \frac{a_{12}}{a_{11}}t = 0$$

Quando comparada à (4.1.14) mostra que

$$a_{12} = -u\, a_{11} \tag{4. 1.17}$$

Com isso, resta apenas um dos quatro coeficientes para ser determinado.

O segundo postulado de Teoria da Relatividade Especial entra mais uma vez em ação nesse momento. Ao exigir que a velocidade da luz seja constante em todos os referenciais inerciais, dá-se uma pista sobre como deve se comportar o espaço percorrido por ela. No referencial S a distância percorrida pela luz num intervalo de tempo t valerá ct. Essa distância pode ser escrita como $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ no espaço tridimensional.

Como estamos tratando de uma dimensão podemos igualar os valores de $r^2 = x^2$ com c^2t^2, ou seja, em S deve valer:

$$x^2 - c^2t^2 = 0 \tag{4. 1.18}$$

Já no referencial S´, o espaço $r'^2 = x'^2$ percorrido pela luz será ct'. Similarmente:

$$x'^2 - c^2t'^2 = 0 \tag{4. 1.19}$$

Ou melhor:

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2 \tag{4. 1.20}$$

A imposição desta última condição revela a última incógnita:

$$a_{11} = \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{4. 1.21}$$

Substituindo na transformação linear inicial, encontra-se a transformada de Lorentz entre dois referenciais em movimento relativo com velocidade u:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{u^2}{c^2})}}(x-ut) = \gamma_u(x-ut) \\ t' = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{u^2}{c^2})}}(t-\frac{u}{c^2}x) = \gamma_u(t-\frac{u}{c^2}x) \end{cases} \tag{4. 1.22}$$

Onde γ é chamado de fator de Lorentz e assume o valor:

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{u^2}{c^2})}} \qquad \textit{(fator de Lorentz)} \tag{4.1.23}$$

4.2 - CONSIDERAÇÕES PARA TRÊS DIMENSÕES

Em três dimensões as transformações de Lorentz ficam:

$$\begin{cases} x' = \gamma_u(x-ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma_u(t-\frac{u}{c^2}x) \end{cases} \qquad (4.2.1\ a,\ b\ ,c\ e\ d)$$

já que o efeito da velocidade relativa, que está na direção x, não se manifesta nas coordenadas y e z. Os respectivos diferenciais são:

$$\begin{cases} dx' = \gamma_u(dx - udt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \gamma_u(dt - \frac{u}{c^2}dx) \end{cases} \qquad (4.2.2\ a,\ b\ ,c\ e\ d)$$

a partir dos quais podem ser definidas as transformações entre velocidades e entre acelerações. A componente x da velocidade em S´ pode ser calculada como a divisão entre (4.2.2 a) e (4.2.2 d):

$$v_x{}' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma_u dt(dx/dt - u)}{\gamma_u dt(1 - \frac{udx}{c^2 dt})} \qquad (4.2.3)$$

ou ainda notando que dx/dt corresponde à componente x da velocidade no referencial S:

$$v_x{}' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \qquad (4.2.4)$$

A componente y fica

$$v_y{}' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma_u dt(1 - \frac{udx}{c^2 dt})} \qquad (4.2.5)$$

ou ainda notando que dy/dt corresponde à componente y da velocidade no referencial S:

$$v_y{}' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{v_y}{\gamma_u(1 - \frac{uv_x}{c^2})} \qquad (4.2.6)$$

A componente z segue a mesma dedução

$$v_z{}' = \frac{dz'}{dt'} = \frac{v_z}{\gamma_u(1 - \frac{uv_x}{c^2})} \qquad (4.2.7)$$

o que resulta para a velocidade tridimensional:

$$\begin{cases} v_x{}' = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \\ v_y{}' = \frac{v_y}{\gamma_u\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)} \\ v_z{}' = \frac{v_z}{\gamma_u\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)} \end{cases} \qquad (4.2.8\ a,\ b\ \text{e}\ c)$$

Uma consequência importante da (4.2.8) é que a composição de velocidades deixa de ter o caráter de um vetor tridimensional. Uma partícula que se mova com velocidade v_x = c/2 no referencial S, por exemplo, será percebida em S´, com velocidade relativa à S u = c/4, com velocidade $v_{x'}$ = 2c/7 e não com vx´ = c/4 como esperado pela soma vetorial.

É importante mencionar que o caráter vetorial da adição de velocidade volta a valer quando se considera a adição da dimensão temporal ao problema.

Antes de seguir em frente, convém mostrar uma dedução envolvendo a (4.2.8). Pode-se usá-la para calcular o valor $[1 - (v\,'/c)^2]$, onde $v\,'^2 = v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z$, como se segue. Primeiramente podemos elevar ao quadrado cada uma das (4.2.8):

$$\begin{cases} {v_x}'^2 = \dfrac{{\gamma_u}^2 (v_x - u)^2}{{\gamma_u}^2\left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right)^2} \\ {v_y}'^2 = \dfrac{{v_y}^2}{{\gamma_u}^2\left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right)^2} \\ {v_z}' = \dfrac{{v_z}^2}{{\gamma_u}^2\left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right)^2} \end{cases} \qquad (4.2.9\ a, b \text{ e } c)$$

onde o fator γ_u^2 foi inserido na (4.2.9 a) para que ela tenha o mesmo denominador que as outras duas. A soma das (4.2.9 a, b e c) fornece $v\,'^2$:

$$v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z = \frac{{\gamma_u}^2 (v_x - u)^2 - {v_x}^2 + {v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}{{\gamma_u}^2\left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right)^2} \qquad (4.2.10)$$

ou ainda

$$v\,'^2 = \frac{{\gamma_u}^2 {v_x}^2 + {\gamma_u}^2 u^2 - 2{\gamma_u}^2 v_x u - {v_x}^2 + v^{\,2}}{{\gamma_u}^2\left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right)^2} \qquad (4.2.11)$$

onde $v^{\,2} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. A equação (4.2.11) pode ainda ser desenvolvida como

$$v\,'^2 = \frac{({\gamma_u}^2 - 1){v_x}^2 + {\gamma_u}^2 u^2 - 2{\gamma_u}^2 v_x u + v^{\,2}}{{\gamma_u}^2\left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right)^2} \qquad (4.2.12)$$

Pode-se agora computar o valor desejado

$$1 - (v\,'/c)^2 = 1 - \frac{({\gamma_u}^2 - 1){v_x}^2 + {\gamma_u}^2 u^2 - 2{\gamma_u}^2 v_x u + v^{\,2}}{{\gamma_u}^2\left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right)^2 c^2} \qquad (4.2.13)$$

que fica

$${\gamma_u}^2\left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right)^2 c^2[1 - (v\,'/c)^2] = {\gamma_u}^2\left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right)^2 c^2 - ({\gamma_u}^2 - 1){v_x}^2 - {\gamma_u}^2 u^2 + 2{\gamma_u}^2 v_x u - v^{\,2} \qquad (4.2.14)$$

onde, desenvolvendo o quadrado, vem:

$${\gamma_u}^2\left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right)^2 c^2[1 - (v\,'/c)^2] = {\gamma_u}^2 c^2\left[1 + \frac{u^2 {v_x}^2}{c^4} - 2\frac{u v_x}{c^2}\right] - ({\gamma_u}^2 - 1){v_x}^2 - {\gamma_u}^2 u^2 + 2{\gamma_u}^2 v_x u - v^{\,2} \qquad (4.2.15)$$

a partir disso tem-se o cancelamento dos termos $2{\gamma_u}^2 v_x u$ e um termo em ${v_x}^2$ pode ser posto em evidência:

$${\gamma_u}^2\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^2 c^2[1-(v\,'/c)^2] = c^2{\gamma_u}^2[1-\frac{u^2}{c^2}] + [1-{\gamma_u}^2(1-\frac{u^2}{c^2})]{v_x}^2 - v^{\,2} \qquad (4.2.16)$$

Como, por definição, ${\gamma_u}^2\left[1-\frac{u^2}{c^2}\right] = 1$, segue-se que

$${\gamma_u}^2\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^2 c^2[1-(v\,'/c)^2] = c^2 - v^{\,2} \qquad (4.2.17)$$

ou ainda, após tirar a raiz quadrada:

$$\gamma_u\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)\sqrt{1-(v\,'/c)^2} = \sqrt{1-(v\,/c)^2} \qquad (4.2.18)$$

que pode ser invertida em

$$\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right) = \frac{\gamma_v^{'}}{\gamma_u\gamma_v} \qquad (4.2.19)$$

onde foram usadas as abreviações:

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}} \qquad (4.2.20a)$$

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}} \qquad (4.2.20b)$$

$$\gamma_v^{'} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)}} \qquad (4.2.20c)$$

A equação (4.2.19) juntamente com as (4.2.8) nos permite escrever

$$\begin{cases} \gamma_v^{'} {v_x}' = \gamma_v\gamma_u(v_x-u) \\ \gamma_v^{'} {v_y}' = \gamma_v v_y \\ \gamma_v^{'} {v_z}' = \gamma_v v_z \end{cases} \qquad (4.2.21\ a, b \text{ e } c)$$

que serão importante na hora de discutir o problema da massa relativística.

Retomando a notação matricial (4.1.3) podemos escrever a transformação de Lorentz (4.2.21) como

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_u & 0 & 0 & -\gamma_u u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma_u \frac{u}{c^2} & 0 & 0 & \gamma_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \tag{4.2.22}$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_u & 0 & 0 & -\gamma_u \beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma_u \beta & 0 & 0 & \gamma_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{bmatrix} \tag{4.2.23}$$

onde β = u/c e a velocidade da luz, c, foi inserida na componente temporal da transformação seguindo a dica deixada pela teoria do eletromagnetismo. Com isso, as quatro variáveis ficam com dimensão de comprimento e utilizando a unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$ (ver apêndice B) pode-se reescrever a (4.2.24) como:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ict' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_u & 0 & 0 & i\gamma_u \beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\gamma_u \beta & 0 & 0 & \gamma_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{bmatrix} \tag{4.2.24}$$

A equação (4.2.24) pode ainda ser escrita através da notação de Einstein (Apêndice C), como:

$$\chi_\mu' = \sum_{\nu=1}^{4} \Lambda_{\mu\nu} \chi_\nu \tag{4.2.25}$$

onde $\chi_1 = x$, $\chi_2 = y$, $\chi_3 = z$ e $\chi_4 = ict$. Existem muitos aspectos interessantes a respeito da (4.2.24). Em primeiro lugar, ela introduz o conceito de quadrivetores. Na mecânica clássica, a descrição do movimento é feita através de grandezas como posição, velocidade e aceleração que são matematicamente representadas por vetores em três dimensões parametrizados pela variável temporal. Em contrapartida, a relatividade especial coloca a variável temporal em pé de igualdade com as outras três dimensões espaciais, x, y, e z introduzindo-a como uma quarta dimensão trazendo o conceito de quadrivetor a tona.

A equação (4.2.25) corresponde à definição do quadrivetor posição. Mais ainda, a matriz $\Lambda_{\mu\nu}$ que aparece na (4.2.24) representa uma operação rotação (por um ângulo imaginário) mantendo a norma do quadrivetor. Esta rotação corresponde a uma rotação no espaço de Minkowski [7]. Assim a mudança de referencial representada pelas transformações de Lorentz corresponde a uma rotação quadridimensional do sistema de referência.

4.3 - TRANSFORMAÇÃO DA ACELERAÇÃO TRIDIMENSIONAL

O cálculo das componentes da aceleração segue um caminho parecido. Primeiramente vem o cálculo das diferenciais

$$dv_x{}' = \frac{dv_x\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)-(v_x-u)\left(-\frac{u}{c^2}\right)dv_x}{\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^2} \tag{4.3.1}$$

que ao ser desenvolvida resulta em

$$dv_x{}' = \frac{1}{\gamma_u{}^2}\frac{dv_x}{\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^2} \tag{4.3.2}$$

Fazendo a divisão por (4.2.2 d) vem

$$a_x{}' = \frac{dv_x{}'}{dt'} = \frac{1}{\gamma_u{}^2}\frac{1}{\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^2}\frac{1}{\gamma_u(1-\frac{udx}{c^2dt})}\frac{dv_x}{dt} \tag{4.3.3}$$

que resulta em

$$a_x{}' = \frac{1}{\gamma_u{}^3}\frac{a_x}{\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^3} \tag{4.3.4}$$

A diferencial de v_y fica:

$$dv_y{}' = \frac{1}{\gamma_u}\frac{dv_y\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)-v_y\left(-\frac{u}{c^2}\right)dv_x}{\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^2} \tag{4.3.5}$$

---

[7] Hermann Minkowski (1864 - 1909) foi um matemático alemão, que criou e desenvolveu a geometria dos números e que usou métodos geométricos não euclidianos (espaço hiperbólico), para explicar a teoria da relatividade.

e com isso a componente y da aceleração em S´ fica:

$$a_y{}' = \frac{dv_y{}'}{dt'} = \frac{1}{\gamma_u}\frac{dv_y\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)+\frac{uv_y}{c^2}dv_x}{\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^2}\frac{1}{\gamma_u dt(1-\frac{uv_x}{c^2})} \tag{4.3.6}$$

que após desenvolvimento vira:

$$a_y{}' = \frac{1}{\gamma_u{}^2}\frac{a_y}{\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^2} + \frac{a_x uv_y}{\gamma_u{}^2 c^2(1-\frac{uv_x}{c^2})^3} \tag{4.3.7}$$

Basta trocar y por z para encontrar a componente z da aceleração:

$$a_z{}' = \frac{1}{\gamma_u{}^2}\frac{a_z}{\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^2} + \frac{a_x uv_z}{\gamma_u{}^2 c^2(1-\frac{uv_x}{c^2})^3} \tag{4.3.8}$$

Reunindo as componentes da aceleração teremos:

$$\begin{cases} a_x{}' = \frac{1}{\gamma_u{}^3}\frac{a_x}{\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^3} \\ a_y{}' = \frac{1}{\gamma_u{}^2}\frac{a_y}{\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^2} + \frac{a_x uv_y}{\gamma_u{}^2 c^2\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^3} \\ a_z{}' = \frac{1}{\gamma_u{}^2}\frac{a_z}{\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^2} + \frac{a_x uv_z}{\gamma_u{}^2 c^2\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^3} \end{cases} \tag{4.3.9 a, b e c}$$

As equações (4.3.9) definem como relacionar as acelerações sofridas por uma partícula de massa m no referencial S com aquelas observadas no sistema S´. Se for assumida a proporcionalidade entre força e aceleração, temos finalmente que

$$\begin{cases} F_x{}' = \frac{1}{\gamma_u{}^3}\frac{F_x}{\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^3} \\ F_y{}' = \frac{1}{\gamma_u{}^2}\frac{F_y}{\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^2} + \frac{F_x uv_y}{\gamma_u{}^2 c^2\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^3} \\ F_z{}' = \frac{1}{\gamma_u{}^2}\frac{F_z}{\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^2} + \frac{F_x uv_z}{\gamma_u{}^2 c^2\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^3} \end{cases} \tag{4.3.10 a, b e c}$$

correspondendo a transformação da força. Ainda que **matematicamente corretas**, estas transformações não correspondem ao que se chama de mecânica relativística, **pois a conservação do momento linear não foi considerada. Estas equações partem de um pressuposto equivocado e são aqui apresentadas para servir de contraponto com a formulação correta que será apresentada adiante**. **A dedução que leva à (4.3.9 a,b e c) é baseada na primeira lei em conjugação com o princípio da relatividade via transformações de Lorentz. A segunda lei aparece, implicitamente, no momento em que se assume a proporcionalidade entre a força e a aceleração para definir a (4.3.10**

a,b e c) a partir da (4.3.9 a,b e c). Quando se considera a conservação do momento linear, que é um resultado direto da terceira lei, chega-se a conclusão que o conceito de massa tem que ser ampliado, gerando o que se chama de massa relativística. Isto é importante, pois engloba a terceira lei de Newton na construção da nova mecânica. Vale, no entanto, ver algumas consequências das (4.3.10 a,b e c) antes de seguir adiante.

5. CONSEQUENCIAS DAS TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

5.1 - FORÇAS ELETROMAGNÉTICAS I

Tratemos primeiramente de um problema bem simples geralmente colocado no início do curso de eletricidade no ensino secundário. A figura abaixo (figura 5.1), ilustra duas cargas puntiformes em repouso alinhadas com o eixo z. O fato de serem partículas carregadas faz com que haja entre elas uma força elétrica orientada ao longo do eixo z e dada pela lei de Coulomb.

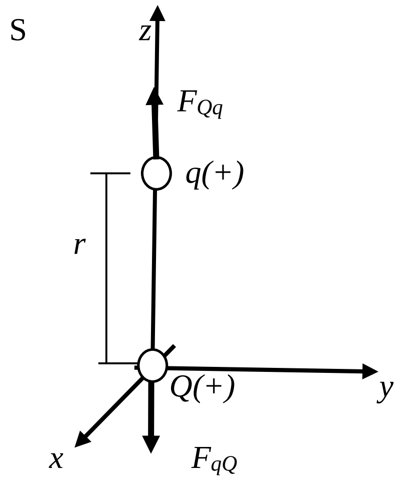


Figura 5.1: duas cargas, q e Q, positivas, alinhadas sobre o eixo *z* a uma distância *r* e suas respectivas forças.

Tem-se assim,

$$\vec{F} = 0\hat{x} + 0\hat{y} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\hat{z} = F_z\hat{z} \tag{5.1.1}$$

onde r é a distância entre as cargas, Q é a carga que está fixa na origem e q é a carga que está fixa na posição z = r. Podemos usar as (4.3.10) para calcular a força que um observador viajando com velocidade u na direção x perceberia. Para tanto basta fazer $F_x = F_y = 0$ e ainda $v_x = v_y = v_z = 0$ já que a força Coulombiana é radial e as partículas se encontram em repouso relativo. Com isso,

$$\begin{cases} F_x{}' = 0 \\ F_y{}' = 0 \\ F_z{}' = \frac{F_z}{\gamma_u{}^2} \end{cases} \tag{5.1.2}$$

ou seja

$$F_z{'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \gamma_u{}^2} \frac{qQ}{r^2}\hat{z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{r^2}(1 - \frac{u^2}{c^2})\hat{z} \tag{5.1.3}$$

Desenvolvendo e lembrando que $c^2 = 1/\mu_0\varepsilon_0$ temos:

$$F_z{'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{r^2}\hat{z} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qQ}{r^2}(-u^2\hat{z}) \tag{5.1.4}$$

Notando que $-u^2\hat{z} = u\hat{x} \times (-u\hat{y})$ e colocando q em evidência vem:

$$F_z{'} = q\left\{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}\hat{z} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q}{r^2}[u\hat{x} \times (-u\hat{y})]\right\} = q\left\{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}\hat{z} + \vec{u} \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q}{r^2}(\vec{u} \times \hat{z})\right]\right\} \tag{5.1.5}$$

Pode-se agora notar que em S´, além da força Coulombiana uma outra força deve estar atuando. O primeiro termo da (5.1.5) corresponde ao campo elétrico $\vec{E}$ produzido por Q (equação 3.6). O segundo termo também é um vetor que podemos chamar de $\vec{B}$. Com isso,

$$F_z{'} = q\{\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}\} \tag{5.1.6}$$

que é a chamada força de Lorentz onde

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}\hat{z} \tag{5.1.7}$$

é o campo elétrico tal como sugerido pela lei de Coulomb aplicada à uma carga puntiforme e

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q}{r^2}(\vec{u} \times \hat{z}) \tag{5.1.8}$$

A expressão (5.1.8) é EXATAMENTE a definição da lei de Biot-Savart para o campo magnético gerado pela carga Q se movendo com velocidade constante u na posição da carga q. Este é um resultado extraordinário que merece atenção. Note que ele foi obtido assumindo que as transformações de Lorentz são a maneira correta de se passar de um referencial ao outro e que a força elétrica, apenas, é uma interação fundamental da natureza. O magnetismo é nesse caso uma PREVISÃO da Teoria da Relatividade Especial. Assim, o fenômeno magnético, amplamente comprovado no cotidiano da humanidade a mais de um milênio, pode ser visto como um efeito relativístico em sua essência. **Essa conclusão permanece válida quando se considera a massa relativística.**

5.2 - CONSERVAÇÃO DO MOMENTO

A lei de conservação do momento linear é algo fundamental na Física. Do ponto de vista das leis de Newton ela se origina na terceira lei - ação e reação. **Sua aplicação mais comum é em questões que envolvem colisões e, como visto no final da seção (4.3), é o elemento que completa a transição da mecânica Newtoniana para a mecânica relativística**. Digno de ser notado é que a versão relativística da Física traz problemas para a questão da ação a distância e da terceira lei. No entanto, se ficarmos restritos à questão das colisões, onde o contato entre dois objetos define um evento, pode-se dizer que vale a lei da ação-reação. Nesse ponto podemos considerar a questão da colisão entre duas esferas de massas m_1 e m_2, com velocidades iniciais v_1 e v_2 se movendo ao longo da direção *x*. Em um determinado instante existe o contato entre as duas esferas e elas trocam momento linear entre si ficando com velocidades V_1 e V_2 respectivamente. O momento linear total, igual a soma dos momentos lineares individuais de cada esfera, antes e depois da colisão deve possuir o mesmo valor. Definindo $p_1 = m_1v_1$, $p_2 = m_2v_2$ para os momentos lineares das duas esferas antes da colisão e $P_1 = m_1V_1$, $P_2 = m_2V_2$ para os momentos lineares das duas esferas depois da colisão teremos:

$$p_1 + p_2 = P_1 + P_2 \qquad (5.2.1a)$$

ou ainda

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1V_1 + m_2V_2 \qquad (5.2.1b)$$

As velocidades v_1, v_2, V_1 e V_2 são medidas no referencial S. Do ponto de vista de S´, que se move com velocidade $\vec{u} = u\hat{x}$ em relação à S, paralelamente ao deslocamento das massas m_1 e m_2, e definindo $p_1' = m_1v_1'$, $p_2' = m_2v_2'$ para os momentos lineares das duas esferas antes da colisão e $P_1' = m_1V_1'$, $P_2 = m_2V_2'$ para os momentos lineares das duas esferas depois da colisão com as velocidades v_1',v_2',V_1' e V_2' medidas em S´, a conservação do momento linear se escreve como:

$$p_1' + p_2' = P_1' + P_2' \tag{5.2.2a}$$

$$m_1v_1' + m_2v_2' = m_1V_1' + m_2V_2' \tag{5.2.2b}$$

Se considerarmos a transformação de Galileu (2.1) para as velocidades tem-se

$$v_1' = v_1 - u$$

$$v_2' = v_2 - u$$

$$V_1' = V_1 - u \qquad \text{(5.2.3 a, b, c e d)}$$

$$V_2' = V_2 - u$$

Colocando na (5.2.2b) vem:

$$m_1 (v_1 - u) + m_2 (v_2 - u) = m_1(V_1 - u) + m_2(V_2 - u) \tag{5.2.4}$$

a qual pode ser reduzida à:

$$m_1 v_1 - m_1 u + m_2 v_2 - m_2 u = m_1V_1 - m_1 u + m_2V_2 - m_2u \tag{5.2.5}$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 - (m_1+m_2) u = m_1 V_1 + m_2 V_2 - (m_1+m_2) u \tag{5.2.6}$$

Os termos envolvendo a velocidade relativa, u, se cancelam e o que resta é exatamente a (5.2.1b), ou seja, a conservação do momento linear é invariante por uma transformação de Galileu, quando consideramos o limite para $v \ll c$. Mas vimos que esta transformação é um caso particular da transformação de Lorentz que é mais geral e engloba a teoria eletromagnética. Assim, a composição (5.2.3) deve ser substituída pelas (4.2.8a):

$$v_1' = \frac{v_1 - u}{1 - \frac{uv_1}{c^2}}$$

$$v_2' = \frac{v_2 - u}{1 - \frac{uv_2}{c^2}} \qquad (5.2.7\ a\ ,b\ ,c\ \text{e}\ d)$$

$$V_1' = \frac{V_1 - u}{1 - \frac{uV_1}{c^2}}$$

$$V_2' = \frac{V_2 - u}{1 - \frac{uV_2}{c^2}}$$

e com isso a (5.2.2b) fica

$$m_1v_1' + m_2v_2' = m_1V_1' + m_2V_2' \tag{5.2.8}$$

$$m_1 \frac{v_1 - u}{1 - \frac{u v_1}{c^2}} + m_2 \frac{v_2 - u}{1 - \frac{u v_2}{c^2}} = m_1 \frac{V_1 - u}{1 - \frac{u V_1}{c^2}} + m_2 \frac{V_1 - u}{1 - \frac{u V_1}{c^2}} \qquad (5.2.9)$$

É vantajoso, no entanto, usar a forma (4.2.19) para as velocidades v_1',v_2',V_1' e V_2'. A (5.2.8) fica então na forma:

$$m_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_1'} \gamma_u (v_1 - u) + m_2 \frac{\gamma_2}{\gamma_2'} \gamma_u (v_2 - u) = m_1 \frac{\Gamma_1}{\Gamma_1'} \gamma_u (V_1 - u) + m_2 \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2'} \gamma_u (V_2 - u)$$

(5.2.10)

onde

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}} \qquad (5.2.11)$$

e

$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{{v_1}^2}{c^2}\right)}}$	$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{{v_2}^2}{c^2}\right)}}$	$\Gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{{V_1}^2}{c^2}\right)}}$	$\Gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{{V_2}^2}{c^2}\right)}}$
$\gamma_1' = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{{v_1}'^2}{c^2}\right)}}$	$\gamma_2' = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{{v_2}'^2}{c^2}\right)}}$	$\Gamma_1' = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{{V_1}'^2}{c^2}\right)}}$	$\Gamma_2' = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{{V_2}'^2}{c^2}\right)}}$

(5.2.12)

Após o cancelamento de γ_u e uma pequena manipulação algébrica vem:

$$m_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_1'} v_1 + m_2 \frac{\gamma_2}{\gamma_2'} v_2 - \left(m_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_1'} + m_2 \frac{\gamma_2}{\gamma_2'}\right) u = m_1 \frac{\Gamma_1}{\Gamma_1'} V_1 + m_2 \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2'} V_2 -$$

$$\left(m_1 \frac{\Gamma_1}{\Gamma_1'} + m_2 \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2'}\right) u \qquad (5.2.13)$$

A (5.2.13) é semelhante à (5.2.6), porém os coeficientes da velocidade relativa, u, serão, em geral, diferentes já que dependem das velocidades de cada esfera antes e depois da colisão. Consequentemente, este termo não será cancelado como na (5.2.6) e a conservação do momento linear não é mantida quando se vai de S para S´. O problema só pode ser resolvido fazendo uma suposição ousada a respeito do conceito de massa. Esta suposição corresponde à generalização da mecânica que é necessária para a sua compatibilização com a teoria eletromagnética. Antes, porém, convém examinar a situação onde o referencial S´ é o centro de massa. Nesse caso, a soma dos momentos lineares em S´ deve ser nula e a velocidade relativa u deve ser igual à velocidade do centro de massa vista por S. Será admitido que as massas das esferas no referencial S´ sejam $m_1^{'}$ e $m_2^{'}$, portanto diferentes daquelas percebidas em S. Com isso a soma dos momentos lineares das duas esferas em S´ fica:

$$m_1^{'} v_1' + m_2^{'} v_2' = 0 \qquad (5.2.15)$$

já que S´ é o centro de massa. Usando (5.2.7 a,b) e ainda a forma (4.2.19) vem:

$$m_1^{'} \frac{\gamma_1}{\gamma_1^{'}}(v_1 - u) + m_2^{'} \frac{\gamma_2}{\gamma_2^{'}}(v_2 - u) = 0$$

$$m_1^{'} \frac{\gamma_1}{\gamma_1^{'}} v_1 + m_2^{'} \frac{\gamma_2}{\gamma_2^{'}} v_2 - \left(m_1^{'} \frac{\gamma_1}{\gamma_1^{'}} + m_2^{'} \frac{\gamma_2}{\gamma_2^{'}}\right) u = 0 \qquad (5.2.16)$$

e com isso pode-se isolar u como

$$u = \frac{m_1^{'} \frac{\gamma_1}{\gamma_1^{'}} v_1 + m_2^{'} \frac{\gamma_2}{\gamma_2^{'}} v_2}{m_1^{'} \frac{\gamma_1}{\gamma_1^{'}} + m_2^{'} \frac{\gamma_2}{\gamma_2^{'}}} \qquad (5.2.17)$$

que se reduz à velocidade do centro de massa em S

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \qquad (5.2.18)$$

caso façamos $m_1 = m_1^{'} \frac{\gamma_1}{\gamma_1^{'}}$ e $m_2 = m_2^{'} \frac{\gamma_2}{\gamma_2^{'}}$. Essas relações podem ser escritas como:

$$\frac{m_1^{'}}{\gamma_1^{'}} = \frac{m_1}{\gamma_1} \qquad \frac{m_2^{'}}{\gamma_2^{'}} = \frac{m_2}{\gamma_2} \qquad (5.2.19\ a \text{ e } b)$$

Isso traz a mudança desejada para o conceito de massa. Nas expressões acima, vê-se que o lado esquerdo diz respeito apenas à S´, enquanto o lado direito só diz respeito à S. Assim, para as igualdades 5.2.19a e b serem sempre verdadeiras, o valor m/γ deve ser invariante por uma transformação de Lorentz, ou seja, deve ter o mesmo valor independentemente do referencial adotado. Em particular, pode-se adotar o chamado referencial próprio, onde a partícula está em repouso e, portanto, γ =1. Tem-se assim o significado da massa de repouso, m_0, que é o valor da massa que uma partícula possui num sistema que tem ela como referência. Este valor é uma propriedade da partícula e independe do referencial. Considerando as (5.2.19) tem-se:

$$\frac{m_1^{'}}{\gamma_1^{'}} = \frac{m_1}{\gamma_1} = m_{01} \qquad \frac{m_2^{'}}{\gamma_2^{'}} = \frac{m_2}{\gamma_2} = m_{02} \qquad (5.2.20\text{a e b})$$

ou, de forma geral,

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \qquad (5.2.21)$$

onde v é a velocidade com que a partícula se move em relação ao referencial S. Em geral a velocidade em S´ , v', será diferente daquela medida em S, de forma que a massa em S´ também será diferente e igual à

$$m' = \gamma' m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v'/c)^2}} \tag{5.2.22}$$

Isso significa que se estendermos o conceito de massa de modo a englobar as transformações de Lorentz na mecânica, teremos que reconhecer a massa como o valor de γm e não de m apenas. Nasce assim o conceito de massa relativística que traz de volta a validade da conservação do momento linear**, e consequentemente da 3ª lei**. É instrutivo seguir essa revalidação para outros referenciais que não o centro de massa.

Tem-se então:

$$p_1 + p_2 = P_1 + P_2 \tag{5.2.23}$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1V_1 + m_2V_2 \tag{5.2.24a}$$

onde agora m_1 e m_2 são as massas relativísticas das esferas 1 e 2 no sistema S, ou seja, segue-se que

$$\gamma_1 m_{01}v_1 + \gamma_2 m_{02}v_2 = \Gamma_1 m_{01}V_1 + \Gamma_2 m_{02}V_2 \tag{5.2.25a}$$

$$\gamma_1 m_{01}v_1 + \gamma_2 m_{02}v_2 - \Gamma_1 m_{01}V_1 - \Gamma_2 m_{02}V_2 = 0 \tag{5.2.25b}$$

onde γ_1, γ_2, Γ_1, e Γ_2 correspondem às (5.2.12) e ainda m_{01}, m_{02} são as massas de repouso das duas esferas. Para que a conservação de momento seja válida em S´ devemos ter:

$$p_1' + p_2' = P_1' + P_2' \tag{5.2.26}$$

$$m_1'v_1' + m_2'v_2' = m_1'V_1' + m_2'V_2' \tag{5.2.27}$$

onde agora m_1' e m_2' são as massas relativísticas das esferas 1 e 2 no sistema S´, ou seja, segue-se que

$$\gamma_1' m_{01}v_1' + \gamma_2' m_{02}v_2' = \Gamma_1' m_{01}V_1' + \Gamma_2' m_{02}V_2' \tag{5.2.28}$$

onde γ_1', γ_2', Γ_1', e Γ_2' correspondem às (5.2.12) com m_{01} e m_{02} sendo as massas de repouso das duas esferas que são invariantes. Pode-se agora usar a (4.2.21a) na (5.2.28) mais uma vez para as velocidades vistas em S´ resultando em:

$$m_{01}\gamma_1\gamma_u(v_1 - u) + m_{02}\gamma_2\gamma_u(v_2 - u) = m_{01}\Gamma_1\gamma_u(V_1 - u) + m_{02}\Gamma_2\gamma_u(V_2 - u) \tag{5.2.29}$$

que após desenvolvimento:

$$\gamma_1 m_{01}(v_1 - u) + \gamma_2 m_{02}(v_2 - u) = \Gamma_1 m_{01}(V_1 - u) + \Gamma_2 m_{02}(V_2 - u) \qquad (5.2.30)$$

$$\gamma_1 m_{01} v_1 + \gamma_2 m_{02} v_2 - \Gamma_1 m_{01} V_1 - \Gamma_2 m_{02} V_2 = u\,[\,\Gamma_1 m_{01} + \Gamma_2 m_{02} - \gamma_1 m_{01} - \gamma_2 m_{02}\,] \qquad (5.2.31)$$

Tendo em vista (5.2.25b) o lado esquerdo da (5.2.31) se anula e como consequência vem:

$$\gamma_1 m_{01} + \gamma_2 m_{02} = \Gamma_1 m_{01} + \Gamma_2 m_{02} \qquad (5.2.32)$$

que representa a lei de conservação da massa relativística. Assim, para que a conservação do momento linear seja válida em quaisquer referenciais deve-se exigir a validade da conservação da massa relativística. O caso onde S´ se movimenta na direção x porém as esferas se movimentam na direção y é trivial tendo em vista a (4.2.21 b,c). A conservação do momento se traduz na (5.2.28) que é transformada na (5.2.25a) de imediato.

Em resumo, a teoria da relatividade especial amplia o conceito do momento linear tridimensional que passa a ser descrito como:

$$\vec{p} = \gamma_v m_0 \vec{v} \qquad (5.2.33)$$

onde $\vec{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$, $\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1-(v_x^2+v_y^2+v_y^2)/c^2}}$ e m_0 é a massa de repouso da partícula.

É interessante examinar como o momento linear se transforma quando se vai de S para S´. Basta acrescentar a massa de repouso nas (4.2.21):

$$\begin{cases} \gamma_v' m_0 v_x' = \gamma_u \gamma_v m_0 (v_x - u) \\ \gamma_v' m_0 v_y' = \gamma_v m_0 v_y \\ \gamma_v' m_0 v_z' = \gamma_v m_0 v_z \end{cases} \qquad (5.2.34\ a, b \text{ e } c)$$

ou ainda

$$\begin{cases} p_x' = \gamma_u\,(p_x - u\gamma_v m_0) \\ p_y' = p_y \\ p_z' = p_z \end{cases} \qquad (5.2.35\ a, b \text{ e } c)$$

a qual guarda uma certa similaridade com as transformações de Lorentz para o quadrivetor posição (4.2.1 *a,b e c*). Esta similaridade pode ser explorada para se introduzir uma quarta componente ao vetor momento linear. As equações (4.2.1a) e (5.2.35a) podem ser escrita como:

$$\begin{cases} x' = \gamma_u\left(x - \frac{u}{c}ct\right) = \gamma_u(x - \beta ct) \\ p_x{}' = \gamma_u\left(p_x - \frac{u}{c}\gamma_v m_0 c\right) = \gamma_u(p_x - \beta\gamma_v m_0 c) \end{cases} \qquad (5.2.36\ a \text{ e } b)$$

Chamando $p_t = \gamma_v m_0 c$ vemos que a (5.2.36 b) fica matematicamente similar à (5.2.36a) com p_x substituindo x e p_t substituindo ct. Podemos formar o quadrivetor momento linear juntando essa nova componente às três já conhecidas: p_x, p_y, p_z. Fica faltando a contrapartida de como escrevar $p_t{}'$ em função de p_x e p_t completando o conjunto de quatro equações como sugerido pelas transformações de Lorentz e verificando sua validade. Primeiramente, devemos escrever qual o valor que p_t assumirá no referencial S´. Uma vez que a massa de repouso, m_0, e a velocidade da luz, c, são invariantes, a mudança de referencial só mudará o valor de γ_v, que será transformado para γ_v'. Assim, tem-se que a quarta componente do momento relativístico em S´ será dada por:

$$p_t' = \gamma_v' m_0 c \qquad (5.2.37)$$

Podemos agora usar a relação (4.2.19) para fazer a mudança de referencial. Ela pode ser escrita como:

$$\left(1 - \frac{u}{c}\frac{v_x}{c}\right) = \left(1 - \beta\,\frac{\gamma_v m_0 v_x}{\gamma_v m_0 c}\right) = \frac{\gamma_v'}{\gamma_u \gamma_v} \qquad (5.2.38)$$

que pode ser manipulada na forma

$$\gamma_v' = \gamma_u \gamma_v \left(1 - \beta\,\frac{p_x}{p_t}\right) \qquad (5.2.39)$$

Multiplicando ambos os lados por $m_0 c$ vem:

$$\gamma_v' m_0 c = \gamma_u \gamma_v m_0 c \left(1 - \beta\,\frac{p_x}{p_t}\right) \qquad (5.2.40)$$

e, identificando os termos, vemos que a (5.2.40) traz a relação desejada:

$$p_t' = \gamma_u p_t \left(1 - \beta\,\frac{p_x}{p_t}\right) = \gamma_u(p_t - \beta\, p_x) \qquad (5.2.41)$$

As equações para a transformação do quadrimomento ficam:

$$\begin{cases} p_x{}' = \gamma_u(p_x - \beta p_t) \\ p_y{}' = p_y \\ p_z{}' = p_z \\ p_t' = \gamma_u(p_t - \beta\, p_x) \end{cases} \qquad (5.2.42)$$

que no formato matricial se tornam

$$\begin{bmatrix} p_x{}' \\ p_y{}' \\ p_z{}' \\ p_t{}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_u & 0 & 0 & -\gamma_u\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma_u\beta & 0 & 0 & \gamma_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ p_t \end{bmatrix} \qquad (5.2.43)$$

Usando a unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$, pode-se reescrever a (5.2.43) como

$$\begin{bmatrix} p_x{}' \\ p_y{}' \\ p_z{}' \\ ip_t{}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_u & 0 & 0 & i\gamma_u\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\gamma_u\beta & 0 & 0 & \gamma_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ ip_t \end{bmatrix} \qquad (5.2.44)$$

que pode ainda ser escrita como:

$$\pi_\mu' = \sum_{\nu=1}^{4} \Lambda_{\mu\nu}\pi_\nu \qquad (5.2.46)$$

onde $\pi_1 = p_x, \pi_2 = p_y, \pi_3 = p_z$ e $\pi_4 = ip_t$. A comparação com a (4.2.25) aqui repetida

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ict' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_u & 0 & 0 & i\gamma_u\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\gamma_u\beta & 0 & 0 & \gamma_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{bmatrix}$$

deixa evidente que as transformações de Lorentz, representadas pela matriz $\Lambda_{\mu\nu}$, atuam de forma similar nos dois quadrivetores, momento, $\vec{\pi}$, e posição, $\vec{\chi}$, como não poderia deixar de ser. A quarta componente de $\vec{\pi}$ admite uma interpretação simples quando se introduz a energia relativística conforme visto a seguir.

Antes de seguir em frente vale à pena fazer uma observação a cerca da matriz $\Lambda_{\mu\nu}$. Como foi dito anteriormente, ela representa uma rotação e tais matrizes não provocam mudanças no módulo do vetor que sofre a rotação. Em outras palavras, os módulos dos quadrivetores $\vec{\pi}$ e $\vec{\chi}$ são invariantes de Lorentz. Isso significa que π^2 e χ^2 possuem o mesmo valor em qualquer referencial. Uma discussão sobre π^2 será feita mais tarde. Para χ^2 temos:

$$\chi^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 + \chi_4^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 \qquad (5.2.47\ a)$$

e se $\chi^2 = \chi'^2$

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 \qquad (5.2.47\ b)$$

as quais correspondem à generalização das (4.1.8) e (4.1.9). Esta grandeza é denominada intervalo **e representa o módulo do quadrivetor posição**.

Assim, a maneira de recuperar o caráter vetorial das grandezas Físicas dentro do contexto da relatividade é perceber a quarta dimensão como algo importante para a descrição da realidade. Assim, devem ser definidas a quadrivelocidade e o quadrimomento e em seguida mostrar que as leis de conservação são recuperadas nesse caso. Vale uma analogia para um mundo bidimensional. Imagine um vetor no plano *xy* que seja girado em qualquer direção, mas mantido no plano original. Seu módulo permanecerá o mesmo e igual à $\sqrt{\mathbf{x^2+y^2}}$. No entanto, se ele for girado na direção *z*, suas componentes *x* e *y* diminuirão de tamanho. Assim o módulo *xy* de um vetor 3D não é preservado, pois, deve-se somar a contribuição da componente z. O que acontece na relatividade é algo parecido. As transformações de Lorentz consistem em uma rotação num espaço 4D e por isso a cinemática e a dinâmica 3D ficam "estranhas" no sentido de não satisfazer o bom-senso de alguém que mora em 3D.

5.3 - DINÂMICA RELATIVÍSTICA.

Vimos que para a 3ª lei de Newton ter sentido no contexto da relatividade é preciso reconhecer o momento linear como sendo dado pela (5.2.33) aqui repetida

$$\vec{p} = \gamma_v m_0 \vec{v} \tag{5.3.1}$$

Com essa providência tomada, a dinâmica relativística em um dado referencial S fica definida pela variação temporal do momento linear, ou seja, a segunda lei de Newton na forma da equação (2.3.1) continua válida, porém, deve-se usar a (5.3.1) como definição de momento linear:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\gamma_v m_0 \vec{v}}{dt} \tag{5.3.2}$$

A energia relativística pode então ser definida da mesma forma que o caso clássico considerando que o trabalho da força resultante é igual à variação da energia cinética. A taxa de variação da energia cinética, K, é dada pela (2.3.8)

$$P = \frac{dK}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} \tag{5.3.3}$$

que no contexto relativístico fica

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d\gamma_v m_0 \vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = m_0 \frac{d[\gamma_v \vec{v}]}{dt} \cdot \vec{v} \qquad (5.3.4)$$

Desenvolvendo a derivada do produto e o produto interno vem

$$\frac{dK}{dt} = m_0 \left[\gamma_v \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \frac{d\gamma_v}{dt} \vec{v} \cdot \vec{v}\right] = m_0 \left[\gamma_v \frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{dt} + \frac{d\gamma_v}{dt} v^2\right] \qquad (5.3.5)$$

O valor de $\frac{d\gamma_v}{dt}$ pode ser então calculado como

$$\frac{d\gamma_v}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-\frac{2v}{c^2}\right)\frac{dv}{dt} =$$

$$\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt}\gamma_v^3 = \frac{\gamma_v^3}{c^2}\frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{dt} \qquad (5.3.6)$$

Assim,

$$\frac{dK}{dt} = m_0 \left[\gamma_v \frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{dt} + \gamma_v^3 \frac{v^2}{c^2} \frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{dt}\right] = \gamma_v m_0 \frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{dt}\left[1 + \gamma_v^2 \frac{v^2}{c^2}\right] \qquad (5.3.7)$$

O termo entre colchetes vale

$$1 + \gamma_v^2 \frac{v^2}{c^2} = 1 + \frac{v^2/c^2}{1 - v^2/c^2} = \frac{1}{1 - v^2/c^2} = \gamma_v^2 \qquad (5.3.8)$$

Assim,

$$\frac{dK}{dt} = m_0 \gamma_v^3 \frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{dt} \qquad (5.3.9)$$

Pode-se agora inverter a (5.3.6) para escrever $c^2 \frac{d\gamma_v}{dt} = \gamma_v^3 \frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{dt}$ que substituindo na (5.3.9) produz

$$\frac{dK}{dt} = m_0 c^2 \frac{d\gamma_v}{dt} \qquad (5.3.10)$$

ou ainda

$$dK = d\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (5.3.11)$$

A (5.3.11) pode ser integrada como

$$\int dK = \int_{v_i}^{v_f} d\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (5.3.12)$$

Se a partícula estiver inicialmente em repouso $K_i = 0$ e $v_i = 0$ resultando em

$$K = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0c^2 \qquad (5.3.13)$$

A equação acima mostra que a energia cinética da partícula relativística é obtida por uma subtração de dois termos. O segundo termo consiste na chamada energia de repouso, ou seja, é a energia que a partícula tem pelo falo de possuir massa de repouso. O primeiro termo é então a energia total da partícula, E. Com isso, teremos

$$E = mc^2 \qquad (5.3.14)$$

onde

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (5.3.15)$$

é a massa relativística já encontrada em (5.2.22). A (5.3.14) é das mais famosas equações da Física. É também importante notar que a energia relativística está relacionada à componente temporal do quadrimomento. Comparando a (5.3.14) com a (5.2.37) vê-se que

$$E \ = \ p_t c \qquad (5.3.16)$$

que é a relação mencionada no fim da seção anterior, ou seja, o quadrimomento pode ser escrito em termos das componentes do momento linear tridimensional e da energia relativística como se segue.

$$\pi_1 = p_x, \pi_2 = p_y, \pi_3 = p_z \text{ e } \pi_4 = i\frac{E}{c} \qquad (5.3.17)$$

Retomando a discussão sobre os módulos dos quadrivetores temos que

$$\pi^2 = \pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2 + \pi_4^2 = {p_x}^2 + {p_y}^2 + {p_z}^2 - \frac{E^2}{c^2} \qquad (5.3.18)$$

desenvolvendo os quadrados vem

$$p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2 - \frac{(p_t c)^{\,2}}{c^2} = (\gamma_v m_0 v_x)^2 +$$

$$\left(\gamma_v m_0 v_y\right)^2 + (\gamma_v m_0 v_z)^2 - (\gamma_v m_0 c)^2 \qquad (5.3.19)$$

ou

$$\gamma_v^2 m_0^2 v^2 - \gamma_v^2 m_0^2 c^2 = -m_0^2 \frac{c^2 - v^2}{1 - v^2/c^2} = -m_0^2 c^2 \qquad (5.3.20)$$

Como esperado, o valor de π^2 é um invariante de Lorentz. Pode-se retornar à equação (5.3.18) para se chegar na relação relativística entre energia e momento linear (chamada de relação de dispersão). Tem-se

$$p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2 \qquad (5.3.21)$$

que se torna

$$p^2 c^2 - E^2 = -m_0^2 c^4 \qquad (5.3.22)$$

já que $p^2 = p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2$, ou, finalmente,

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \qquad (5.3.23)$$

que é a relação desejada.

A mesma discussão pode ser feita para o referencial S´. Basta trocar o momento linear para dp´e o tempo para dt´ na (5.3.2). A sequência da dedução é imediata. Em resumo, para o referencial S, a segunda lei de Newton em três dimensões se escreve

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\gamma_v m_0 \vec{v}}{dt} \qquad (5.3.24a)$$

enquanto para o referencial S´ vem

$$\overrightarrow{F'} = \frac{d\overrightarrow{p'}}{dt'} = \frac{d\gamma'_v m_0 \overrightarrow{v'}}{dt'} \qquad (5.3.24b)$$

Resta o problema de como escrever uma em relação à outra quando S se move em relação à S´ com velocidade u, ou seja, devemos ser capazes de escrever expressões similares às (4.3.9 a, b, c) ligando as equações (5.3.24a e b) através de uma transformação de Lorentz. Deve ser notado que a força tridimensional não se comporta mais como um vetor, pois a diferencial dt (ou dt') muda conforme o referencial e introduz distorções como aquelas vistas para o caso da composição de velocidades discutida após a apresentação da equação (4.2.8).

A maneira de resolver esse impasse vem considerando-se a ideia do referencial próprio no qual a massa de repouso foi definida (5.2.20). No referencial próprio, aquele que tem a partícula como referência, os deslocamentos espaciais da partícula: dx, dy e dz são, obviamente, nulos e ela só possuirá apenas a quarta componente, $icdt$, operando. O intervalo, dado pelas equações (5.2.47a e b), fica definido como $-c^2dt^2$, ou $-c^2d\tau^2$, adotando a letra grega tau para a coordenada do tempo no referencial próprio. Para qualquer outro referencial teremos o intervalo escrito como

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 = dr^2 - c^2dt^2 \tag{5.3.25}$$

e com isso vem

$$dr^2 - c^2dt^2 = -c^2d\tau^2 \tag{5.3.26}$$

que pode ser simplificada em

$$c^2d\tau^2 = c^2dt^2\left[1 - \left(\frac{dr/dt}{c}\right)^2\right] = c^2dt^2\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right] \tag{5.3.27}$$

e, finalmente,

$$d\tau^2 = dt^2/\gamma_v^2 \tag{5.3.28}$$

ou ainda

$$d\tau = dt/\gamma_v \tag{5.3.29}$$

Tendo isso em mente pode-se seguir na definição da força relativística partindo da diferencial das equações (5.2.42):

$$\begin{cases} dp_x' = \gamma_u(dp_x - \beta dp_t) \\ dp_y' = dp_y \\ dp_z' = dp_z \\ dp_t' = \gamma_u(dp_t - \beta\, dp_x) \end{cases} \tag{5.3.30}$$

Dividindo por $d\tau$ tem-se

$$\begin{cases} \frac{dp_x{}'}{d\tau'} = \gamma_u \left(\frac{dp_x}{d\tau} - \beta \frac{dp_t}{d\tau} \right) \\ \frac{dp_y{}'}{d\tau'} = \frac{dp_y}{d\tau} \\ \frac{dp_z{}'}{d\tau'} = \frac{dp_z}{d\tau} \\ \frac{dp_t{}'}{d\tau'} = \gamma_u \left(\frac{dp_t}{d\tau} - \beta \frac{dp_x}{d\tau} \right) \end{cases} \tag{5.3.31}$$

como, por definição $d\tau' = d\tau$, a grandeza $dp/d\tau$ se comporta como um quadrivetor e é chamada de força de Minkovsky. Em termos matriciais a (5.3.31) pode ser escrita como:

$$\frac{d}{d\tau}\begin{bmatrix} p_x{}' \\ p_y{}' \\ p_z{}' \\ ip_t{}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_u & 0 & 0 & i\gamma_u\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\gamma_u\beta & 0 & 0 & \gamma_u \end{bmatrix} \frac{d}{d\tau}\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ ip_t \end{bmatrix} \tag{5.3.32}$$

ou, usando o somatório vem

$$\frac{d\pi'_\mu}{d\tau} = \sum_{\nu=1}^{4} \Lambda_{\mu\nu} \frac{d\pi_\nu}{d\tau} \tag{5.3.33}$$

Para cada componente do quadrimomento. Para completar a tarefa, podemos usar agora a definição do tempo próprio para cada um dos referenciais, ou seja, devemos utilizar

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma_v} = \frac{dt'}{\gamma_v{}'} \tag{5.3.34}$$

na (5.3.33) o que resulta em

$$\gamma_v{}' \frac{d\pi'_\mu}{dt'} = \sum_{\nu=1}^{4} \Lambda_{\mu\nu} \gamma_v \frac{d\pi_\nu}{dt} \tag{5.3.35}$$

e então, usando a (4.2.19), vem

$$\frac{d\pi'_\mu}{dt'} = \sum_{\nu=1}^{4} \Lambda_{\mu\nu} \frac{\gamma_v}{\gamma_v{}'} \frac{d\pi_\nu}{dt} = \sum_{\nu=1}^{4} \Lambda_{\mu\nu} \frac{1}{\gamma_{u\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)}} \frac{d\pi_\nu}{dt} \tag{5.3.36}$$

Voltando a notação matricial:

$$\begin{bmatrix} F_x{}' \\ F_y{}' \\ F_z{}' \\ iF_t{}' \end{bmatrix} = \frac{1}{\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & i\beta \\ 0 & 1/\gamma_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\gamma_u & 0 \\ i\beta & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ iF_t \end{bmatrix} \tag{5.3.37}$$

que contém as transformações desejadas para a força e é o que define a dinâmica relativística. Em termos do um sistema a (5.3.37) é escrita como:

$$\begin{cases} F_x' = \frac{F_x - \beta F_t}{\left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right)} \\ F_y' = \frac{F_y}{\gamma_u \left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right)} \\ F_z' = \frac{F_z}{\gamma_u \left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right)} \\ iF_t' = \frac{i\beta F_x + iF_t}{\left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right)} \end{cases} \qquad (5.3.38\ a, b, c \text{ e } d)$$

Deve ser notado que o conjunto (5.3.38) é diferente daquele citado em (4.3.10). Como apresentado naquela seção, o conjunto (4.3.10) não contém a 3a lei de Newton embutida e assim o que deve ser usado é o conjunto (5.3.38). Convém assim rever o resultado da seção 5.1 sobre a lei de Biot-Savart já que ela foi baseada no conjunto errado de equações.

5.4 - FORÇAS ELETROMAGNÉTICAS II

Na seção 5.1 foi tratado o problema da interação entre duas cargas puntiformes alinhadas com o eixo z em repouso no sistema S. Em S a lei de Coulomb é escrita como:

$$\vec{F} = 0\hat{x} + 0\hat{y} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\hat{z} = F_z\hat{z} \qquad (5.4.1)$$

onde r é a distância entre as cargas, Q é a carga que está fixa na origem e q é a carga que está fixa na posição z = r. Ao invés das (4.3.10) devemos usar as (5.3.39) para calcular a força que um observador viajando com velocidade u na direção x perceberia. Para tanto basta fazer $F_x = F_y = F_t = 0$ e ainda $v_x = v_y = v_z = 0$ já que a força Coulombiana é radial e as partículas se encontram em repouso relativo. Com isso,

$$\begin{cases} F_x' = 0 \\ F_y' = 0 \\ F_z' = \frac{F_z}{\gamma_u{}^2} \\ F_t' = 0 \end{cases} \qquad (5.4.2)$$

ou seja, temos o mesmo resultado que aquele apontado na (5.1.2). Segue-se imediatamente a dedução da seção 5.1 o que resulta na (5.1.6) e nas (5.1.7) e (5.1.8) corroborando a discussão feita no final da seção (5.1). O caso analisado foi simples e isso evidencia as inconsistências das equações (4.3.10).

6. INTRODUÇÃO AO PRODUTO

O trabalho foi desenvolvido com base na pesquisa dos livros didáticos apresentados pela SEEDUC RJ, no ano de 2011, para serem avaliados e adotados pelos professores nos anos de 2012, 2013 e 2014 (ver apêndice A). Esta pesquisa visou verificar a presença do tema TR, incluído no ensino médio através do CM nos livros didáticos disponíveis para as escolas estaduais e verificar a se os critérios adotados pelo PNLD são atendidos, quando se refere ao tema.

A verificação dos livros partiu dos seguintes critérios[8]:

- Presença do tema nos livros didáticos;
- Verificação de erros conceituais/visuais;
- Desenvolvimento matemático utilizado;
- Contextualização;
- Abordagem histórica e social (construção do conhecimento).

A partir do resultado obtido no diagnóstico dos livros, foi desenvolvido um perfil do livro didático quanto ao tema TR, revelando que o tema quando presente está situado no volume 3, destinado a turmas de 3º ano do ensino médio e não no volume 1, destinado a turmas de 1º ano, revelando a inexistência do tema nos livros didáticos destinados ao primeiro ano do ensino médio.

Tendo em vista que o tema relatividade não estava presente na prática docente e que estes, em sua maioria, tenham tido o último contato com o tema durante a formação universitária, é adequada a confecção de um material para auxiliar o professor em sua tarefa. Através de uma revisão de literatura, foi criado um material para atualização profissional, visando a valorização dos aspectos históricos que permitam ao docente compreender a elaboração da TR como uma teoria de unificação e assim, trabalhar o assunto em sala de aula de forma a interligar conhecimentos e proporcionar aos alunos um aprendizado significativo[9] (MOREIRA, 2006), melhorando a qualidade do ensino.

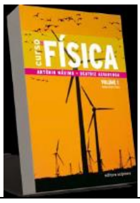
[8] Os critérios utilizados foram adaptados a partir da avaliação do PNLD, para atender a especificidade do tema da pesquisa, TR.

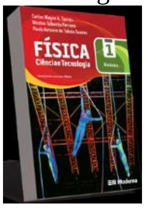
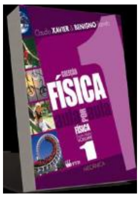
[9] Entende-se por aprendizado significativo o processo por meio do qual uma nova informação relaciona-se, de maneira substantiva, a um aspecto relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo.

7. RESULTADOS

A pesquisa revelou a total ausência do tema Teoria da Relatividade Especial no volume 1, destinado a turmas de primeiro ano do ensino médio, nos livros didáticos pesquisados. O tema está inserido no volume 3, destinado ao terceiro ano do ensino médio. Os capítulos que abordam o tema o fazem de maneira superficial e com pouca valorização da construção do conhecimento e dos aspectos históricos. Três livros pesquisados apresentam pequenos erros que não interferem na compreensão do tema e podem ser facilmente apontados pelos professores. A tabela (7.1) relaciona cada livro didático a sua avaliação quanto a presença do tema, a abordagem histórica e presença de erros.

Tabela 7.1: Relação dos livros e sua respectiva avaliação quanto aos critérios adotados.

Livros	Presença do tema TR.	Abordagem Histórica	Presença de erros conceituais/ imagens
Curso de Física 	Vol. III	Apesar de a leitura das seções que abordam a história da ciência ser incentivada, esse aspecto é pouco explorado didaticamente, em função de um tratamento algumas vezes superficial das questões históricas e epistemológicas.	
Compreendendo a Física 	Vol. III	O tratamento dado à história da ciência é superior ao que se costuma encontrar em obras congêneres, embora reproduza alguns equívocos e imprecisões comuns, o que não chega a comprometer a qualidade do material.	
Conexões com a Física 	Vol. III	Livro com poucos aspectos relacionados à história da ciência, na perspectiva de complementar essa discussão e com vistas a possibilitar uma abordagem, em maior profundidade, desses aspectos. O manual do professor apresenta subsídios, quer através de orientações, quer pela inserção de textos específicos sobre história da ciência ou pela indicação de referências.	

Física – ciência e tecnologia 	Vol. III	As referências à história da ciência aparecem em biografias de cientistas e em relatos de suas descobertas. No entanto, em alguns casos, o texto resume-se a apresentar a fotografia de um cientista e a indicação de suas datas de nascimento e morte.	Incoerência na notação adotada. O texto apresenta um equívoco quanto ao tempo e o tempo próprio.
Quanta Física 	Vol. III	Oferece oportunidades de reflexões sobre as interações entre ciência, tecnologia, sociedade e ambiente e sobre o papel de aspectos da história da ciência na constituição do conhecimento físico sistematizado. São apresentadas atividades envolvendo elementos da história da ciência, que facilitam a compreensão de aspectos epistemológicos do processo de construção de teorias e suas interações sociais.	Algumas datas incorretas. O texto data a teoria da relatividade geral em 1905.
Física 	Vol. III	Apresenta o desenvolvimento dos conhecimentos físicos para se chegar a compreender as suas formulações mais atuais, como resultado de um longo processo de construção coletiva da humanidade, a partir do trabalho de muitas mentes ao longo da história.	
Física aula por aula 	Vol. III	Pouco desenvolvimento de aspectos históricos e da construção do conhecimento. O livro apresenta textos complementares ao final de cada capítulo, que buscam suprir a carência histórica através de curtas biografias e datas relacionadas aos temas abordados.	Equívoco na representação da contração do espaço. Cita a contração como uma realidade em ambos os referenciais, quando na realidade é a percepção que um referencial (estático) apresenta do referencial em movimento.
Física e realidade 	Vol. III	Há referências ao processo de produção dos conhecimentos científicos como causa e solução de problemas sociais atuais, caracteriza a Física como uma ciência em transformação possibilitando a discussão do caráter provisório do conhecimento científico como um todo. Os tópicos de Física moderna caracterizam-se por explorar as rupturas produzidas na estrutura conceitual da Física, na passagem do século XIX para o século XX, inclusive envolvendo o conceito de paradigma do ponto de vista epistemológico.	

Física em contextos – pessoal – social – histórico 	Não apresenta a TR	Os conteúdos programados são tratados com uma forte atenção à sua historicidade. São mostradas situações de colaboração entre cientistas, assim como algumas polêmicas, controvérsias e mudanças paradigmáticas na história da ciência. Enfatiza-se, assim, a ideia de que a ciência é uma atividade humana, em constante evolução, sujeita a condicionamentos históricos, socioculturais e econômicos, fruto de ações de grandes cientistas, influenciadas pelo intercâmbio de informações e pela cooperação entre eles.	
Física para o ensino médio 	Vol. III	Embora não se destaque pela abordagem histórica da Física, é nítida, a partir dos textos apresentados, a preocupação em não transformar a história da ciência numa sequência de pequenas gotas biográficas de cientistas famosos.	

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho busca abordar um problema presente no cotidiano docente e dar ao professor uma ferramenta para seu aprimoramento. Os trabalhos encontrados, em uma pesquisa preliminar, referentes a Teoria da Relatividade Especial, trazem propostas de aula e não a melhoria da qualificação do profissional atuante em sala de aula. Esta pesquisa mostra-se relevante dada a realidade docente e a mudança recente do currículo a ser adotado pelas escolas públicas estaduais.

A compreensão deste tema é de tamanha relevância que seria impossível imaginar a sociedade atual, com toda sua tecnologia de informação sem o desenvolvimento da TR. Assim, o estudo deste tema no ensino médio possibilita ao aluno uma melhor visão de como a ciência é construída e ampliada, tornando-se um livro em aberto e infindável. Cabe ao professor possibilitar ao aluno uma visão clara que o torne crítico e capaz de avaliar temas contemporâneos com um mínimo de conhecimento acerca da Física moderna. Para este discurso tornar-se realidade é fundamental que o docente tenha domínio e segurança ao abordar temas como a TR e para tal justifica-se um aprimoramento periódico e permanente deste profissional.

A TR apresenta-se como um gancho para um posterior desenvolvimento da Física moderna em sala de aula. Na medida em que o assunto é abordado historicamente, torna-se possível que o professor construa um desencadeamento lógico que facilite a compreensão do aluno.

O arcabouço do conhecimento físico foi ampliado, em decorrência de rupturas com conceitos e significados clássicos. Teorias como a Relatividade e a Mecânica Quântica têm servido de suporte na produção de novos conhecimentos em um novo panorama científico. Portanto, a penetração da Física Moderna e Contemporânea na comunidade em geral, através das tecnologias e da mídia, torna necessária a atenção, empenho e qualificação docente. Buscando suprir questionamentos e a necessidade de formar um cidadão apto a uma leitura mais ampla do mundo a sua volta.

Há atualmente uma tentativa das editoras de aproximar os livros didáticos ao currículo mínimo da SEEDUC RJ, no entanto, o tema Teoria da Relatividade Especial continua obscuro ou ausente. A própria SEEDUC RJ vem disponibilizando material de apoio, através de um portal na internet, para seus professores, facilitando a pratica docente, no entanto, tal material não preza o aperfeiçoamento docente, pois faz uso de uma linguagem voltada exclusivamente para alunos. É necessário que o professor busque formas alternativas para suprir esta carência.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Guia de livros didáticos PNLD 2012 [Física]. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/index.php/downloads/pnld/pnld2012/guia2012/5507-guiapnld2012fisica/download>. Acesso em: 10 set. 2012.

CACHAPUZ, A; CARVALHO, A. M. P.; GIZ-PÉREZ, D. A necessária renovação do Ensino de Ciências. São Paulo: Cortez, 2005. Disponível em: <http://www.apeoesp.org.br/d/sistema/publicacoes/146/arquivo/revista-de-ciencias.pdf>. Acessado em: 01 jun. 2012.

CONTRERAS, J. Autonomia de professores. (1989) Tradução de Sandra Trabucco Valenzuela. São Paulo: Cortez, 2002, p.296.

LAKATOS, I. História da ciência e suas reconstruções racionais. In: ANDRÉ, J. M. Da História das ciências à Filosofia da ciência. **RevistaFilosófica de Coimbra**. Coimbra, n. 10, p. 315-359, 1996. Disponível em: <http://saavedrafajardo.um.es/WEB/archivos/Coimbra/10/Coimbra10-02.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2012.

MION, R.; ANGOTTI, J. A. P. Em busca de um perfil epistemológico para a prática educacional em educação em ciências.**Ciência e Educação**,v. 11 , n. 2, p. 165-180, 2005. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v11n2/01.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2012

MOREIRA, M. A. Aprendizagem significativa: da visão clássica à visão crítica**.** In:VENCONTRO INTERNACIONAL SOBRE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA, Madrid, Espanha, set. 2006, *Anais*... Espanha 2006. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/~moreira/visaoclasicavisaocritica.pdf>. Acesso em: 20 set. 2012.

QUEIROZ, et al. Ensino de Ciências de qualidade na perspectiva dos professores de nível médio: construindo uma comunidade de pesquisadores. **RBPG**, **Políticas Capes**, Brasília, v. 9, n. 16, p. 231 - 258, abr. 2012. Disponível em: <http://www2.capes.gov.br/rbpg/images/stories/downloads/RBPG/vol.9_16/s2-cap8.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2012.

RODRIGUES, Carlos Daniel; PIETROCOLA, Maurício. Abordagem da relatividade restrita em livros didáticos do ensino médio e a transposição didática. In: II ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA E EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, 1999, Valinhos. Florianópolis: OPM CED/ UFSC, 1999. Disponível em:<www.nupic.fe.usp.br/Publicacoes/congressos/Carlos_Daniel_Ofugi_ Rodrigues_A_ABORDAGEM_DA_RELATIVIDADE_RESTRITA_EM_LIVROS_DIDATICOS.pdf> Acesso em: 01 jun. 2013.

SAVIANI, Demerval. Educação: do senso comum à consciência filosófica. 10. ed. São Paulo: Cortez Editora, 1991. Disponível em: <http://www.visionvox.com.br/biblioteca/d/demerval-saviani-do-senso-comum-consciencia-filosofica.pdf>. Acesso em: 01 jun. 2012.

BIBLIOGRAFIA

BARRETO, M. **Física - Einstein para o ensino médio.** Rio de janeiro:EditoraPapirus, 2009.

EINSTEIN, A.; INFELD, L. **A evolução da Física.** Tradução: Giasone Rebuá. Rio de Janeiro:Editora Zahar, 2008.

EINSTEIN, A.**On the electrodynamics of moving bodies**. 30 jun. 1905. Tradução do original: Zur Elektrodynamik bewegter Körper, In: Annalen der Physik. n. 17, p. 891, 1905. Disponível em: <http://www.fourmilab.ch/etexts/einstein/specrel/>. Acessado em: 10 jun. 2012.

BARRETO, M. **Einstein para o ensino médio**. Campinas: Papirus, 2009.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Lei no 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília: DF, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio**. Brasília: DF, 2000.

GRIFFITHS, David J. **Eletrodinâmica**. Tradução: Heloisa Coimbra. São Paulo:Editora Pearson,ed.3, 2011.

HEWITT, Paul G.**Física Conceitual**. Tradução: Trieste Freire Ricci. Porto Alegre:Editora Bookman, ed. 9, 2008.

KENNEDY, Robert E. **A student's guide to Einstein's major papers**. USA: EditoraOxford, 2012.

KNIGHT, Randall D. **Física - Uma abordagem estratégica**. Porto Alegre:EditoraBookman, v.3, 2009.

NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Curso de Física Básica**. Rio de Janeiro:Editora Blucher, v.4, 1998.

RUSSELL, Bertrand. **ABC da Relatividade**. Rio de Janeiro:EditoraZahar, 2005.

FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. **The Feynman lectures on physics** Massachussetts: Addison-Wesley, 1965. 3 v., v. 1.

MOSCA, G.; TIPLER, P. A. **Física para cientistas e engenheiros**. 6. ed. Rio de Janeiro:LTC, 2009. 3 v.

THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Classical dynamics of particles and systems**. 5. ed. Belmont: Brooks Cole, 2003.

TIPLER, P. A.; LLEWELLYN, R. A. **Física moderna**. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

APÊNDICE A – Relação dos livros avaliados quanto ao tema Teoria da Relatividade. Disponibilizado através do Guia PNLD – 2012.

CURSO DE FÍSICA
Antônio Máximo Ribeiro da Luz
Beatriz Alvarenga Alvarez
Editora Scipione

COMPREENDENDO A FÍSICA
Alberto Gaspar
Editora Ática

CONEXÕES COM A FÍSICA
Blaidi Sant'Anna
Glória Martini
Hugo Carneiro Reis
Walter Spinelli
Editora Moderna

FÍSICA – CIÊNCIA ETECNOLOGIA
Carlos Magno A. Torres
Nicolau Gilberto Ferraro
Paulo Antonio de Toledo Soares
Editora Moderna

QUANTA FÍSICA
Carlos Aparecido Kantor
Lilio Alonso Paoliello Junior
Luis Carlos de Menezes
Marcelo de Carvalho Bonetti
Osvaldo Canato Junior
Viviane Moraes Alves
Editora PD

FÍSICA
Gualter, Helou, Newton
Editora Saraiva

FÍSICA AULA POR AULA
Benigno Barreto Filho
Claúdio Xavier da Silva
Editora FTD

FÍSICA E REALIDADE
Aurélio Gonçalves Filho
Carlos Toscano
Editora Scipione

FÍSICA EM CONTEXTOS –PESSOAL – SOCIAL –HISTÓRICO
Alexander Pogibin
Maurício Pietrocola
Renata de Andrade
Talita Raquel Romero
Editora FTD

FÍSICA PA RA O ENSINOMÉDIO
Fuke, Kazuhito
Editora Saraiva

APÊNDICE B - Proposta para explicar a síntese das equações de Maxwell em uma única equação.

Neste apêndice fica demonstrado como usar a formulação potencial do eletromagnetismo de modo a reduzir esta teoria a uma única equação. O intuito é ilustrar como as Equações de Maxwell podem ser unificadas.

$$\nabla . E = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad (i)$$

$$\nabla . B = 0 \qquad (ii)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad (iii)$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \qquad (iv)$$

Reescrevendo as equações de Maxwell a partir de potenciais A e V.

A – potencial vetorial associado ao campo magnético B;

V – potencial escalar associado ao campo elétrico E.

$$B = \nabla \times A \qquad (v)$$

Substituindo a equação (v) na equação (iii), temos:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times A)$$

$$\nabla \times E + \nabla \times \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \left(E + \frac{\partial A}{\partial t}\right) = 0$$

Na equação acima podemos associar ao termo $\left(E + \frac{\partial A}{\partial t}\right)$ um potencial escalar V.

$$E + \frac{\partial A}{\partial t} = -\nabla V$$

$$E = -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t} \qquad (vi)$$

Substituindo (vi) em (i), temos:

$$\nabla . E = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\nabla\left(-\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$-\nabla^2 V - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla A) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad \rightarrow \qquad \nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla A) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

Substituindo (v) e (vi) em (iv), temos:

$$\nabla \times B = \mu_0 J - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \mu_0 J - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t}\right)$$

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \mu_0 J - \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \frac{\partial V}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

$$\nabla(\nabla A) - \nabla^2 A = \mu_0 J - \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \frac{\partial V}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

$$\left(\nabla^2 A - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\right) - \nabla\left(\nabla A + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0 J (vii)$$

A equação acima sintetiza as quatro equações de Maxwell. Aplicando a condição do calibre de Lorentz a equação (vii):

$$\nabla A = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} (calibre\ de\ Lorentz)$$

$$\left(\nabla^2 A - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\right) - \nabla\left(\nabla A + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0 J$$

$$\left(\nabla^2 A - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\right) - \nabla\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0 J$$

$$\left(\nabla^2 A - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\right) = -\mu_0 J$$

A equação acima pode ser reescrita considerando as constantes $\mu_0 \varepsilon_0$ como o inverso da velocidade da luz ao quadrado.

$$\left(\nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\right) = -\mu_0 J \qquad (viii)$$

Considerando o operador de d'Alambert e reescrevendo a equação (viii):

$$\Box^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \qquad (d'Alambertiano)$$

$$\Box^2 A = -\mu_0 J (ix)$$

Adotando a notação de Einstein na equação acima, temos:

$$\boxed{\Box^2 A^\mu = -\mu_0 J^\mu}$$

Note que a parte temporal do operador d´Alambertiano pode ser escrita considerando uma coordenada imaginária:

$$\square^2 = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2}$$

$$\square^2 = \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial (ict)^2}$$

Lembrando que

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

e escrevendo

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z \; e \; x_4 = ict$$

vemos que o d´Alembertiano é uma generalização para 4 dimensões do Laplaciano.

$$\square^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2}$$

enquanto

$$\nabla^2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2}$$

Dai se origina a notação de Einstein. O termo quadrivetor também pode ser vislumbrado e a questão do tempo como quarta dimensão fica esclarecido. Note que a dimensão extra é um imaginário puro.

APÊNDICE C – Introdução a notação de Einstein.

Considerando a expressão

$$\sum_j A_{ij}x_j$$

Temos uma soma sobre todos os valores do índice j. Pode-se observar que o índice sobre o qual se soma, j , se repete. Isto sempre acontece quando ocorre um somatório. Einstein observou esta repetição e percebeu que não é necessário escrever o símbolo de somatório, tornando a notação mais compacta e elegante. Por exemplo,

$$\sum_j A_{ij}x_j \equiv A_{ij}x_j$$
$$\sum_i \sum_j \sum_k A_{ijk}B_iC_jD_k \equiv A_{ijk}B_iC_jD_k$$

Podemos ainda considerar as derivadas,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \equiv \partial_1$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2} \equiv \partial_2$$
$$\frac{\partial}{\partial x_3} \equiv \partial_3$$

Esta notação é amplamente utilizada na Teoria da Relatividade e eletromagnetismo. Assim, temos:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \sum_{k=1}^{3} \partial_k E_k.$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \partial_k E_k,$$

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}}_p x_p,$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_l x_l,$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \hat{\mathbf{x}}_p x_p \partial_k E_k \\
&= \hat{\mathbf{x}}_p \partial_k \left(x_p E_k\right) - \hat{\mathbf{x}}_p E_k \partial_k x_p \\
&= \hat{\mathbf{x}}_p \partial_k \left(x_p E_k\right) - \hat{\mathbf{x}}_p E_k \delta_{kp} \\
&= \hat{\mathbf{x}}_p \partial_k \left(x_p E_k\right) - \hat{\mathbf{x}}_p E_p \\
&= \hat{\mathbf{x}}_p \partial_k \left(x_p E_k\right) - \mathbf{E} \\
&= \partial_k \left(\hat{\mathbf{x}}_p x_p E_k\right) - \mathbf{E} \\
&= \partial_k \left(\mathbf{r} E_k\right) - \mathbf{E},
\end{aligned}$$