

# Física 4

Maria José Bechara  
José Luciano Miranda Duarte  
Manoel Roberto Robilotta  
Suzana Salem Vasconcelos  
*Instituto de Física da Universidade de São Paulo*

São Paulo, 26 de fevereiro de 2018



# Sumário

1 circuitos: elementos	1
2 circuito RLC	15
3 circuitos LC, RL,RC	25
4 circuitos com corrente alternada	37
5 ressonância em circuitos com corrente alternada	45
6 circuitos com corrente alternada: impedância	53
7 circuito LC infinito	65
8 linha de transmissão	77
9 linha de transmissão: cargas, correntes e campos	89
10 linha de transmissão: energia	101
11 ondas no vácuo	109
12 ondas no vácuo:	

propagação e energia	119
13 ondas eletromagnéticas: superposição e polarização	129
14 interferência	141
15 interferência por duas fendas estreitas	149
16 difração em fendas largas	159
17 relatividade: impacto e princípios	167
18 dilatação do tempo	179
19 contração do espaço e quebra da simultaneidade	191
20 transformações de Lorentz	203
21 transformações de Lorentz: o tempo	215
22 transformações de Lorentz: mais exemplos	231
23 adição de velocidades	243
24 relatividade: transformações de campos e densidades	255
25 eletromagnetismo: mudanças de referencial I	269
26 eletromagnetismo: mudanças de referencial II	279

27 campos de uma carga em movimento uniforme	291
28 cargas aceleradas	305
29 radiação	317
30 radiação: o espelho	327
31 diamagnetismo e paramagnetismo	339
32 ferromagnetismo	353
33 campos elétricos estáticos na matéria	361
34 um dielétrico esférico	375
35 ondas em meios materiais: condutores	379
36 ondas em meios materiais: o caso da prata	395
37 ondas em meios materiais: dielétricos	403
38 interfaces e condições de contorno	415
39 extensões complexas	423
40 ondas incidindo em condutores	431
41 ondas incidindo em dielétricos	439
42 interação da luz com a matéria: fenômenos	449



# Capítulo 1

## circuitos: elementos

### • introdução

O estudo de circuitos elétricos, tema inicial deste curso, consiste em uma aplicação da teoria eletromagnética. Todo o conhecimento teórico sobre o eletromagnetismo clássico está sintetizado em um sistema formado pelas quatro equações de Maxwell e pela expressão da força de Lorentz. As equações de Maxwell descrevem como campos elétricos e magnéticos são produzidos. A força de Lorentz, por sua vez, descreve a ação de campos elétricos e magnéticos sobre cargas e correntes. Um circuito elétrico consiste em uma associação de dispositivos nos quais cargas podem se mover e se organizar devido à ação de campos elétricos e magnéticos. Por isso, os seus comportamentos são determinados pelas equações de Maxwell. A seguir, apresentamos um brevíssimo resumo da teoria.

equações de Maxwell			
nome	conceito	forma integral	forma diferencial
Gauss elétrica	$q \leftrightarrow \vec{E}$	$\oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Faraday	$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \leftrightarrow \vec{E}$	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Ampère Maxwell	$I \leftrightarrow \vec{B}$ $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \leftrightarrow \vec{B}$	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \iint_S \left[ \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \cdot \hat{n} dS$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Gauss magnética	não existe $q_{\text{mag}}$	$\oiint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

As quatro *equações de Maxwell* estão representadas no quadro e expressam, de modo formal, as seguintes idéias:

**Lei de Gauss:** carga elétrica  $q$  gera campo elétrico  $\vec{E}$ ;

**Lei de Faraday:** campo magnético  $\vec{B}$  variável com tempo gera campo elétrico  $\vec{E}$ ;

**Lei de Ampère-Maxwell:** corrente elétrica  $I$  e campo elétrico  $\vec{E}$  dependente do tempo geram campo magnético  $\vec{B}$ ;

**Lei de Gauss do magnetismo:** não existe carga magnética.

Quando uma carga elétrica  $q$ , com velocidade  $\vec{v}$ , está em uma região do espaço onde há campo elétrico  $\vec{E}$  e campo magnético  $\vec{B}$ , ela sente uma força  $\vec{F}$ , denominada *força de Lorentz*, dada por

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (1.1)$$

Uma outra idéia muito importante do eletromagnetismo é a da conservação da carga elétrica. Ela é expressa pela *equação da continuidade*, que pode ser obtida a partir das equações de Maxwell.

equação da continuidade		
conceito	forma integral	forma diferencial
conservação da carga elétrica	$\oiint_S \vec{j} \cdot \hat{n} \, dS = - \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$

Para completar este resumo, lembramos que os campos são portadores de energia. Onde há campo elétrico  $\vec{E}$ , há energia elétrica  $U_E$ , com densidade volumétrica  $u_E$  dada por

$$u_E = \frac{dU_E}{dV} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}. \quad (1.2)$$

O campo magnético  $\vec{B}$  é também responsável pela existência de energia magnética  $U_B$ , com densidade volumétrica  $u_B$  dada por

$$u_B = \frac{dU_B}{dV} = \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (1.3)$$

## • elementos de circuitos elétricos

Neste curso estudamos circuitos elétricos simples, formados por associações de fontes de tensão, resistores, capacitores e indutores. Fontes de tensão são sistemas que produzem energia eletromagnética a partir de energia mecânica, química, luminosa ou outras.

Resistores são elementos do circuito onde ocorre dissipação de energia eletromagnética que se transforma em calor. Capacitores e indutores são dispositivos que podem armazenar, respectivamente, energia elétrica e energia magnética. Neste estudo, o conceito de força eletromotriz (fem) costuma ser bastante importante. Em geral, chamamos de força eletromotriz  $\varepsilon$  entre dois pontos a integral de  $(\vec{F}/q) \cdot d\vec{c}$ , onde  $\vec{F}$  é a força de Lorentz, eq. (1.1), e  $d\vec{c}$  é um elemento de caminho matemático, que passa pelo interior das partes metálicas do circuito, entre dois pontos A e B. Ela é expressa por

$$\varepsilon_{BA} = \int_A^B (\vec{E} + \vec{v} \times B) \cdot d\vec{c} \quad (1.4)$$

A fem representa o *trabalho de uma força* por unidade de carga e não é, de fato, uma força, sendo o seu nome mantido por razões históricas. É importante notar que, somente no caso em que existe apenas o campo  $\vec{E}$  e ele é produzido por cargas em repouso, a fem  $\varepsilon_{BA}$  corresponde a uma diferença de potencial eletrostático entre os dois pontos. No S.I., o volt (V) é a unidade para ambas as grandezas.

### • capacitores

De modo geral, efeitos capacitivos ocorrem quando dois condutores quaisquer são colocados próximos entre si. Os capacitores mais comuns são formados por dois objetos metálicos separados por distâncias relativamente pequenas. Em um capacitor carregado, os condutores têm cargas elétricas iguais e de sinais opostos,  $+Q$  e  $-Q$ , que dão origem a um campo elétrico  $\vec{E}_C$ . De acordo com as equações de Maxwell, o campo  $\vec{E}_C$  é proporcional a  $Q$  e a eq. (1.2) nos permite concluir que a energia  $U_C$  armazenada nesse campo deve ser proporcional a  $Q^2$ . Por isso, associamos a um capacitor uma grandeza chamada *capacitância* que, como veremos, depende apenas de suas características geométricas. A capacitância  $C$  é definida pela relação

$$U_C = \frac{Q^2}{2C}, \quad (1.5)$$

sendo o fator 2 no denominador o “mesmo” da eq.(1.2).

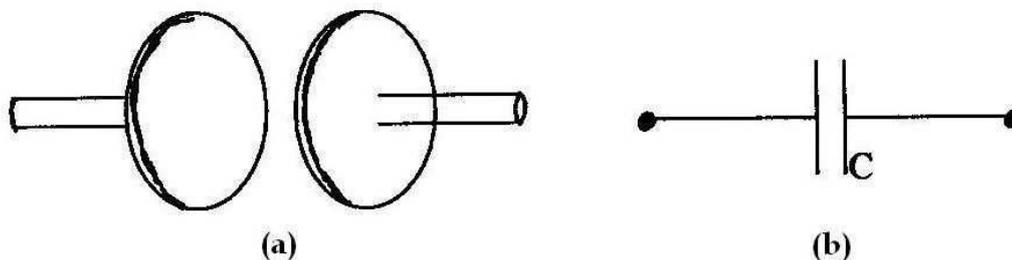


Figura 1.1: (a) Capacitor de placas planas e circulares; (b) Representação esquemática de um capacitor.

Uma outra definição de capacitância, totalmente equivalente, pode ser produzida notando que entre os condutores há uma fem  $\varepsilon_C$  e o seu cálculo, deixando como exercício,

fornece

$$\varepsilon_C = \frac{Q}{C}. \quad (1.6)$$

### • exemplo 1

Cálculo da capacitância  $C$  de um capacitor formado por duas placas metálicas planas, circulares de raio  $a$ , paralelas, separadas por uma distância  $d \ll a$ , entre as quais há vácuo. Temos duas alternativas, baseadas nas eqs. (1.5) e (1.6). Em ambos os casos precisamos, inicialmente, obter o campo elétrico  $\vec{E}_C$ . Para tanto, supomos que o capacitor esteja carregado com a carga  $Q$  e recorremos à lei de Gauss.

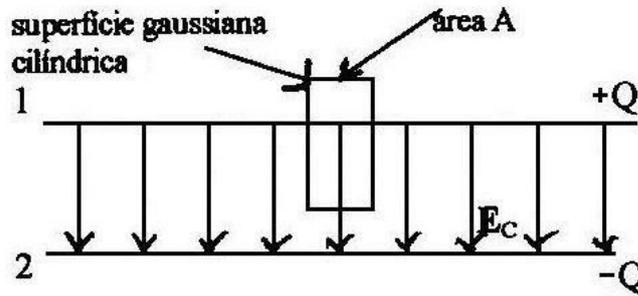


Figura 1.2: Campo  $\vec{E}_C$  no interior do capacitor e uma superfície gaussiana para sua determinação.

Usando a superfície gaussiana mostrada na Fig. 1.2, escrevemos

$$\oiint_s \vec{E}_C \cdot \hat{n} dS = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \rightarrow E_C A = \frac{Q}{\pi a^2} \frac{A}{\epsilon_0} \rightarrow E_C = \frac{Q}{\pi a^2 \epsilon_0}. \quad (1.7)$$

**alternativa 1:** a densidade volumétrica de energia elétrica é dada pela eq. (1.2) e a energia total no interior do capacitor vale

$$U_C = \iiint_V \left( \frac{\epsilon_0 E_C^2}{2} \right) dV = \left( \frac{\epsilon_0 E_C^2}{2} \right) \pi a^2 d = \frac{Q^2 d}{2 \epsilon_0 \pi a^2}. \quad (1.8)$$

Para obter este resultado, consideramos  $\vec{E}_C$  uniforme no interior do capacitor. Comparando com (1.5), obtemos

$$C = \frac{Q^2}{2U} = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{d}. \quad (1.9)$$

**alternativa 2:** A fem é dada por

$$\varepsilon_C = \int_0^d \vec{E}_C \cdot d\vec{c} = E_C d = \frac{Q}{\pi a^2 \epsilon_0} d, \quad (1.10)$$

considerando novamente  $\vec{E}_C$  uniforme na região entre as placas. A capacitância é obtida comparando esse resultado com a eq. (1.6). Assim,

$$C = \frac{Q}{\varepsilon_C} = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{d}, \quad (1.11)$$

que coincide com (1.9)

## • indutores

Indutores são, usualmente, sistemas formados por fios enrolados em formas cilíndricas ou toroidais. De modo geral, um indutor é um sistema pelo qual se faz passar uma corrente elétrica  $I$ , que produz um campo magnético  $\vec{B}_L$ , ao qual está associada uma energia magnética, expressa pela eq. (1.3). As equações de Maxwell afirmam que  $\vec{B}_L$  é proporcional a  $I$  e podemos concluir que essa energia magnética é proporcional a  $I^2$ . Por isso, a autoindutância  $L$  do indutor é definida pela relação

$$U_L = \frac{LI^2}{2} \quad (1.12)$$

e o fator 2 do denominador é o “mesmo” da eq.(1.3). A grandeza  $L$ , depende apenas das características geométricas do indutor.

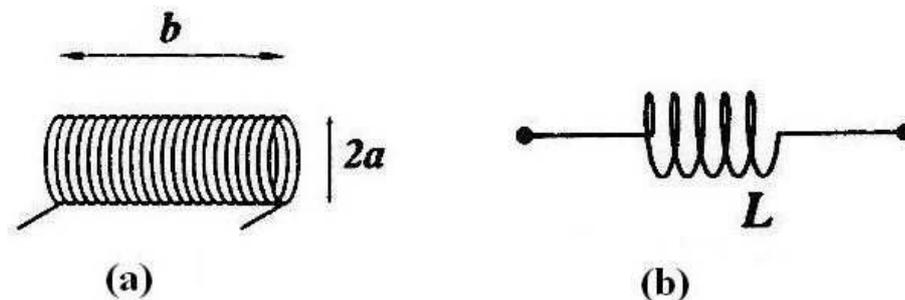


Figura 1.3: (a) Solenóide cilíndrico de raio  $a$  e comprimento  $b$ ; (b) Representação esquemática de um indutor.

A autoindutância também pode ser definida a partir da fem  $\varepsilon_L$  por meio da lei de Faraday. Esta relação é dada por

$$\varepsilon_L = L \frac{dI}{dt}. \quad (1.13)$$

e sua dedução é deixada como exercício.

## • exemplo 2

Cálculo da autoindutância  $L$  de um solenóide cilíndrico, muito longo, de raio  $a$ , comprimento  $b \gg a$ , com  $n$  espiras por unidade de comprimento. O valor de  $L$  pode ser obtido tanto a partir da eq. (1.2) como da eq. (1.13) e, em ambos os casos, é preciso conhecer

o campo magnético  $\vec{B}_L$ . Supondo que o solenóide seja percorrido por uma corrente  $I$  e aplicando a lei de Ampère ao caminho  $C$  da Fig. 1.4, obtemos

$$\oint_C \vec{B}_L \cdot d\vec{c} = \mu_0 I \rightarrow |\vec{B}_L| d = \mu_0 n d I \rightarrow |\vec{B}_L| = \mu_0 n I. \quad (1.14)$$

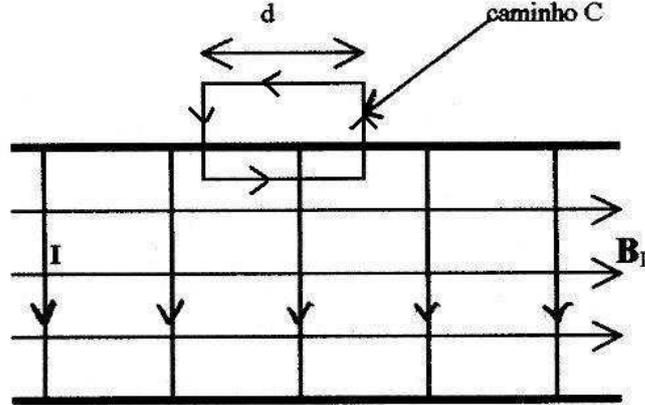


Figura 1.4: Linhas de campo magnético  $\vec{B}_L$  criado pela corrente  $I$  e um caminho  $C$ , para sua determinação.

**alternativa 1:** A energia do campo magnético é dada por

$$U_B = \iiint_V \left( \frac{B_L^2}{2\mu_0} \right) dV, \quad (1.15)$$

sendo  $V$  o volume da região onde há campo. No presente exemplo, o fato de o solenóide ser muito longo permite-nos supor que o campo no seu exterior possa ser desprezado e que o campo no seu interior seja uniforme. Com essas aproximações, escrevemos

$$U_L = \frac{B_L^2}{2\mu_0} \pi a^2 b = (\mu_0 n I)^2 \frac{\pi a^2 b}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \pi a^2 b I^2. \quad (1.16)$$

Comparando com a eq. (1.12), obtemos

$$L = \mu_0 n^2 \pi a^2 b. \quad (1.17)$$

**alternativa 2:** A fem associada ao campo induzido  $\vec{E}_L$  é dada por

$$\varepsilon_L = \oint_C \vec{E}_L \cdot d\vec{c} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}_L}{\partial t} \cdot \hat{n} dS, \quad (1.18)$$

onde o caminho  $C$  passa pelo interior de todo o circuito. Para efetuar o cálculo, supomos que o campo  $\vec{E}_L$  exista apenas na região do indutor e que este seja equivalente a um conjunto de  $nb$  espiras circulares. Com essa aproximação, podemos tomar o caminho  $C$

coincidente com uma das espiras, o que faz com que  $\hat{n}$  seja paralelo ao eixo do solenóide e, portanto,  $\vec{B}_L = B_L \hat{n}$ .

Como  $\vec{B}_L$  é uniforme no interior do solenóide, para uma espira, podemos escrever

$$\iint_S \frac{\partial \vec{B}_L}{\partial t} \cdot \hat{n} dS = \frac{\partial B_L}{\partial t} \pi a^2. \quad (1.19)$$

Usando o resultado (1.14), obtemos

$$\frac{\partial B_L}{\partial t} = \mu_0 n \frac{\partial I}{\partial t} \quad (1.20)$$

e, portanto,

$$\iint_S \frac{\partial \vec{B}_L}{\partial t} \cdot \hat{n} dS = \mu_0 n \frac{\partial I}{\partial t} \pi a^2. \quad (1.21)$$

O solenóide de comprimento  $b$  e  $n$  espiras por unidade de comprimento, tem  $nb$  espiras e, a fem total é dada por

$$\varepsilon_L = \mu_0 n^2 \frac{\partial I}{\partial t} \pi a^2 b. \quad (1.22)$$

Comparando com (1.13), obtemos novamente

$$L = \mu_0 n^2 \pi a^2 b, \quad (1.23)$$

que coincide com (1.16).

## • resistores

Resistores são sistemas condutores, metálicos ou não, que dissipam energia eletromagnética quando percorridos por correntes elétricas. Se no interior de um condutor existir um campo elétrico  $\vec{E}_R$  haverá, devido a este campo, uma corrente elétrica que o percorre. Em muitas situações, vale uma relação linear entre a densidade de corrente  $\vec{j}$  que percorre o condutor e o campo elétrico  $\vec{E}_R$ . Tal relação, conhecida como lei de Ohm microscópica, pode ser escrita como:

$$\vec{j} = \frac{\vec{E}_R}{\rho} \quad (1.24)$$

onde  $\rho$  é a resistividade elétrica do condutor, que depende do material e da temperatura.

A fem  $\varepsilon_R$  existente entre dois pontos do condutor é dada por

$$\varepsilon_R = \int \vec{E}_R \cdot d\vec{c}, \quad (1.25)$$

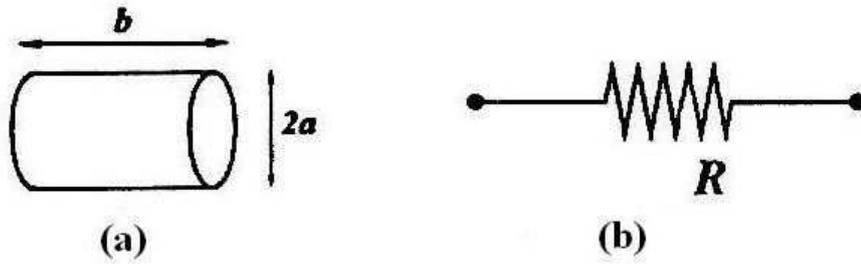


Figura 1.5: (a) Um fio metálico cilíndrico de raio  $a$  e comprimento  $b$ ; (b) Representação esquemática de um resistor.

com a integral calculada sobre um caminho que ligue os dois pontos. Desta forma, para condutores ôhmicos, vale a relação

$$\varepsilon_R = \int \rho \vec{j} \cdot d\vec{c}. \quad (1.26)$$

Como  $|\vec{j}|$  é proporcional à corrente  $I$  que percorre o condutor, para situações em que vale a lei de Ohm, podemos escrever

$$\varepsilon_R = RI, \quad (1.27)$$

onde  $R$  é a resistência do condutor, que depende da resistividade do material e de sua geometria. Esta relação expressa a lei de Ohm na forma macroscópica e a potência dissipada no trecho do fio correspondente à fem  $\varepsilon_R$  é dada por

$$P_R = \varepsilon_R I = R I^2. \quad (1.28)$$

### • exemplo 3

Cálculo da resistência  $R$  de um fio metálico cilíndrico, de raio  $a$ , comprimento  $b$  e resistividade  $\rho$ , submetido a uma fem  $\varepsilon_R$ , mostrado na Fig. 1.5(a), supondo válida a lei de Ohm microscópica  $\vec{j} = \vec{E}_R/\rho$ . A fem está relacionada ao campo  $\vec{E}_R$  no interior do resistor pela eq. (1.25) e, como o campo elétrico  $\vec{E}_R$  é uniforme no interior do fio, temos

$$\varepsilon_R = |\vec{E}_R| b. \quad (1.29)$$

A corrente  $I$  está relacionada a  $|\vec{j}|$  por

$$I = j \pi a^2 \quad (1.30)$$

e a lei de Ohm microscópica permite escrever

$$\varepsilon_R = \frac{\rho b}{\pi a^2} I. \quad (1.31)$$

Comparando com a eq. (1.27), obtemos,

$$R = \frac{\rho b}{\pi a^2}. \quad (1.32)$$

## • fontes de tensão

Fontes de tensão são sistemas capazes de transformar outras formas de energia em energia eletromagnética. Neste curso, consideramos dois tipos de fonte de tensão, as contínuas, tais como pilhas e baterias, e as oscilantes, como as tomadas residenciais. Ao primeiro tipo está associada uma força eletromotriz  $\varepsilon$  constante, e ao segundo, forças eletromotrizes que variam com o tempo. Em ambos os casos, a fonte fornece, ao circuito a ela conectado, uma potência  $P$  dada por

$$P_V = \varepsilon_V I, \quad (1.33)$$

onde  $I$  é a corrente que atravessa a fonte.

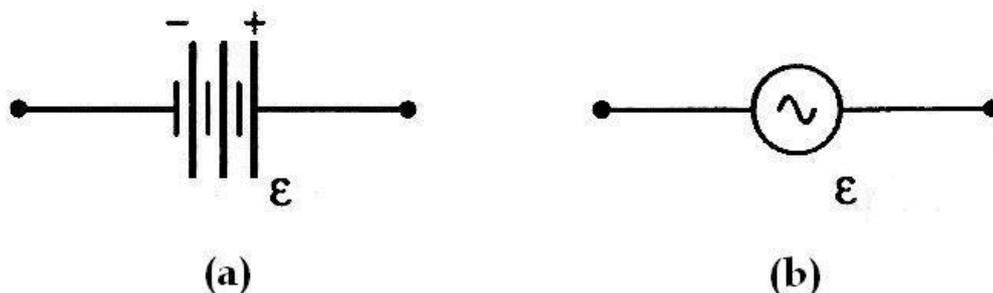


Figura 1.6: Representação de uma fonte de tensão constante (a) e de tensão variável (b).

## • um exemplo de circuito

Cada circuito corresponde a uma particular combinação de elementos, tais como capacitores, indutores, resistores e fontes. Existem, portanto, inúmeras possibilidades à nossa disposição. Um circuito particularmente simples é o mostrado na Fig. 1.7, que representa uma associação em série de um capacitor de capacitância  $C$ , um indutor de indutância  $L$ , um resistor de resistência  $R$  e uma fonte de tensão com força eletromotriz  $V$ . Ele é conhecido como circuito RLC. O circuito é simples, mas a física que rege o seu funcionamento não é nada simples. Mas ela é bonita e muito interessante.

A Fig. 1.7 pode sugerir que alguém foi a uma loja e comprou uma pilha, um resistor, um capacitor, um indutor e juntou todos esses elementos, na ordem indicada na figura, por meio de fios sem resistência. A menos dos fios sem resistência, essa seria uma possibilidade. Mas não a única. A razão é que a Fig. 1.7 corresponde a um *símbolo* e, não, a uma fotografia do circuito. Ela não tem a intenção de representar o circuito no espaço tridimensional. Ela representa o circuito em um espaço de conceitos e a sua intenção é indicar que, neste particular caso, o sistema recebe energia da fonte  $V$  irradia parte dela por meio da resistência  $R$  e acumula energia elétrica no capacitor  $C$  e magnética, no indutor  $L$ . A figura indica que esses processos acontecem, mas não em quais lugares do espaço eles ocorrem.

No interior de metais, as cargas móveis são os seus elétrons livres. Se a temperatura do sistema não for muito próxima de zero absoluto, cada elétron pode ser pensado

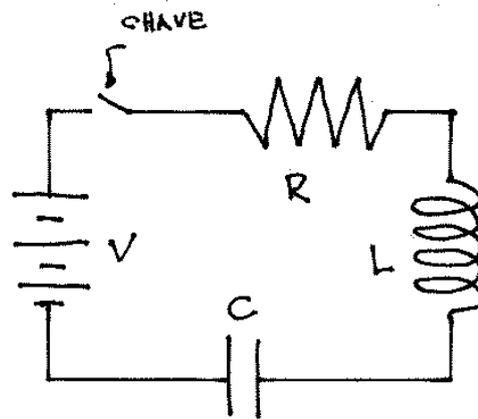


Figura 1.7: Um resistor, um capacitor, um indutor e uma fonte de tensão, associados em série; a chave permite que o circuito seja aberto ou fechado.

como uma entidade individual e o seu comportamento é regido pela força de Lorentz,  $\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ . Nos circuitos comuns, as velocidades dos elétrons livres são baixas em comparação à da luz e as forças de origem magnética podem ser desprezadas. Por isso, o comportamento do circuito é determinado pelos campos elétricos no interior do fio.

Com o circuito aberto, o campo elétrico resultante no interior do metal é nulo. Esse campo é devido à superposição de dois tipos de efeitos. Um deles é a presença da fonte de tensão  $V$ , que cria um campo elétrico no qual todo o circuito está embebido. Esse campo induz cargas nas superfícies dos componentes metálicos do circuito. Os campos devidos a essas cargas induzidas somam-se vetorialmente ao da fonte, produzindo uma resultante nula *no interior* do metal. Por isso, neste caso, os elétrons executam, no interior do fio, apenas um zigue-zague de origem térmica. Na parte exterior do circuito, os campos da fonte de tensão e das cargas induzidas na superfície do metal não se anulam e há alguma energia de origem elétrica nessa região. Isso constitui em efeito capacitivo.

Quando o circuito é fechado, todos os seus elementos passam a influir no comportamento dos elétrons. A equação da continuidade desempenha, então, um papel muito importante, pois a corrente elétrica funciona, no interior do circuito, como um fluido incompressível. Por isso, em cada instante, a corrente  $I$  é a mesma em qualquer dos seus pontos, exceto entre as placas do capacitor. Mas é ela, também, que permite relacionar a carga  $Q$  nessas placas com a corrente, por meio da relação  $I = dQ/dt$ .

A corrente elétrica corresponde a um movimento ordenado dos elétrons, superposto ao movimento desordenado associado à agitação térmica. No caso de condutores ôhmicos, em cada ponto do interior do metal vale a relação  $\vec{j} = \vec{E}/\rho$  e, portanto, a densidade de corrente é proporcional ao campo elétrico *resultante* nessa ponto.

A fonte de tensão, que pode ser uma pilha, cria campo elétrico à sua volta, devido às cargas acumuladas nas suas extremidades. O mesmo acontece com o capacitor, quando

existem cargas acumuladas nas suas placas. E o mesmo também acontece com o indutor, quando ele é percorrido por uma corrente que varia com o tempo. É importante perceber que esses campos existem tanto dentro das partes metálicas que formam o circuito quanto fora delas, no espaço vazio. Para completar o quadro, é preciso mencionar uma quarta fonte de campo elétrico, da qual se fala pouco. Essa fonte de campo são as cargas acumuladas na superfície do metal. O campo que elas criam existe, também, dentro e fora do metal. Entretanto, é dentro do metal que os seus efeitos são mais perceptíveis, pois é ele, que somado aos campos da pilha, do capacitor e do indutor, produz uma resultante que é sempre paralela ao fio. É esse conjunto de fatores que faz com que a corrente siga o caminho do fio.

### • exercícios

1. Em um circuito eletromagnético real, a resistência, o capacitor e o indutor são, necessariamente, elementos distintos?

2. É dado um capacitor cilíndrico, muito longo, de comprimento muito maior do que as suas dimensões transversais, constituído por peças metálicas com as formas das na fig. 1.8. Calcule

- o módulo do campo elétrico no seu interior, quando ele está carregado com a carga  $Q$ ;
- a sua capacitância.

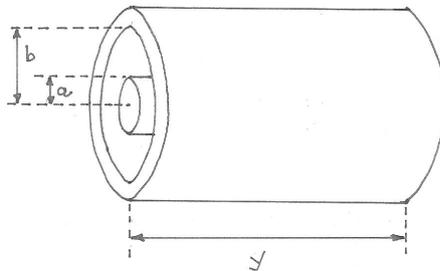


Figura 1.8: Capacitor cilíndrico.

3. Se cada cilindro da fig. 1.8 for percorrido por correntes  $I$ , em sentidos opostos, calcule

- o módulo do campo magnético na região entre os dois condutores, longe das suas extremidades;
- a auto-indutância  $L$  deste sistema.

4. É dado um resistor, formado por dois cilindros de mesmo metal, de resistividade  $\rho$ ,

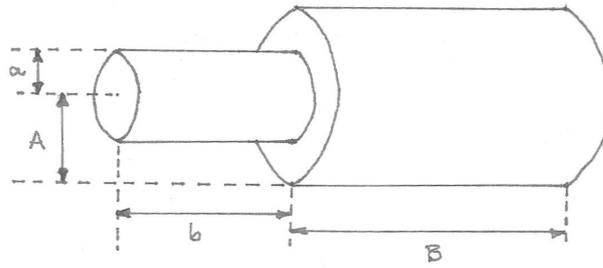


Figura 1.9: Dois cilindros metálicos justapostos.

com a forma dada na Fig. 1.9, submetido a uma fem  $\varepsilon$ . Usando a lei de Ohm microscópica  $\vec{j} = \vec{E}/\rho$ , determine

- a corrente que atravessa o cilindro da esquerda;
- os módulos dos campos elétricos  $\vec{E}_E$  e  $\vec{E}_D$  no interior dos cilindros da esquerda e da direita da figura, respectivamente.
- O campo elétrico no interior do fio é contínuo ou descontínuo sobre a superfície onde os cilindros se tocam? Justifique a sua resposta.

**5. (difícil)** Usando o fato que a energia de um capacitor, dada pela eq. (1.5), corresponde, também, ao trabalho total necessário para carregá-lo transportando sucessivos elementos de carga  $dq$  de uma placa à outra, obtenha o resultado (1.6).

**6. (difícil)** Considere um indutor formado por um fio metálico de comprimento  $c$  e seção transversal  $S$ , com  $N$  portadores de carga por unidade de volume. Usando a lei de Faraday, obtenha o resultado (1.13).

### • respostas

2. a)  $|\vec{E}_C| = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r y}$ , para  $a \leq r \leq b$

b)  $C = \frac{2\pi y \epsilon_0}{\ln(b/a)}$

3. a)  $|\vec{B}_L| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ , para  $a \leq r \leq b$

b)  $L = \frac{\mu_0 y}{2\pi} \ln(b/a)$

4. a)  $I = \frac{\pi a^2 A^2 \varepsilon}{A^2 b + a^2 B \rho}$

b)  $E_E = \frac{A^2}{A^2 b + a^2 B} \varepsilon$ ;  $E_D = \frac{a^2}{A^2 b + a^2 B} \varepsilon$

c) descontínuo: se a corrente  $I$  fluir da esquerda para a direita, na interface existe uma densidade superficial de carga

$$\sigma = \frac{-A^2 + a^2}{A^2 b + a^2 B} \epsilon_0 \varepsilon < 0,$$

calculada por meio da lei de Gauss elétrica. Se a corrente mudar de sentido, a densidade de carga na interface muda de sinal.

**5.** A energia  $U_C$  do capacitor também pode ser pensada como sendo devida ao trabalho realizado nos transportes de cargas necessárias para carregá-lo com carga  $Q$ . Em um estágio intermediário deste processo, no qual a carga do capacitor é  $q$ , ( $q < Q$ ), o trabalho necessário para levar uma quantidade de carga  $dq$ , de uma placa a outra do capacitor da Fig. 1.2, é dado por

$$d\tau(q) = dq \int_0^d \vec{E}_C(q) \cdot d\vec{c} = dq \varepsilon_C(q)$$

onde  $\vec{E}_C(q)$  é o campo elétrico entre os condutores e  $\varepsilon_C(q)$  é a fem. Neste processo, a carga do capacitor passa de  $q$  para  $q + dq$  e a energia potencial varia de  $dU_C(q)$ . Como, em cada transporte de carga,  $d\tau(q) = dU_C(q)$ , obtemos o resultado geral

$$\varepsilon_C(q) = \frac{dU_C(q)}{dq}.$$

Assim, usando a equação (1.5) encontramos

$$\varepsilon_C = \frac{Q}{C}.$$

**6.** A autoindutância  $L$  está, também, relacionada a uma fem. Segundo a lei de Faraday, uma variação temporal do campo magnético é sempre acompanhada por um campo elétrico induzido. Por isso, no caso de um circuito, uma variação temporal da corrente corresponde tanto a uma variação da energia  $U_L$ , eq. (1.12), como indica a presença de um campo elétrico induzido  $\vec{E}_{IND}$  no interior do fio metálico. Este campo exerce forças sobre os portadores de carga e realiza trabalho quando estas se deslocam. O trabalho realizado por  $\vec{E}_{IND}$  durante um tempo  $dt$ , durante o qual todos os portadores de carga do indutor se deslocam de  $d\vec{c}$ , é dado por

$$d\tau_{IND} = [NSc] q \vec{E}_{IND} \cdot d\vec{c} = [NSc] q \vec{E}_{IND} \cdot \vec{v} dt,$$

onde  $N$  é o número de portadores de carga por unidade de volume,  $S$  é a seção transversal do fio considerado,  $c$  o seu comprimento,  $q$  a carga de cada portador e  $\vec{v}$  a velocidade média dos portadores. De modo geral, a densidade de corrente do fio é dada por  $\vec{j} = q N \vec{v}$ . Como, no interior do fio,  $\vec{E}_{IND}$  e  $\vec{v}$  são paralelos, escrevemos

$$d\tau_{IND} = [NSc] q E_{IND} v dt = I \varepsilon_{IND} dt,$$

usando  $I = SNqv$  e identificando  $c E_{IND}$  à fem induzida  $\varepsilon_{IND}$ . Neste intervalo de tempo, a corrente no indutor passa de  $I$  para  $I + dI$  e a sua energia varia de uma quantidade  $dU_L = d\tau_{IND}$ . Usando a eq. (1.12), esta igualdade permite-nos escrever

$$I \varepsilon_{IND} dt = LI dI \rightarrow \varepsilon_{IND} = L \frac{dI}{dt}.$$



# Capítulo 2

## circuito RLC

As equações de Maxwell permitem-nos determinar como funcionam os circuitos elétricos envolvendo indutores ( $L$ ), resistores ( $R$ ), capacitores ( $C$ ) e fontes de tensão ( $V$ ). O comportamento de um determinado circuito depende, como veremos, não apenas da maneira como os elementos estão associados, mas também dos valores de  $R$ ,  $L$ ,  $C$  e  $V$ . De modo geral, a tensão  $V$  pode ser constante, como no caso de uma pilha ou variável no tempo, como uma tomada elétrica. Nesta aula e na próxima, tratamos o sistema formado por um indutor, um capacitor e um resistor ligados em série a uma fonte de tensão *constante*, conhecido como circuito *RLC*, alimentado por uma fonte de tensão constante, como esquematizado na Fig.2.1 e mostrado na Fig. 2.1.

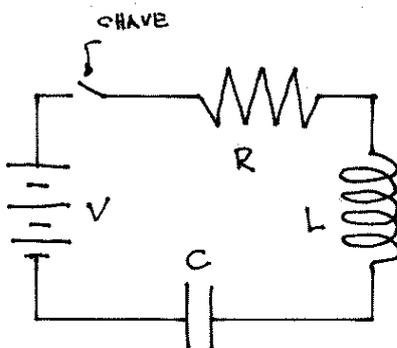


Figura 2.1: Representação de um circuito *RLC* em série, com uma chave.

### • equação diferencial

Em geral, estudar e “resolver” um circuito consiste em determinar como as cargas elétricas se localizam e se movem no seu interior em função do tempo e, o que é complementar, os vários fluxos de energia.

Existem várias maneiras possíveis para resolver o circuito da Fig. 2.1 e uma delas é

baseada no princípio de conservação de energia. Há quatro formas de energia a serem consideradas: a energia fornecida pela fonte, a energia dissipada no resistor e as energias armazenadas no capacitor e no indutor. Como a energia do sistema se conserva, em cada instante, a potência  $P_V$  fornecida pela fonte pode ser escrita como

$$P_V = \frac{dU_C}{dt} + \frac{dU_L}{dt} + P_R. \quad (2.1)$$

Usando as expressões para  $P_V$ ,  $U_C$ ,  $U_L$  e  $P_R$  (números das expressões) obtidos anteriormente, escrevemos

$$V I = \frac{d\left(\frac{Q^2}{2C}\right)}{dt} + \frac{d\left(\frac{L I^2}{2}\right)}{dt} + R I^2, \quad (2.2)$$

onde  $I$  é a corrente que circula através do resistor, do indutor e da fonte de tensão e  $Q$  é a carga no capacitor. Como a carga elétrica é uma grandeza conservada, as variações de  $Q$  estão diretamente relacionadas às correntes nos fios conectados às placas do capacitor. Por isso, a partir da equação da continuidade, obtemos

$$\frac{dQ}{dt} = I. \quad (2.3)$$

Usando esse resultado e efetuando as derivadas temporais, reescrevemos a eq. (2.2) como

$$V I = \frac{Q I}{C} + L I \frac{dI}{dt} + R I^2 = \left[ \frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt} + R I \right] I. \quad (2.4)$$

Eliminando  $I$ , e reordenando os termos, encontramos

$$V = L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}, \quad (2.5)$$

que é uma equação diferencial de segunda ordem em  $Q$ . Resolvendo essa equação, encontramos a função  $Q(t)$ , a partir da qual  $I$ ,  $U_C$ ,  $U_L$ ,  $P_L$  e  $P_R$  podem ser obtidos. Os métodos matemáticos para resolver essa equação são discutidos em seguida.

É importante notar que o resultado (2.5) também poderia ser obtido a partir da expressão da força eletromotriz,

$$\varepsilon = \int \vec{E} \cdot d\vec{c} \quad (2.6)$$

pois ele pode ser reescrito como

$$V = \varepsilon_L + \varepsilon_R + \varepsilon_C. \quad (2.7)$$

## • solução da equação diferencial

O comportamento deste sistema é determinado pela equação diferencial (2.5), que reescrevemos como Para conhecer o seu funcionamento, precisamos obter as soluções  $Q(t)$  dessa equação é um problema matemático bem conhecido cujas características principais revemos a seguir.

A equação diferencial considerada é de *segunda ordem*, pois envolve a derivada segunda da carga  $Q$  em relação ao tempo; *linear*, pois só contém termos lineares em  $Q$ , não envolvendo outras funções tais como  $Q^2$ ,  $1/Q$ ,  $\sin Q$ ,  $\exp(Q)$ , etc. Finalmente, ela é não homogênea, já que, isoladas as funções de  $Q$  e suas derivadas no lado esquerdo, o lado direito é não nulo.

No caso em que a tensão  $V$  é constante, é possível, através de uma mudança de variável, tornar a equação diferencial homogênea que é mais fácil de resolver. Definindo

$$q = Q - CV, \quad (2.8)$$

reescrevemos a equação diferencial como

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad (2.9)$$

que admite diferentes tipos de solução, dependendo dos valores de  $R$ ,  $L$  e  $C$ . Para analisar as possíveis soluções, definimos o discriminante:

$$\Delta = R^2 - \frac{4L}{C}, \quad (2.10)$$

que pode ser negativo, positivo ou nulo. A cada um destes casos, corresponde um tipo diferente de solução matemática e portanto de comportamento do circuito.

### • caso 1: $R^2 \neq \frac{4L}{C} \rightarrow \Delta \neq 0$

Quando o discriminante é não nulo, a solução da equação diferencial para  $q(t)$  é uma exponencial do tipo  $e^{\lambda t}$ , onde  $\lambda$  é uma função de  $R$ ,  $L$  e  $C$ , a ser determinada. Substituindo  $q(t) = e^{\lambda t}$  na equação (2.9), obtemos:

$$\left[ LC\lambda^2 + RC\lambda + 1 \right] e^{\lambda t} = 0. \quad (2.11)$$

Como este resultado deve ser válido para qualquer valor de  $t$ , obtemos a condição

$$LC\lambda^2 + RC\lambda + 1 = 0, \quad (2.12)$$

que fornece

$$\lambda = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}} \equiv -\alpha \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2L}, \quad (2.13)$$

onde

$$\alpha = \frac{R}{2L}. \quad (2.14)$$

Assim, a expressão geral para  $q(t)$  pode ser escrita como uma combinação linear das duas possibilidades:

$$q(t) = A \exp \left[ \left( -\alpha + \frac{\sqrt{\Delta}}{2L} \right) t \right] + B \exp \left[ \left( -\alpha - \frac{\sqrt{\Delta}}{2L} \right) t \right], \quad (2.15)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes.

Essas duas constantes, que parecem entrar no problema pela porta dos fundos, são extremamente importantes. A primeira coisa a ser notada, é que elas têm dimensão de carga e no  $SI$ , são dadas em coulombs (C). Do ponto de vista puramente matemático, quaisquer valores de  $A$  e  $B$  são aceitáveis. Assim, por exemplo, o par de valores  $A = 1,15C$  e  $B = -0,23C$  fornece uma solução tão boa da eq. (2.8) quanto o par  $A = 0$  e  $B = 5,47C$ . Por isso, a função dada pela eq. (2.15) representa, de fato, a *classe* mais geral possível de soluções da equação diferencial homogênea, para o caso  $\Delta \neq 0$ . Mais um exemplo do admirável poder da matemática! Por outro lado, quando olhamos o problema do ponto de vista do laboratório, notamos que somente existem situações particulares. A carga de um capacitor real não pode variar com o tempo do modo mais geral possível permitido pela matemática. Por isso, em problemas físicos, as constantes  $A$  e  $B$  precisam ser escolhidas de modo que uma função matemática geral possa descrever um caso específico. Este aspecto do problema voltará a ser abordado por meio de exemplos. Antes disso, retornamos ao problema matemático e estudamos separadamente, as duas situações possíveis para discriminante não nulo:  $\Delta < 0$  e  $\Delta > 0$ .

**caso 1a:**  $R^2 < \frac{4L}{C} \rightarrow \Delta < 0$

O discriminante  $\Delta$ , dado pela eq. (2.9), envolve o fator  $R^2$ , associado à dissipação de energia e o quociente  $4L/C$ , associado à conservação de energia eletromagnética do sistema. Por isso, um valor negativo para  $\Delta$  indica que o circuito é predominantemente conservativo. Para compreender como funciona um sistema conservativo, consideremos um caso limite no qual a resistência pode ser desprezada. Nessa situação, toda a energia contida no sistema não pode sair dele e tem de ficar acumulada, seja no capacitor, seja no indutor. Como consequência, o sistema oscila.

A solução geral  $q(t)$  expressa por (2.15) incorpora esse comportamento, mas é preciso manipulá-la um pouco para tornar isso claro. No caso em que  $\Delta$  é negativo, reescrevemos a sua raiz como

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-\left(\frac{4L}{C} - R^2\right)} = i \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2} \quad (2.16)$$

a eq. (2.15) pode ser colocada na forma

$$q(t) = e^{-\alpha t} [A e^{+i\omega t} + B e^{-i\omega t}], \quad (2.17)$$

onde

$$\nu = \frac{\sqrt{4L/C - R^2}}{2L}. \quad (2.18)$$

A carga elétrica é uma grandeza observável e, portanto, deve ser expressa por uma função real. A eq. (2.17), por outro lado, descreve uma função complexa, o que parece inaceitável. Para evitar esse problema, é preciso escolher as constantes  $A$  e  $B$  adequadamente.

O fato de a carga ser uma grandeza real corresponde à condição  $q = q^*$  e fornece

$$A e^{+i\nu t} + B e^{-i\nu t} = A^* e^{-i\nu t} + B^* e^{+i\nu t}. \quad (2.19)$$

Para que esta igualdade seja válida para qualquer  $t$ , devemos ter

$$A = B^* \leftrightarrow B = A^* \quad (2.20)$$

Usando esse resultado na expressão (2.17) e escrevendo o número complexo  $A$  na forma polar

$$A = |A| e^{-i\theta}, \quad (2.21)$$

obtemos

$$q(t) = \rho e^{-\alpha t} \cos(\nu t - \theta), \quad (2.22)$$

com  $\rho = 2|A|$ . Desta forma, a carga  $Q(t)$  no capacitor do circuito em estudo, de acordo com a expressão (2.8), é dada por

$$Q(t) = CV + \rho e^{-\alpha t} \cos(\nu t - \theta). \quad (2.23)$$

Essa função descreve uma oscilação amortecida. A intensidade do amortecimento é representada por  $\alpha = R/2L$ , eq.(2.14) que é diretamente proporcional à resistência. Isso indica que, no limite  $R = 0$ , não há amortecimento. O caráter oscilatório da função é devido à presença do cosseno, sendo a frequência dada por

$$\nu = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (2.24)$$

Os parâmetros  $\rho$  e  $\theta$  indicam que a equação da carga (2.23) descreve a classe mais geral possível de soluções com  $\Delta < 0$ .

Para completar esta discussão, notamos que a expressão da corrente no circuito que é dada por

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -\rho e^{-\alpha t} [\alpha \cos(\nu t - \theta) + \nu \text{sen}(\nu t - \theta)]. \quad (2.25)$$

### • exemplo 1a

Neste exemplo, estudamos o comportamento de um circuito  $RLC$  sem bateria, no caso em que, com a chave aberta, o capacitor está carregado com carga  $Q_i$ . O objetivo é calcular a função  $Q(t)$ , supondo que a chave tenha sido fechada no instante  $t = 0$  e, para isso, precisamos determinar os valores de  $\rho$  e  $\theta$ .

Dois parâmetros requerem duas condições. Uma delas diz respeito à carga inicial do capacitor, que pode ser expressa como  $Q(t = 0) = Q_i$ . A outra vem do fato de não haver corrente para  $t < 0$ . Quando a chave é fechada, em  $t = 0$ , a corrente começa a fluir, a partir do valor  $I = 0$ . Impondo essas duas condições às eqs. (2.23) e (2.24), obtemos

$$Q(t = 0) = Q_i \rightarrow Q_i = \rho \cos \theta, \quad (2.26)$$

$$I(t = 0) = 0 \rightarrow -\alpha \cos \theta + \nu \sin \theta = 0. \quad (2.27)$$

A solução desse sistema fornece

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\alpha}{\nu} \quad (2.28)$$

$$\rho = Q_i \frac{\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}}{\nu} \quad (2.29)$$

Assim, para este circuito sem fonte, a carga  $Q$  no capacitor e a corrente  $I$  são descritas, para  $t \geq 0$ , por

$$Q(t) = Q_i \frac{\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}}{\nu} e^{-\alpha t} \cos(\nu t - \theta), \quad (2.30)$$

$$I(t) = -Q_i \frac{\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}}{\nu} e^{-\alpha t} [\alpha \cos(\nu t - \theta) - \nu \sin(\nu t - \theta)], \quad (2.31)$$

sendo  $\alpha$ ,  $\nu$  e  $\theta$  dados pelas eqs. (??), (??) e (2.26)

A expressão da carga envolve um fator que oscila, dado por  $\cos(\nu t - \theta)$ , multiplicado por uma “amplitude” da forma  $Q_0(\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}/\nu)e^{-\alpha t}$ , que diminui exponencialmente com o tempo. Esta é a expressão característica de um oscilador amortecido, cujo gráfico é mostrado na Fig. 2.2. A oscilação está relacionada à transferência de energia que ocorre entre o capacitor e o indutor e o amortecimento é devido à dissipação de energia no resistor. Em um circuito  $LC$  sem resistência ocorre, como veremos adiante, apenas oscilação, sem amortecimento. Fisicamente, o caso  $\Delta < 0$  corresponde a uma situação onde a resistência  $R$  é relativamente pequena, ou seja, onde há pouca dissipação de energia eletromagnética. O fator de amortecimento,  $\alpha = R/2L$ , é proporcional à resistência do circuito. Assim, quanto maior for essa resistência, mais rápida será a dissipação de energia e, conseqüentemente, maior será o amortecimento.

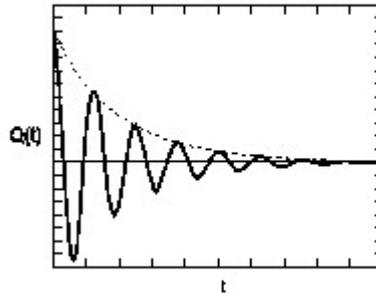


Figura 2.2: A carga  $Q$ , em função do tempo  $t$ , no capacitor de um circuito  $RLC$  série, sem fonte, no caso em que  $R^2 < 4L/C$

Por outro lado, a carga e a corrente oscilam com uma frequência  $\nu$  que, mantidos  $L$  e  $C$  fixos, decresce com o aumento da resistência. Quando  $R$  é apenas um pouco menor que  $\sqrt{4L/C}$ , a frequência é muito pequena e o sistema tende a ser predominantemente amortecido.

O tipo de comportamento do circuito para  $\Delta < 0$  é chamado de amortecimento sub crítico.

• **caso 1b:**  $R^2 > \frac{4L}{C} \rightarrow \Delta > 0$

Neste caso, a dissipação de energia é grande e a solução geral para  $q(t)$ , dada pela expressão (2.15), pode ser escrita como

$$q(t) = A e^{-\beta t} + B e^{-\gamma t}, \quad (2.32)$$

onde  $\beta$  e  $\gamma$  são constantes positivas, dadas por

$$\beta = \frac{R}{2L} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2L}, \quad \gamma = \frac{R}{2L} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2L}. \quad (2.33)$$

Assim, a carga  $Q(t)$  no capacitor e a corrente  $I(t)$  no circuito são descritas pelas classes genéricas de funções

$$Q(t) = CV + A e^{-\beta t} + B e^{-\gamma t}, \quad (2.34)$$

$$I(t) = -A\beta e^{-\beta t} - B\gamma e^{-\gamma t}, \quad (2.35)$$

sendo  $A$  e  $B$  constantes matemáticas quaisquer .

• **exemplo 1b**

Desejamos determinar as funções que descrevem a carga e a corrente em função do tempo, para um circuito no qual não há gerador e cujo capacitor está inicialmente carregado com carga  $Q_i$ , supondo que a chave seja fechada no instante  $t = 0$ .

Neste caso, as condições iniciais são  $Q(t = 0) = Q_i$  e  $I(t = 0) = 0$ . Portanto

$$Q(t = 0) = Q_i \rightarrow A + B = Q_i , \quad (2.36)$$

$$I(t = 0) = 0 \rightarrow A\beta + B\gamma = 0 . \quad (2.37)$$

o que leva a

$$A = \gamma Q_i / (\gamma - \beta) , \quad (2.38)$$

$$B = -\beta Q_i / (\gamma - \beta) . \quad (2.39)$$

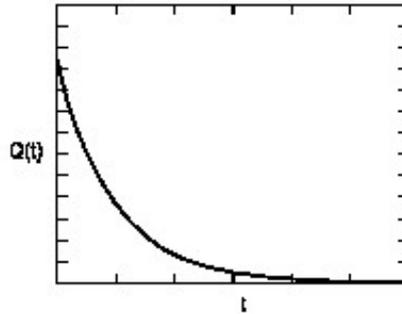


Figura 2.3: a) A carga  $Q$  no capacitor e b) a corrente  $I$  em função do tempo  $t$ , para um circuito  $RLC$  série sem fonte no caso em que  $R^2 > 4L/C$

As funções desejadas são, portanto,

$$Q(t) = \frac{Q_i}{\gamma - \beta} (\gamma e^{-\beta t} - \beta e^{-\gamma t}) , \quad (2.40)$$

$$I(t) = \frac{-\beta\gamma Q_i}{\gamma - \beta} (e^{-\beta t} - e^{-\gamma t}) , \quad (2.41)$$

com  $\beta$  e  $\gamma$  dados pela eq. (2.31). Como as constantes  $\beta$  e  $\gamma$  têm valores positivos, a carga  $Q$  e a corrente  $I$  decrescem exponencialmente com o tempo, como mostra a Fig. 2.3. Como a resistência é grande, a dissipação ocorre rapidamente. Sistemas nesta condição são chamados de superamortecidos.

• **caso 2:**  $R^2 = \frac{4L}{C} \rightarrow \Delta = 0$

Quando o discriminante é nulo, o sistema é chamado de criticamente amortecido e a solução geral da equação diferencial (2.15) tem a forma

$$q(t) = (A + Bt)e^{-\alpha t} , \quad (2.42)$$

sendo

$$\alpha = \frac{R}{2L} . \quad (2.43)$$

Assim, as soluções genéricas do problema são

$$Q(t) = CV + (A + Bt)e^{-\alpha t}, \quad (2.44)$$

$$I(t) = [B + \alpha(A + Bt)]e^{-\alpha t}. \quad (2.45)$$

### • exemplo 2

Consideramos, novamente, o problema de encontrar  $Q(t)$  e  $I(t)$  para um circuito sem fonte, com um capacitor carregado com carga  $Q_0$ , cuja chave foi fechada no instante  $t = 0$  que corresponde às condições iniciais  $Q(t = 0) = Q_i$ ,  $I(t = 0) = 0$ . Assim,

$$Q(t = 0) = Q_i \rightarrow A = Q_0 \quad (2.46)$$

$$I(t = 0) = 0 \rightarrow B = +\alpha Q_i \quad (2.47)$$

e, portanto,

$$Q(t) = Q_i \left( 1 + \frac{R}{2L} t \right) e^{-(R/2L)t}, \quad (2.48)$$

$$I(t) = -Q_i \left[ \left( \frac{R}{2L} \right)^2 t \right] e^{-(R/2L)t}. \quad (2.49)$$

Neste caso, não há oscilação e a carga no capacitor decresce continuamente, tendendo a zero após um tempo grande, como mostra a Fig. 2.4.

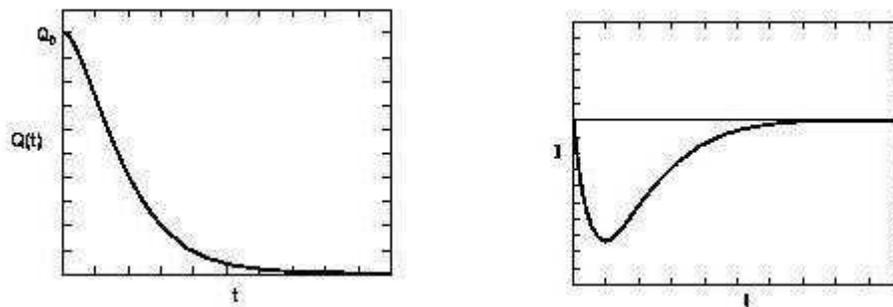


Figura 2.4: a) A carga  $Q$  no capacitor e b) a corrente  $I$ , em função do tempo  $t$ , para um circuito  $RLC$  série, sem fonte, no caso em que  $R^2 = 4L/C$ .

### • exercícios

1. Mostre que a função  $Q(t)$ , dada pela eq. (2.23), satisfaz a equação diferencial (??) para quaisquer valores de  $\rho$  e  $\theta$ .

2. Mostre que a função  $I(t)$ , dada pela eq. (2.28), pode ser reescrita como

$$I(t) = \frac{-Q_0}{\sqrt{LC - R^2C^2/4}} e^{-\alpha t} \sin \nu t .$$

3. Mostre que a constante  $\beta$ , dada pela eq. (2.31), é positiva.

4. Mostre que as funções  $Q(t)$ , dadas pelas eqs. (2.32) e (2.42), satisfazem a equação diferencial do circuito para quaisquer valores de  $A$  e  $B$ .

5. É dado um circuito  $RLC$ , ligado a uma fonte de tensão  $V$ , constante, como na figura 2.1. Supondo que o capacitor esteja descarregado e que a chave seja fechada no instante  $t = 0$ ,

a) determine, para  $4LC > R^2$ , as funções que descrevem a carga no capacitor e a corrente no circuito em função do tempo;

b) o que acontece com o sistema para tempos muito grandes?

6. Para a situação descrita no exercício anterior, determine, para tempos muito grandes,

a) a energia acumulada no capacitor;

b) a energia acumulada no indutor;

c) a energia dissipada no resistor;

d) a energia fornecida pela fonte.

**Sugestão:** procure as integrais relevantes em uma tabela; ou, o que é mais fácil e elegante, efetue as integrais usando  $\sin \phi = (e^{i\phi} - e^{-i\phi})/2i$ .

### • respostas

5. a)  $Q(t) = CV [1 - e^{-\alpha t} (\cos \nu t + \frac{\alpha}{\nu} \sin \nu t)]$ ,  $I(t) = \frac{V}{L\nu} e^{-\alpha t} \sin \nu t$ .

b) o capacitor fica carregado com carga  $Q(t \rightarrow \infty) = CV$  e a corrente se anula.

6. a)  $\frac{1}{2} CV^2$ ; b) zero; c)  $\int_0^\infty RI^2 dt = \frac{1}{2} CV^2$ ; d)  $\int_0^\infty VI dt = CV^2$ .

# Capítulo 3

## circuitos LC, RL, RC

Todos os circuitos eletromagnéticos reais apresentam efeitos resistivos, indutivos e capacitivos. Entretanto, em algumas situações particulares, um ou mais destes efeitos, por serem pouco significativos, podem ser ignorados. Nesta aula, estudamos alguns casos particulares, em que um dos elementos do circuito  $RLC$  em série pode ser desprezado.

### • circuito LC

Um circuito  $RLC$  em série, com fonte de tensão constante e com uma resistência muito pequena, que pode ser ignorada, é descrito matematicamente, fazendo  $R \rightarrow 0$  na equação (2.7). Temos, então

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = V. \quad (3.1)$$

A classe geral de soluções desta equação diferencial é dada por

$$Q(t) = CV + \rho \cos(\nu t - \theta) \quad (3.2)$$

e a frequência de oscilação  $\nu$  pode ser obtida pela substituição da expressão (3.2) na equação diferencial (3.1). Assim,

$$\nu = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (3.3)$$

A corrente no circuito  $LC$  é dada por

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -\rho \nu \sin(\nu t - \theta). \quad (3.4)$$

Os resultados acima também podem ser determinados a partir das expressões para o circuito  $RLC$  estudado na aula anterior. Quando a resistência é nula, de acordo com

(2.10), o discriminante é um número negativo, dado por  $\Delta = -4L/C$ . Portanto, para um circuito  $LC$ , a frequência de oscilação, a carga do capacitor, a corrente, podem ser obtidas fazendo  $R = 0$ , respectivamente, nas expressões (2.15), (2.23) e (2.24).

### • exemplo 1

É dado um circuito  $LC$ , sem fonte de tensão, com uma chave aberta, como representado na Fig. 3.1, no qual o capacitor está carregado com carga  $Q_i$ . No instante  $t = 0$ , a chave é fechada. O nosso objetivo é determinar os comportamentos de cargas, correntes, campos e energias desse circuito, em função do tempo.

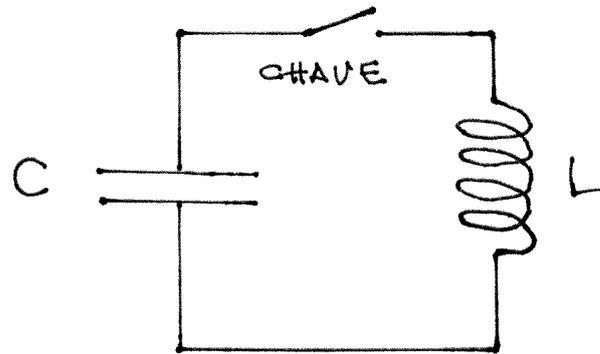


Figura 3.1: Esquema de um circuito  $LC$  sem fonte.

As condições iniciais para este circuito são  $Q(t = 0) = Q_i$  e  $I(t = 0) = 0$ . Impondo estas condições às expressões (3.2) e (3.4) e lembrando que, neste caso,  $V = 0$ , obtemos

$$\rho = Q_i \quad \text{e} \quad \theta = 0 \quad (3.5)$$

Assim, a carga no capacitor e a corrente no sistema são dadas por

$$Q(t) = Q_i \cos(\nu t) , \quad (3.6)$$

$$I(t) = -Q_i \nu \sin(\nu t) . \quad (3.7)$$

Estes resultados mostram que, a carga e a corrente permanecem oscilando indefinidamente, com frequência  $\nu = \sqrt{1/LC}$ . Isso ocorre porque, se não há resistência, a energia, que estava inicialmente no capacitor, não tem como escapar do sistema. As eqs. (3.6) e (3.7) mostram, também, que carga e corrente estão fora de fase. A Fig. 3.2 mostra os comportamentos dessas grandezas neste circuito  $LC$ .

Como já foi enfatizado anteriormente, uma figura como a 3.1 **não** representa uma fotografia do circuito. Ela indica, em linguagem conceitual, *que* o circuito é capaz de armazenar energias em campos elétricos e magnéticos. Entretanto, ela não fornece nenhuma pista

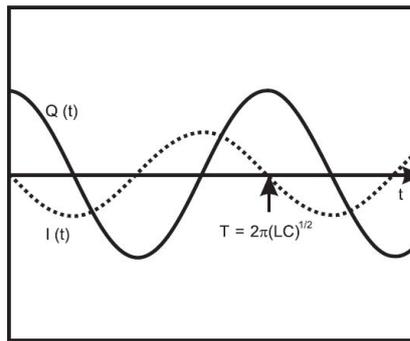


Figura 3.2: A carga  $Q(t)$  no capacitor e a corrente  $I(t)$  no circuito  $LC$  sem fonte.

acerca dos lugares onde esses campos estão, já que ela não menciona as formas e dimensões dos vários componentes. Por exemplo, os campos seriam diferentes se o capacitor fosse plano ou cilíndrico ou se o indutor fosse cilíndrico ou toroidal.

Em geral, um circuito é eletricamente neutro, já que o número total de íons positivos no seu interior é igual ao número total de elétrons livres. Os íons estão fixos em estruturas bastante rígidas, enquanto que os elétrons livres podem se mover de um lado para outro, pela ação de campos elétricos externos. Por isso, em algumas situações excessos de elétrons livres podem aparecer nas superfícies do metal. Quando isso acontece, a neutralidade global do circuito faz com que excessos de cargas positivas apareçam, simultaneamente, em outras regiões da superfície metálica.

É algo desse tipo que acontece no circuito deste exemplo, antes de a chave ser fechada. A informação que o capacitor está inicialmente carregado com carga  $Q_i$  significa que uma das superfícies do capacitor tem um excesso de elétrons que corresponde a uma carga total  $-Q_i$  e a superfície oposta, uma falta de elétrons, que corresponde a uma carga total  $+Q_i$ . Essas cargas dão origem a campos elétricos em torno delas. Esses campos são mais intensos na região entre as placas, mas existem também fora do capacitor, tanto no interior como no exterior dos demais fios metálicos do sistema. A chave aberta funciona como um segundo capacitor. Para nos convencer disso, basta lembrar que um capacitor corresponde a uma interrupção do circuito, onde cargas podem se acumular.

A chave aberta possui, portanto, uma capacitância  $C'$ , que depende das suas características geométricas. Assim, o circuito deste exemplo com a chave aberta corresponde à situação mostrada na Fig. 3.3. Para desenhar a figura, escolhemos uma configuração de cargas para o capacitor  $C$  e esta determina a configuração de cargas da chave aberta. Como esses dois sistemas geram campos que tendem a mover os elétrons do fio em direções opostas o resultado é uma corrente nula. O fenômeno é intuitivo, mas a explicação, nem tanto ...

Quando a chave é fechada, temos a situação mostrada na Fig. 3.4, sendo que a carga no capacitor é, nesse instante,  $Q_0$ . Essas cargas criam campo elétrico em todo o espaço.

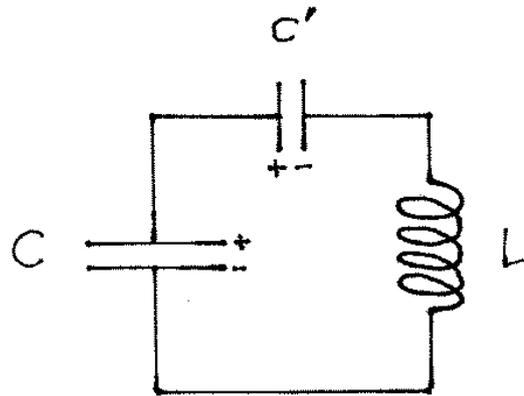


Figura 3.3: O circuito, a chave aberta equivale a um segundo capacitor ( $C'$ ).

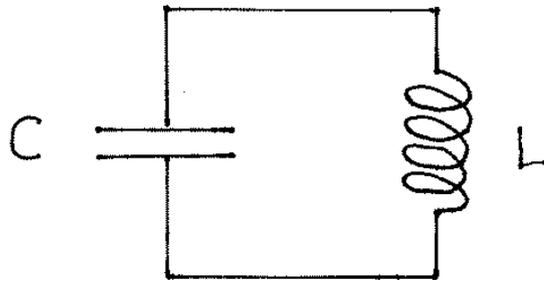


Figura 3.4: Esquema de um circuito  $LC$  com a chave fechada.

Normalmente, não prestamos muita atenção aos campos existentes nas regiões externas ao capacitor, mas eles são muito importantes. A tendência do capacitor é começar a se descarregar e, para tanto, é preciso que os elétrons livres em todas as regiões do circuito se ponham em movimento, mesmo os existentes no interior do fio que constitui o indutor ou dos fios que o conectam ao capacitor. É o campo elétrico existente fora do capacitor que, como um maestro de orquestra, passa a reger simultaneamente os movimentos de todos os elétrons livres do sistema, independentemente de onde eles estejam.

O descarregamento do capacitor requer necessariamente, devido à equação da continuidade, o surgimento de uma corrente nas partes metálicas do circuito. Essa corrente determina o aparecimento de campos magnéticos, descritos pela lei de Ampère. Como a corrente varia com o tempo, o mesmo acontece com o campo magnético e, de acordo com a lei de Faraday, aparecem novos campos elétricos, tanto no interior como no exterior do indutor. Esses campos também agem nos elétrons livres existentes no interior das partes metálicas do circuito. Por isso, as correntes no sistema resultam da competição entre dois campos elétricos de origens diferentes:

- o campo do capacitor  $\vec{E}_C$ , proporcional a  $Q$ ;

- o campo do indutor  $\vec{E}_{IND}$ , proporcional a  $dI/dt$ .

As expressões de  $Q(t)$  (3.6) e  $I(t)$  (3.7) permitem-nos calcular as energias  $U_C$  e  $U_L$  armazenadas, respectivamente, no capacitor e no indutor. Elas são dadas por

$$U_C = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2(\nu t), \quad (3.8)$$

$$U_L = \frac{LI^2}{2} = \frac{LQ_0^2}{2} \nu^2 \sin^2(\nu t) = \frac{Q_0^2}{2C} \sin^2(\nu t). \quad (3.9)$$

A energia total  $U_T$  do sistema corresponde à soma das energias elétrica  $U_C$  e magnética  $U_L$  e vale

$$U = U_C + U_L = \frac{Q_0^2}{2C}. \quad (3.10)$$

As expressões acima mostram que, inicialmente, toda a energia do sistema está no capacitor e, à medida que o tempo passa, há uma oscilação entre a energia elétrica armazenada no capacitor e a energia magnética, no indutor. A energia total do sistema permanece constante, com valor igual ao da energia inicial. Este sistema é conservativo, pois não há resistência no circuito, e, portanto não pode ocorrer dissipação de energia. A Fig. 3.5 representa o comportamento das energias elétrica, magnética e total em um oscilador  $LC$ , em função do tempo.

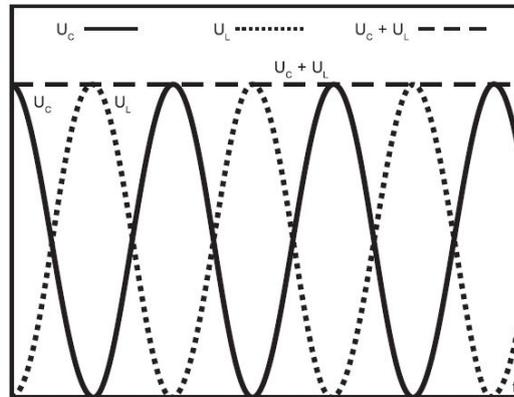


Figura 3.5: As energias armazenadas no capacitor ( $U_C$ ), no indutor ( $U_L$ ) e a energia total ( $U_T$ ) de um oscilador  $LC$ .

### • circuito RL

Fisicamente, um capacitor pode ser eliminado de um circuito colocando “em curto” os dois condutores que o compõem. Nesta situação, a capacitância  $C$  passa a ter valor infinito e a eliminação do capacitor do circuito  $RLC$  é feita tomando o limite  $C \rightarrow \infty$  (e não  $C \rightarrow 0!$ ) na equação (??), para o circuito  $RLC$ . A equação diferencial do circuito  $RL$  é, então dada por

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} = V. \quad (3.11)$$

Para este sistema,  $Q(t)$  deixa de ter o significado de carga no capacitor, como nos casos anteriores pois este foi eliminado. O que tem sentido físico é a corrente  $dQ/dt$  no circuito. É conveniente, por isso, reescrever a equação (3.11) como

$$\frac{L}{R} \frac{dI}{dt} + I = \frac{V}{R}. \quad (3.12)$$

Como estamos tratando do caso em que  $V$  é constante, é possível, através de uma mudança de variável, chegarmos a uma equação diferencial homogênea. Para tanto, definimos

$$i \equiv I - \frac{V}{R} \quad (3.13)$$

e obtemos

$$\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = 0. \quad (3.14)$$

A classe de soluções dessa equação é dada por

$$i(t) = A e^{-\alpha t} \quad (3.15)$$

onde

$$\alpha = R/L.$$

Assim, a corrente em um circuito  $RL$ , com fonte de tensão constante, é escrita como

$$I(t) = \frac{V}{R} + A e^{-\alpha t}. \quad (3.16)$$

sendo a constante  $A$  determinada pela condição inicial da situação específica.

### • exemplo 2

Um resistor  $R$  e um indutor  $L$  estão ligados em série a uma fonte de tensão constante  $V$ , como mostra a Fig. 3.6. O objetivo deste exemplo é determinar a corrente no circuito e os deslocamentos de energia em função do tempo, supondo que a chave tenha sido fechada no instante  $t = 0$ .

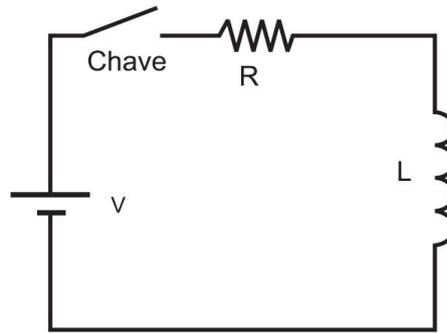


Figura 3.6: Esquema de um circuito  $LR$  com fonte de tensão constante

Para este circuito, a condição inicial é  $I(t = 0) = 0$ . Aplicando-a à eq.(3.16), concluímos que  $A = -V/R$ .

Assim, a corrente neste circuito  $RL$  é dada por

$$I(t) = \frac{V}{R} (1 - e^{-Rt/L}) , \quad (3.17)$$

cujo gráfico está mostrado na figura 3.7.

A potência  $P_V$  fornecida ao sistema pela fonte de tensão é

$$P_V = VI(t) = \frac{V^2}{R} (1 - e^{-Rt/L}) \quad (3.18)$$

e a potência  $P_R$  dissipada no resistor vale

$$P_R = RI^2(t) = \frac{V^2}{R} (1 - e^{-Rt/L})^2 . \quad (3.19)$$

Num dado instante a energia armazenada no indutor é dada por

$$U_L = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L \frac{V^2}{R^2} (1 - e^{-Rt/L})^2 \quad (3.20)$$

e corresponde à potência

$$P_L = \frac{dU_L}{dt} = L I \frac{dI}{dt} = \frac{V^2}{R} (1 - e^{-Rt/L}) e^{-Rt/L} . \quad (3.21)$$

Para tempos muito grandes, o fator  $e^{-Rt/L} \rightarrow 0$  e a corrente tende a um valor constante, dado por  $I(\infty) = V/R$ . Nesta situação, as potências  $P_V$  e  $P_R$  tornam-se iguais, toda a energia fornecida pela fonte é dissipada pelo resistor e o sistema funciona como se o indutor não existisse. Esses resultados indicam que o papel do indutor é mais importante nos instantes imediatamente posteriores ao fechamento da chave, pois é ele o responsável pelo fato de a corrente crescer continuamente a partir do valor inicial nulo.

### • circuito RC

Quando o efeito indutivo de um circuito  $RLC$ , com fonte de tensão constante, é muito pequeno, podemos tomar o limite  $L \rightarrow 0$  na equação diferencial (??) e obtemos

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V. \quad (3.22)$$

A sua solução geral é dada por

$$Q(t) = CV + A e^{-t/RC}, \quad (3.23)$$

onde  $A$  é uma constante determinada pela condição inicial do circuito.

Este resultado também pode ser obtido a partir da solução encontrada na aula anterior, para o caso do circuito  $RLC$  com discriminante  $\Delta = R^2 - 4L/C$  positivo. Para tanto, tomamos o limite  $L \rightarrow 0$  da expressão (2.6) reproduzida a seguir:

$$Q(t) = CV + A e^{-\beta t} + B e^{-\gamma t},$$

com

$$\beta = \frac{R}{2L} - \frac{\sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}, \quad \gamma = \frac{R}{2L} + \frac{\sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}.$$

No limite  $L \rightarrow 0$ , obtemos

$$\beta = \left( \frac{R}{2L} \right) \left( 1 - \sqrt{1 - 4L/R^2C} \right) \rightarrow \frac{1}{RC}, \quad (3.24)$$

$$\gamma = \left( \frac{R}{2L} \right) \left( 1 + \sqrt{1 - 4L/R^2C} \right) \rightarrow \frac{R}{L} \rightarrow \infty, \quad (3.25)$$

utilizando o resultado proveniente da expansão em série de Taylor  $(1 - \epsilon)^{1/2} \approx 1 - \epsilon/2$ , válido para  $\epsilon \ll 1$ .

Assim, a carga e a corrente neste circuito são dadas por

$$Q(t) = CV + A e^{-t/RC}, \quad (3.26)$$

$$I(t) = -\frac{A}{RC} e^{-t/RC}. \quad (3.27)$$

### • exemplo 3

É dado um circuito  $RC$  alimentado por uma bateria, como mostra a Fig. 3.7. Supondo que o capacitor esteja descarregado e que no instante  $t = 0$  a chave seja fechada, desejamos determinar, em função do tempo, a carga no capacitor, a corrente no circuito e os deslocamentos de energia.

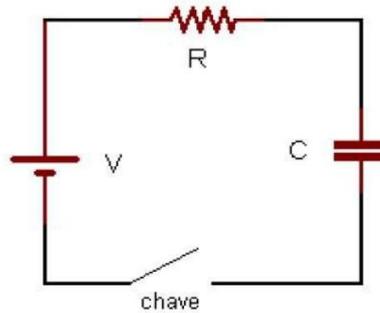


Figura 3.7: Esquema de um circuito  $RC$  com fonte de tensão constante

A condição inicial para este problema é  $Q(t = 0) = 0$ . Aplicando-a na eq.(3.23), obtemos  $A = -CV$ :

$$Q(t) = CV(1 - e^{-t/RC}). \quad (3.28)$$

A corrente é dada por

$$I(t) = \frac{V}{R} e^{-t/RC}. \quad (3.29)$$

Este resultado mostra que, se a indutância for muito pequena, a corrente “pula” imediatamente, do valor  $I = 0$  para  $I = V/R$ , no instante em que a chave é fechada. A partir daí, a carga no capacitor cresce continuamente, até atingir o valor  $Q = CV$ , no qual o sistema se estabiliza. Nessa situação, a corrente se torna nula. Os gráficos das funções  $Q(t)$  e  $I(t)$  estão apresentados na Fig. 3.8.

A energia fornecida pela bateria desde  $t' = 0$  até um instante genérico  $t$ , é dada por

$$U_V = \int_0^t VI(t')dt' = \int_0^t \frac{V^2}{R} e^{-t'/RC} dt' = CV^2 \left(1 - e^{-t/RC}\right) \quad (3.30)$$

e a energia dissipada no resistor vale

$$U_R = \int_0^t RI^2(t)dt = \int_0^t \frac{V^2}{R} e^{-2t/RC} dt = \frac{CV^2}{2} \left(1 - e^{-2t/RC}\right). \quad (3.31)$$

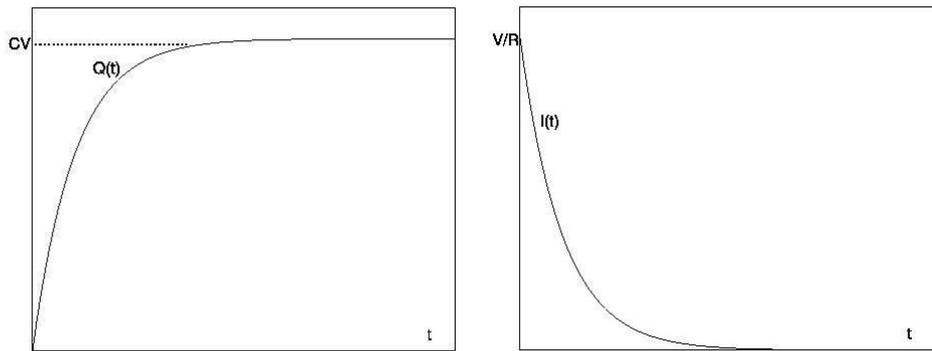


Figura 3.8: a) a carga  $Q$  e b) a corrente  $I$  de um circuito  $RC$  com fonte de tensão constante  $V$ .

A energia armazenada no capacitor no instante  $t$  é

$$U_C = \frac{Q^2(t)}{2} = \frac{CV^2}{2} \left(1 - e^{-t/RC}\right)^2. \quad (3.32)$$

A partir das eqs.(3.30 - 3.32), podemos verificar explicitamente que a relação  $U_V = U_R + U_C$  é válida para qualquer valor de  $t$ . Para tempos muito grandes, metade da energia fornecida pela bateria é dissipada pelo resistor e a outra metade fica armazenada no capacitor.

### • exercícios

1. No caso do circuito  $LC$ , a função  $Q(t)$ , dada pela eq.(3.6), assume, alternadamente, valores positivos e negativos. Qual o significado de um valor negativo para  $Q(t)$ ?
2. Explique o que mudaria qualitativamente, do ponto de vista físico, no comportamento do circuito  $LC$  se nele fosse introduzida uma pequena resistência.
3. Mostre que a grandeza  $T = 2\pi\sqrt{LC}$  tem dimensão de tempo. Em seguida, faça desenhos do circuito  $LC$  indicando a carga, a corrente e as energias elétrica e magnética para os instantes  $t = 0$ ,  $t = T/8$ ,  $t = T/4$ ,  $t = 3T/8$ ,  $t = T/2$ ,  $t = 5T/8$ ,  $t = 3T/4$  e  $t = 7T/8$ .
4. Considere um circuito  $LC$ . O capacitor é formado por duas placas metálicas planas, circulares de raio  $a$ , paralelas, separadas por uma distância  $d \ll a$ , entre as quais há vácuo. O indutor é um solenóide cilíndrico, muito longo, de raio  $b$  e comprimento  $c \gg b$ , com  $n$  espiras por unidade de comprimento. Supondo que o circuito possua uma chave, fechada no instante  $t = 0$ , e que o capacitor esteja inicialmente carregado com carga  $Q_0$ , como no exemplo 1, calcule, em função do tempo:
  - a) o campo elétrico no interior do capacitor;
  - b) a energia elétrica acumulada no interior do capacitor;
  - c) a capacitância  $C$  do capacitor;
  - d) o campo magnético no interior do indutor;

- e) a energia magnética acumulada no interior do indutor;  
 f) a auto-indutância  $L$  do indutor;  
 g) a frequência  $\nu$  de oscilação do circuito;  
 h) mostre que a dimensão de  $\nu$  é  $[tempo]^{-1}$ .

5. No caso do circuito  $RL$ , discutido no exemplo 2, faça um gráfico da corrente  $I(t)$  no circuito e explique porque, para tempos suficientemente grandes, a corrente  $I(t)$  tende ao valor constante  $I = V/R$ .

6. No caso de um circuito  $RC$ , explique porque, decorrido um tempo muito grande, a carga no capacitor tende ao valor constante  $Q = CV$  e a corrente no circuito tende a zero.

7. Considere o circuito  $RC$  discutido no exemplo 3, com o capacitor de placas circulares descrito no exercício 4. Determine, em função do tempo:

- a) o campo elétrico  $E_C$  no interior do capacitor;  
 b) o campo elétrico  $E_R$  no interior do resistor, supondo que ele seja constituído por um fio metálico, de comprimento  $l$ , seção transversal  $S$  e resistividade  $\rho$ ;  
 c) os valores de  $E_C$  e  $E_R$  para tempos muito grandes e interprete-os fisicamente;  
 d) por que o campo  $E_R$  no interior do resistor diminui com o tempo, se a ação da bateria é sempre a mesma?

8. Qual é o procedimento que permite eliminar o efeito capacitivo de um circuito  $RC$ :

- a) do ponto de vista físico?  
 b) do ponto de vista matemático?

### • respostas

4. a)  $E_C = \frac{Q_0}{\pi a^2 \epsilon_0} \cos(\nu t)$     b)  $U_C = \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{\pi a^2 \epsilon_0} \right] Q_0^2 \cos^2(\nu t)$     c)  $C = \frac{\pi a^2 \epsilon_0}{d}$

d)  $B_L = -\mu_0 n \nu Q_0 \sin(\nu t)$     e)  $U_B = \frac{1}{2} \left[ \mu_0 n^2 \pi b^2 c \right] \nu^2 Q_0^2 \sin^2(\nu t)$

f)  $L = \mu_0 n^2 \pi b^2 c$     g)  $\nu = \frac{1}{\pi n ab} \sqrt{\frac{d}{\mu_0 \epsilon_0 c}}$

7.a)  $E_C = \frac{CV}{\pi a^2 \epsilon_0} \left( 1 - e^{-t/RC} \right) = \frac{V}{d} \left( 1 - e^{-t/RC} \right)$     b)  $E_R = \rho j = \frac{\rho V}{SR} e^{-t/RC} = \frac{V}{l} e^{-t/RC}$

8. a) juntar uma das placas à outra;

b) matematicamente tomando  $C \rightarrow \infty$ . Neste limite, para qualquer  $t$  finito, temos

$e^{-t/RC} \rightarrow 0$ . Nesta situação, a carga  $Q(t)$  do capacitor é nula e a corrente  $I(t)$  é igual a  $V/R$ , para qualquer instante. Este caso, corresponde a um resistor ligado a uma fonte de tensão constante  $V$ .

# Capítulo 4

## circuitos com corrente alternada

### Introdução

Nesta aula, estudamos o caso de um circuito RLC em série, ligado a uma fonte cuja tensão varia com o tempo. Consideramos apenas o caso em que a função  $V(t)$  é dada por

$$V(t) = V_0 \cos \omega t \quad (4.1)$$

e oscila, portanto, com frequência bem definida. Esta escolha não envolve perda de generalidade no tratamento do problema pois, segundo o teorema de Fourier, uma função qualquer dependente do tempo  $F(t)$  pode sempre ser expressa na forma

$$F(t) = \int_0^{\infty} d\omega [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t], \quad (4.2)$$

onde  $a(\omega)$  e  $b(\omega)$  são funções que representam as contribuições de cada frequência. Assim, por exemplo, as duas funções mostradas na Fig. 4.1 podem ser representadas pela eq.(4.2), desde que as funções  $a(\omega)$  e  $b(\omega)$  sejam adequadamente escolhidas para cada caso.

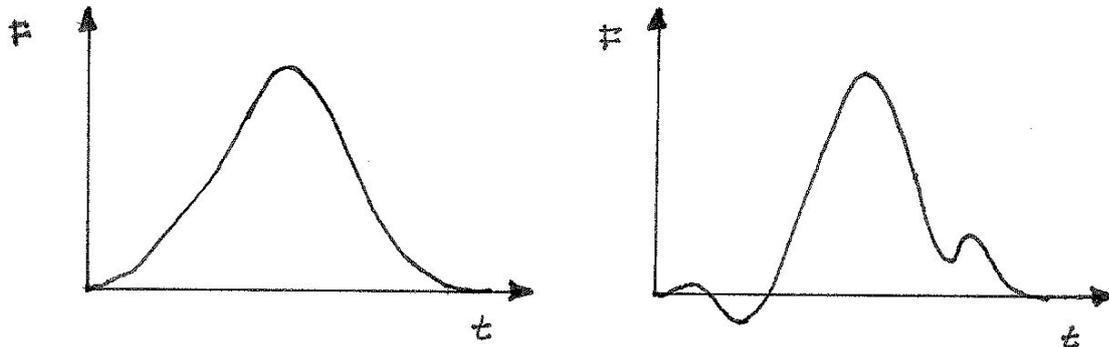


Figura 4.1: Exemplos de funções  $F(t)$ .

### • circuito RLC em série

Consideramos o circuito mostrado na Fig. 4.2, cujo comportamento temporal é regido pela equação diferencial

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_0 \cos \omega t \quad (4.3)$$

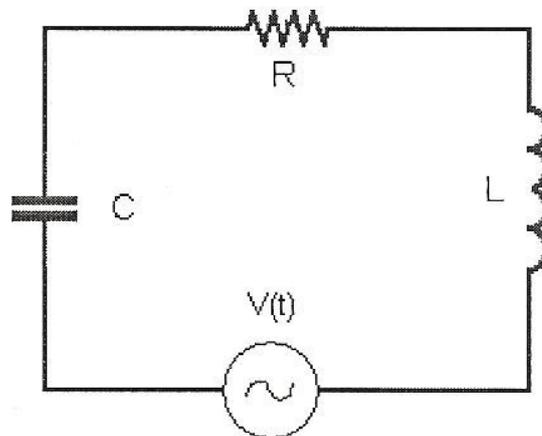


Figura 4.2: Circuito RLC série ligado a uma fonte de tensão que varia com o tempo.

Esta equação diferencial é não homogênea, já que o seu lado direito é não nulo. Da matemática, sabe-se que a solução geral de uma equação diferencial desse tipo é dada pela soma da solução geral da equação homogênea (H) com uma solução particular da equação não homogênea (NH). Por isso, representamos a solução geral por

$$Q(t) = Q_H(t) + Q_{NH}(t). \quad (4.4)$$

Usando esta decomposição, reescrevemos a equação diferencial do sistema como

$$\left[ L \frac{d^2 Q_H}{dt^2} + R \frac{dQ_H}{dt} + \frac{Q_H}{C} \right] + \left\{ L \frac{d^2 Q_{NH}}{dt^2} + R \frac{dQ_{NH}}{dt} + \frac{Q_{NH}}{C} \right\} = [0] + \{V_0 \cos \omega t\}. \quad (4.5)$$

Esta expressão mostra que a equação diferencial do circuito pode ser considerada como a soma de duas equações diferenciais. A primeira delas, representada envolve apenas  $Q_H$  e corresponde a um circuito sem fonte de tensão, estudado nas aulas anteriores. A outra equação envolve  $Q_{NH}$  é o objeto desta aula.

### • oscilações forçadas

Tal como está escrita, a equação (4.5) não contém nenhuma informação acerca do instante em que a fonte externa foi acionada e por quanto tempo ela continuará atuando. Na prática, a equação (4.5) é utilizada para descrever fontes que permanecem ligadas por tempos longos comparado a outros tempos característicos do sistema. Quando um sistema qualquer, seja ele mecânico ou elétrico, oscila sob a ação de agente externo, com frequência bem definida, falamos em oscilações forçadas. Uma característica importante das oscilações forçadas é que, para tempos longos, elas ocorrem sempre com a frequência da fonte externa. Os comportamentos das funções  $Q(t)$  para dois osciladores com valores de  $R$ ,  $L$  e  $C$  diferentes, mas sujeitos à *mesma* fonte de tensão, poderiam ser os mostrados na Fig. 4.3.

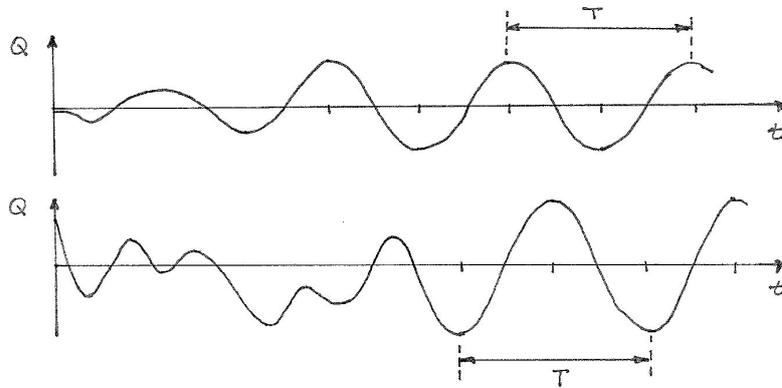


Figura 4.3:  $Q(t)$  para dois osciladores com valores de  $R$ ,  $L$  e  $C$  diferentes, mas submetidos à mesma fonte de tensão cosseinoidal.

No caso do circuito da Fig. 4.2, a função  $Q_H(t)$  somente é importante durante um intervalo relativamente curto de tempo e, por isso, é chamada de **solução transitória**. De fato, as expressões obtidas na aula 2 mostram que, quando a resistência é não nula,  $Q_H(t)$  é proporcional a  $e^{-tR/2L}$ , o que faz com que a solução homogênea tenda a zero para tempos grandes. Como indica essa exponencial, o tempo de amortecimento total do sistema será tão menor quanto maior for a resistência. A função  $Q_{NH}(t)$ , por outro lado, corresponde à solução **estacionária**, já que só ela sobrevive depois de muito tempo que o sistema foi ligado.

Assim, para  $t \gg 2L/R$

$$\begin{aligned} Q_H(t) &\rightarrow 0, \\ Q(t) &= Q_H(t) + Q_{NH}(t) \rightarrow Q_{NH}(t). \end{aligned}$$

### • a solução da equação não homogênea

A equação não homogênea é escrita como

$$L \frac{d^2 Q_{NH}}{dt^2} + R \frac{dQ_{NH}}{dt} + \frac{Q_{NH}}{C} = V_0 \cos \omega t. \quad (4.6)$$

Como a fonte externa impõe a sua frequência de oscilação ao circuito, a forma geral da solução não homogênea é

$$Q_{NH}(t) = Q_0 \cos(\omega t - \phi), \quad (4.7)$$

onde os valores das constantes  $Q_0$  e  $\phi$  podem ser determinados impondo que  $Q_{NH}(t)$  obedeça, a eq.(4.6).

Fazendo isso, obtemos

$$Q_0 \left[ \left( -L\omega^2 + \frac{1}{C} \right) \cos(\omega t - \phi) - R\omega \sin(\omega t - \phi) \right] = V_0 \cos \omega t. \quad (4.8)$$

Expandindo as funções trigonométricas, temos

$$\begin{aligned} Q_0 \left\{ \left[ \left( -L\omega^2 + \frac{1}{C} \right) \cos \phi + R\omega \sin \phi \right] - V_0 \right\} (\cos \omega t) \\ + Q_0 \left[ \left( -L\omega^2 + \frac{1}{C} \right) \sin \phi - R\omega \cos \phi \right] (\sin \omega t) = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Para que esta equação possa ser verdadeira para qualquer valor de  $t$ , é preciso que os coeficientes do  $(\cos \omega t)$  e do  $(\sin \omega t)$  sejam nulos independentemente. O fato de o coeficiente do  $(\sin \omega t)$  ser nulo determina o valor de  $\phi$ , através da sua tangente

$$\operatorname{tg} \phi = -\frac{R\omega}{(L\omega^2 - \frac{1}{C})}. \quad (4.10)$$

As relações trigonométricas usuais permitem-nos escrever

$$\sin \phi = -\frac{R\omega}{[(L\omega^2 - \frac{1}{C})^2 + (R\omega)^2]^{1/2}}, \quad (4.11)$$

$$\cos \phi = \frac{(L\omega^2 - \frac{1}{C})}{[(L\omega^2 - \frac{1}{C})^2 + (R\omega)^2]^{1/2}}. \quad (4.12)$$

Usando estes resultados na equação que iguala o coeficiente do  $(\cos \omega t)$  a zero, determinamos a amplitude da solução não homogênea

$$Q_0 = \frac{V_0}{[(L\omega^2 - \frac{1}{C})^2 + (R\omega)^2]^{1/2}}. \quad (4.13)$$

Estes resultados especificam completamente a solução da equação não homogênea em função das características do circuito.

Para tornar mais transparente o conteúdo físico desses resultados é conveniente escrevê-los em termos de  $\nu$ , a chamada frequência “natural” do sistema. Esta é a frequência na qual este sistema oscilaria caso não houvesse resistência ( $R=0$ ) e a fonte externa estivesse desligada ( $V_0 = 0$ ). Nesta situação temos o circuito  $LC$ , discutido na aula 3, cuja frequência de oscilação é  $\nu = \sqrt{1/LC}$  (eq. 3.3). A capacitância  $C$  pode ser expressa em função de  $L$  e  $\nu$  como  $1/C = L\nu^2$  e as eqs.(4.10) e (4.13) podem ser reescritas como

$$\text{tg } \phi = -\frac{R\omega}{[L(\omega^2 - \nu^2)]}, \quad (4.14)$$

$$Q_0 = \frac{V_0}{[L^2(\omega^2 - \nu^2)^2 + R^2\omega^2]^{1/2}}. \quad (4.15)$$

Em resumo, a solução geral  $Q(t)$  do circuito  $RLC$  com fonte externa oscilante é dada pela eq.(4.4), sendo que a componente  $Q_H(t)$  depende das condições iniciais do sistema e foi discutida nas aulas 2 e 3. Essa função tem vida efêmera e torna-se constante para tempos grandes. A componente  $Q_{NH}(t)$ , por outro lado, descreve a situação estacionária, existente depois de muito tempo de o sistema ter sido ligado. Ela é determinada pela eq.(4.7), onde  $\omega$  é a frequência da fonte externa e as constantes  $Q_0$  e  $\phi$  são dadas pelas eqs.(4.10) e (4.13) ou, alternativamente, por (4.14) e (4.15).

Estes dois últimos resultados são muito interessantes, pois eles indicam que o comportamento do sistema resulta de um compromisso entre duas frequências diferentes:  $\nu$ , a frequência própria de oscilação do sistema e  $\omega$ , a frequência da fonte externa. Usando uma linguagem livre, eles representam um compromisso entre a “vontade” da fonte externa, que dá as ordens, e a “vontade” do circuito, que tem de obedecer a estas ordens.

A corrente no sistema é

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = I_H(t) + I_{NH}(t), \quad (4.16)$$

sendo  $I_H(t)$  as correntes discutidas nas aulas 2 e 3 e

$$I_{NH}(t) = \frac{dQ_{NH}(t)}{dt} = -Q_0 \omega \text{sen}(\omega t - \phi). \quad (4.17)$$

### • exemplo 1

Estudamos os comportamentos da carga, da corrente e das várias formas de energia do regime estacionário de um circuito  $RLC$  em série, alimentado por uma fonte de tensão  $V = V_0 \cos \omega t$ . Para fixar ideias, consideramos o caso  $\omega < \nu$ .

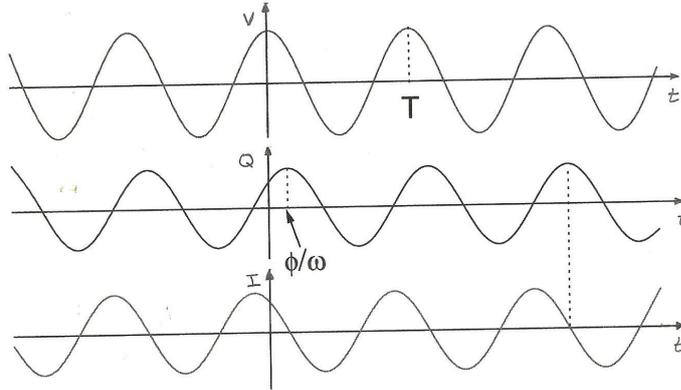


Figura 4.4: A tensão cossenoidal  $V$  de frequência  $\omega$ , a carga  $Q$  e a corrente  $I$  no sistema para  $\omega < \nu$ .

A tensão  $V(t)$  tem período  $T = 2\pi/\omega$  e está representada no alto da Fig. 4.4. A diferença de fase  $\phi$  entre as oscilações da fonte e da carga é dada pela eq.(4.14). Como  $\omega < \nu$ , temos  $\tan \phi > 0$ , o que corresponde a  $0 < \phi < \pi/2$ .

Os comportamentos da carga e da corrente, dadas pelas eqs.(4.15) e (4.17), também estão indicados na Fig. 4.4. É importante notar que, nesta figura, nenhuma das curvas está em fase com as outras duas. A diferença de fase entre  $Q(t)$  e  $I(t)$  é fácil de ser compreendida, pois é devida à derivação efetuada na eq.(4.17). A diferença de fase entre  $V(t)$  e  $Q(t)$ , por outro lado, tem origem dinâmica, como indica a eq.(4.14), que depende da frequência  $\omega$  da fonte, através do fator  $R\omega$  no numerador e de  $[L(\omega^2 - \nu^2)]$ , no denominador. A influência deste último é maior, pois ele pode se anular.

As energias no capacitor  $U_C$  e no indutor  $U_L$  são dadas por

$$U_C(t) = \frac{Q(t)^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2(\omega t - \phi), \quad (4.18)$$

$$U_L(t) = \frac{L I(t)^2}{2} = \frac{Q_0^2 \omega^2}{2C \nu^2} \sin^2(\omega t - \phi), \quad (4.19)$$

e seus gráficos estão mostrados na Fig. 4.5.

As potências associadas ao capacitor e ao indutor são obtidas derivando essas energias

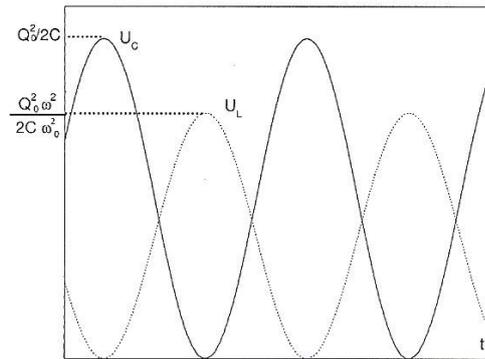


Figura 4.5: Energias armazenadas no capacitor ( $U_C$ ) e no indutor ( $U_L$ ) em função do tempo.

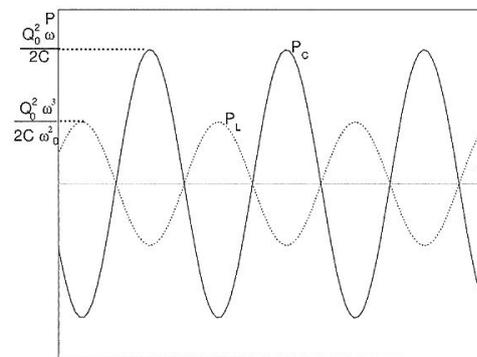


Figura 4.6: Potências fornecidas ao capacitor ( $P_C$ ) e ao indutor ( $P_L$ ).

em relação ao tempo.

$$P_C = \frac{dU_C}{dt} = -\frac{Q_0^2}{C} \omega \cos(\omega t - \phi) \sin(\omega t - \phi) = \frac{-Q_0^2}{2C} \omega \sin[2(\omega t - \phi)], \quad (4.20)$$

$$P_L = \frac{dU_L}{dt} = \frac{Q_0^2}{C} \frac{\omega^3}{\nu^2} \sin(\omega t - \phi) \cos(\omega t - \phi) = \frac{Q_0^2}{2C} \frac{\omega^3}{\nu^2} \sin[2(\omega t - \phi)]. \quad (4.21)$$

Essas funções são mostradas na Fig. 4.6.

A potência dissipada no resistor vale

$$P_R = R I^2(t) = R Q_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - \phi) \quad (4.22)$$

e a potência fornecida ao circuito pela fonte externa é dada por

$$P_V = V(t) I(t) = V_0 \cos \omega t (-Q_0 \omega) \sin(\omega t - \phi). \quad (4.23)$$

Ambas são mostradas na Fig. 4.7.

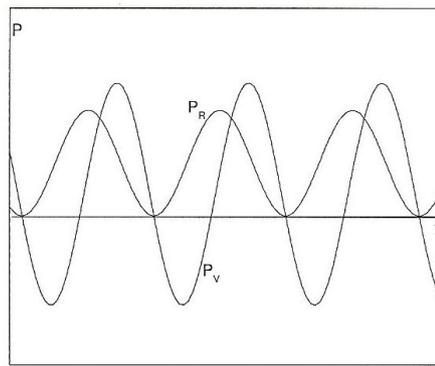


Figura 4.7: Potência  $P_V$  fornecida pela fonte e potência  $P_R$  dissipada no resistor.

• **exercícios:**

1. Mostre que, para um circuito RLC em série com uma fonte de tensão  $V = V_0 \cos \omega t$ , vale a relação  $P_V = P_R + P_C + P_L$  entre as potências associadas aos vários componentes.
2. Qual o significado de valores negativos da potência  $P_V$  fornecida pela fonte, mostrados na figura 4.7?

# Capítulo 5

## ressonância em circuitos com corrente alternada

### • um diálogo entre duas frequências

Na aula 4 mostramos que a carga  $Q(t)$  no capacitor de um circuito RLC, alimentado por uma fonte de tensão do tipo  $V(t) = V_0 \cos \omega t$ , é dada pela soma de dois termos

$$Q(t) = Q_H(t) + Q_{NH}(t) ,$$

onde  $Q_H(t)$  descreve o regime transitório e  $Q_{NH}(t)$ , o regime estacionário. Em circuitos reais, a solução  $Q_H(t)$  tende rapidamente a uma constante após o sistema ser acionado e, a partir daí, apenas  $Q_{NH}(t)$  sobrevive. Essa componente tem a forma geral

$$Q_{NH}(t) = Q_0 \cos(\omega t - \phi) , \quad (5.1)$$

onde

$$Q_0 = \frac{V_0}{[L^2(\omega^2 - \nu^2)^2 + R^2 \omega^2]^{1/2}} \quad (5.2)$$

$$\text{tg } \phi = -\frac{R\omega}{L(\omega^2 - \nu^2)} , \quad (5.3)$$

sendo  $\nu = \sqrt{1/LC}$  a frequência natural do sistema. A corrente no regime estacionário é

$$I_{NH}(t) = -I_0 \text{sen}(\omega t - \phi) , \quad (5.4)$$

com  $I_0 = \omega Q_0$ .

Esses resultados indicam que as amplitudes  $Q_0$  e  $I_0$ , da carga e da corrente, e a fase  $\phi$ , entre a carga e a fonte, dependem de duas frequências diferentes. Uma delas é  $\omega$ , que

representa a frequência com a qual a fonte externa oscila e a outra é  $\nu$ , determinada pelas características dos outros elementos do sistema e que corresponde à frequência natural de oscilação de um circuito  $LC$ .

Em linguagem figurada, podemos pensar que a fonte externa dá “ordens” ao sistema. O sistema, por sua vez, precisa respeitar as suas próprias características para poder obedecer a estas ordens. É por esse motivo que  $Q_0$ ,  $I_0$  e  $\phi$  dependem simultaneamente de  $\omega$  e  $\nu$ . Essas funções representam os compromissos possíveis entre a fonte e o circuito. E, o que é muito importante, são essas funções que regulam as trocas de energia entre a fonte e o restante do sistema, se elas ocorrem, ou não, e com qual eficiência. Nesse aspecto, o circuito  $RLC$  forçado constitui a realização de uma situação muito mais geral.

Por exemplo, num dia claro, você olha pela janela e vê um carro vermelho. Isso indica que, de algum modo, luz vermelha saiu da superfície do carro e chegou até os seus olhos. Por outro lado, você sabe que o carro está sendo iluminado por luz branca, que tem outras componentes, amarela, verde, azul, além da vermelha. A questão básica é, então, saber porque a superfície do carro, que recebe luz de todas as cores, reemite apenas a vermelha. Isso ocorre porque o diálogo energético entre a luz incidente e os pigmentos que recobrem a superfície do carro somente é eficiente para as componentes vermelhas.

De modo geral, trocas eficientes de energia requerem amplitudes  $Q_0$  e  $I_0$  grandes. Por isso, é muito importante compreender como essas grandezas dependem da relação entre  $\omega$  e  $\nu$ . Para um dado circuito, a frequência  $\nu = \sqrt{1/LC}$  é fixa. Por isso, na sequência, estudamos os comportamentos de um único circuito, com fontes de tensão com a mesma amplitude  $V_0$ , mas valores de  $\omega$  diferentes.

Para determinar as características qualitativas da função  $Q_0(\omega)$ , estudamos o seu comportamento para  $\omega = 0$ ,  $\omega \rightarrow \infty$  e, também, no ponto onde ela atinge o seu valor máximo. Usando a expressão (5.2), obtemos

$$Q_0(\omega = 0) = CV_0. \quad (5.5)$$

Fisicamente, este resultado corresponde à idéia de que, no limite em que a frequência tende a zero e a fonte torna-se estática, o regime estacionário envolve apenas um capacitor com carga constante. O limite de altas frequências corresponde a

$$Q_0(\omega \rightarrow \infty) = 0. \quad (5.6)$$

Assim, nesse limite, a carga no circuito não oscila. Isso ocorre porque um sistema físico sempre precisa de um tempo para responder às solicitações externas. Quando a frequência da fonte é muito alta, o sistema é solicitado de modo tão contraditório que não tem tempo de responder e, por isso, a amplitude da oscilação torna-se nula.

Os pontos extremos da função  $Q_0(\omega)$  são dados pela condição

$$\frac{dQ_0(\omega)}{d\omega} = -\frac{\omega V_0[2L^2(\omega^2 - \nu^2) + R^2]}{[L^2(\omega^2 - \nu^2)^2 + R^2\omega^2]^{3/2}} = 0, \quad (5.7)$$

cujas soluções são  $\omega = 0$  ou  $\omega = \omega_M$ , com

$$\omega_M = \sqrt{\nu^2 - \frac{R^2}{2L^2}}. \quad (5.8)$$

Pode-se mostrar que  $\omega_M$  é um ponto de máximo, pois  $d^2Q_0(\omega_M)/d\omega^2 < 0$ . O valor  $\omega = 0$ , discutido na eq.(5.5), não corresponde a um ponto de máximo e o gráfico  $Q_0 \times \omega$  está esboçado na Fig. 5.1.

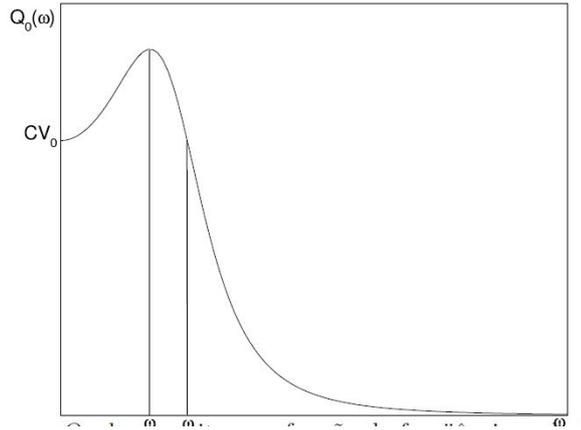


Figura 5.1: A amplitude de carga  $Q_0$  do capacitor em função da frequência  $\omega$  da fonte de tensão.

Para construir o gráfico da amplitude de corrente  $I_0$ , em função da frequência  $\omega$  da fonte, usamos

$$I_0(\omega = 0) = 0, \quad (5.9)$$

o que se explica pelo fato de não poder haver corrente no regime estacionário quando o sistema é alimentado por uma fonte estática. No limite de frequências altas,  $\omega Q_0 \rightarrow 0$  e, portanto,

$$I_0(\omega \rightarrow \infty) = 0. \quad (5.10)$$

Novamente, este resultado decorre da incapacidade do sistema de responder a uma solitação externa que varia muito rapidamente.

A amplitude da corrente tem um máximo, dado pela condição

$$\frac{dI_0}{d\omega} = \frac{d(\omega Q_0)}{dt} Q_0 + \omega \frac{dQ_0}{d\omega} = 0. \quad (5.11)$$

Usando a eq.(5.2) encontramos

$$\begin{aligned} \frac{dI_0}{d\omega} &= \frac{V_0}{[L^2(\omega^2 - \nu^2)^2 + R^2\omega^2]^{1/2}} - \frac{\omega^2 V_0 [2L^2(\omega^2 - \nu^2) + R^2]}{[L^2(\omega^2 - \nu^2)^2 + R^2\omega^2]^{3/2}} \\ &= -\frac{V_0 L^2 (\omega^2 - \nu^2) (\omega^2 + \nu^2)}{[L^2(\omega^2 - \nu^2)^2 + R^2\omega^2]^{3/2}} = 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

A solução desse equação, dada por

$$\omega = \nu, \quad (5.13)$$

determina o ponto de máximo de  $I_0$ , cujo valor é

$$I_0(\omega = \nu) = \frac{V_0}{R}. \quad (5.14)$$

Este resultado mostra que, quando a frequência  $\omega$  da fonte é igual à frequência natural do sistema  $\nu$ , o circuito está na condição de máxima amplitude de corrente. Portanto, o gráfico  $I_0 \times \omega$  tem a forma mostrada na Fig. 5.2

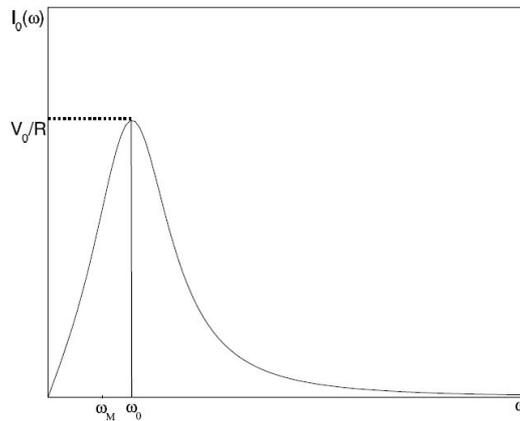


Figura 5.2: A amplitude de corrente  $I_0$  do circuito RLC em função da frequência  $\omega$  da fonte de tensão.

Finalmente, o comportamento da tangente da defasagem  $\phi$  em função de  $\omega$  é mostrado na Fig. 5.3, onde podemos notar uma divergência em  $\omega = \nu$ , que corresponde a  $\phi = \pi/2$ .

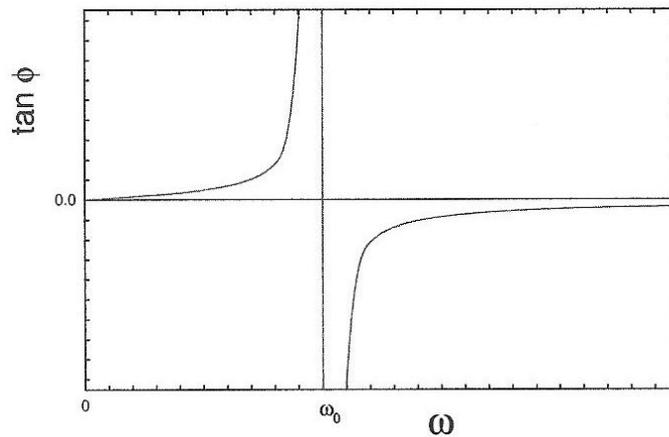


Figura 5.3: Comportamento de  $\tan \phi$  em função da frequência  $\omega$  da fonte.

## • a troca de energia

Para um circuito  $RLC$  forçado, em cada instante, a fonte externa fornece ao sistema uma potência  $P_V = V(t)I(t)$ , o resistor dissipa uma potência  $P_R = RI^2(t)$ , e o capacitor e o indutor contêm energias dadas, respectivamente, por  $U_C = Q^2(t)/2C$  e  $U_L = LI^2(t)/2$ .

De acordo com o princípio de conservação da energia, em cada instante, vale a relação

$$\frac{dU_L}{dt} + P_R + \frac{dU_C}{dt} = P_V. \quad (5.15)$$

Quando substituimos as expressões das energias e potências nesta relação, obtemos novamente a equação diferencial do sistema

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_0 \cos \omega t. \quad (5.16)$$

Este resultado não é surpreendente, uma vez que esta equação diferencial foi obtida, na aula 2, a partir da mesma relação entre potências.

A compreensão dos fluxos de energia no circuito fica mais simples quando consideramos potências médias em um período. Para um dado componente do circuito, a potência média durante um período  $T$  é definida por

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt P(t). \quad (5.17)$$

Usando esta definição, podemos calcular as potências médias relativas a cada elemento.

Em um período, os valores médios de  $\langle P_C \rangle$  e  $\langle P_L \rangle$  são dados por

$$\begin{aligned} \langle P_C \rangle &= \left\langle \frac{dU_C}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \left( \frac{dU_C}{dt} \right) = \frac{1}{T} [U_C(T) - U_C(0)] \\ &= \frac{1}{T} \left[ \frac{Q(T)^2}{2C} - \frac{Q(0)^2}{2C} \right] = 0, \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \langle P_L \rangle &= \left\langle \frac{dU_L}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \left( \frac{dU_L}{dt} \right) = \frac{1}{T} [U_L(T) - U_L(0)] \\ &= \frac{1}{T} \left[ \frac{L I^2(T)}{2} - \frac{L I^2(0)}{2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Esses resultados,  $\langle P_C \rangle = \langle P_L \rangle = 0$ , indicam que, ao longo de um período, existem trocas de energia entre o capacitor e o indutor, mas não existem acúmulos dessas energias, pois  $U_C$  e  $U_L$  são idênticas no início e no fim de cada período. Isso significa que toda a energia fornecida pela fonte durante um período é dissipada pelo resistor.

A potência média fornecida pela fonte, em um período, é dada por

$$\begin{aligned} \langle P_V \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T dt V(t) I(t) = -\frac{1}{T} \int_0^T dt [V_0 \cos \omega t] [Q_0 \omega \sin (\omega t - \phi)] \\ &= \frac{1}{2} V_0 Q_0 \omega \sin \phi = \frac{R V_0^2 \omega^2}{2[L^2(\omega^2 - \nu^2)^2 + R^2 \omega^2]}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

e, usando a eq.(4.11) determinamos a potência média  $\langle P_R \rangle$  dissipada pelo resistor em um período

$$\begin{aligned} \langle P_R \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T dt R I^2(t) = \frac{1}{T} \int_0^T dt R [Q_0 \omega \sin (\omega t - \phi)]^2 \\ &= \frac{1}{2} R Q_0^2 \omega^2 = \frac{R V_0^2 \omega^2}{2[L^2(\omega^2 - \nu^2)^2 + R^2 \omega^2]}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Assim, como esperado,  $\langle P_V \rangle = \langle P_R \rangle$ .

Um aspecto importante do funcionamento de sistemas forçados é que a maneira como a fonte fornece energia a ele depende muito da relação entre  $\omega$ , a frequência da fonte, e  $\nu$ , a sua frequência natural de oscilação. Para analisar as dependências das trocas de energia no sistema com  $\omega$ , consideramos duas grandezas:  $\langle P_V \rangle$  e  $\langle U_V \rangle$ . Esta última é a energia média fornecida ao sistema durante um ciclo e é dada por  $\langle U_V \rangle = T \langle P_V \rangle$ .

A função  $\langle P_V(\omega) \rangle$ , expressa por (5.20), pode ser reescrita como

$$\langle P_V(\omega) \rangle = \frac{1}{2} R I_0^2(\omega). \quad (5.22)$$

Assim, a potência média fornecida ao sistema é muito pequena, tanto para frequências próximas de zero quanto para frequências muito grandes ( $\omega \gg \nu$ ). Para  $\omega = \nu$ ,  $\langle P_V(\omega) \rangle$  atinge seu valor máximo.

Reescrevendo a energia média fornecida pela fonte em cada ciclo como

$$\langle U_V \rangle = \frac{2\pi}{\omega} \langle P_V \rangle, \quad (5.23)$$

podemos notar que o máximo desta função está localizado em frequência diferente de  $\omega_M$  e de  $\nu$ .

## • ressonância

Nesta discussão acerca da dependência das respostas do circuito RLC forçado com a frequência da fonte, vimos que a potência média fornecida ao sistema, representada por  $\langle P_V \rangle$  e dada pela eq.(5.20), é máxima quando  $\nu = \omega$ . Neste caso ocorre uma ressonância entre a fonte e o sistema. Isso significa que, para esta frequência, a transferência de energia da fonte para o sistema é a mais eficiente possível. Assim, quando

a frequência da fonte externa  $\omega$  é igual à frequência natural de oscilação do sistema  $\nu$ , a capacidade da fonte de fornecer energia está a mais ajustada possível à capacidade do sistema de receber tal energia. Na ressonância, a fonte e o sistema estão totalmente afinados.

Na situação de ressonância, a corrente no sistema  $I(t)$  e a fonte estão completamente em fase. Este fato é muito importante do ponto de vista físico e pode ser constatado notando-se que, quando  $\omega = \nu$ , a eq.(5.3) fornece  $\tan \phi_{res} \rightarrow \infty$ , o que significa que  $\phi_{res} = \pi/2$ . Assim, neste caso,

$$I_{res} = -I_0 \text{sen}(\omega t - \pi/2) = I_0 \cos \omega t. \quad (5.24)$$

Esta concordância entre as fases da fonte e da corrente explica a eficiência do processo na ressonância. Ela significa que a fonte sempre “empurra” os eletrons da corrente a favor do seu movimento natural. Nesta situação, fonte e corrente nunca se opõem. É importante notar que esta sintonia total entre  $I(t)$  e  $V(t)$  ocorre somente na ressonância. Se  $\nu \neq \omega$ , então  $\phi \neq \pi/2$  e ora a fonte empurra as cargas a favor da corrente, ora contra a corrente. Para ilustrar o contraste entre essas duas situações, mostramos gráficos representando a tensão  $V$  da fonte (Fig. 5.4), a corrente  $I$  no circuito (Fig.5.5a) e a potência instantânea  $P_V$  (Fig.5.5b), em função do tempo.

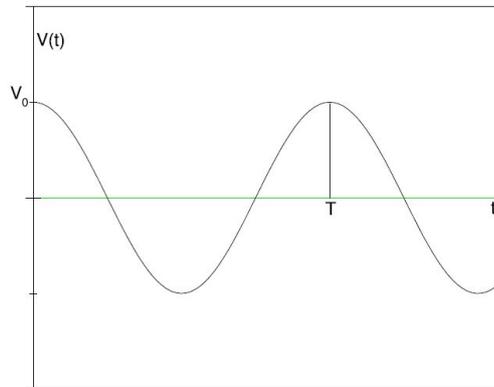


Figura 5.4: Tensão  $V(t)$  da fonte em função do tempo.

Nas Figs. 5.5 são apresentados gráficos da corrente  $I$  e da potência  $P_V$  para os casos de ressonância (linha cheia) e de  $\omega < \nu$  (linha tracejada). A figura descrevendo  $P_V$  é obtida multiplicando  $V(t)$  por  $I(t)$ . Por isso, no caso  $\omega \neq \nu$ , a função  $P_V(t)$  se anula quatro vezes por período, nos pontos em que ou  $V(t) = 0$  ou  $I(t) = 0$ . Isso faz com que, fora da ressonância, tenhamos regiões onde  $P_V(t) > 0$  e outras, onde  $P_V(t) < 0$ . Nas regiões onde  $P_V(t) > 0$ , a fonte fornece energia ao sistema. Quando  $P_V(t) < 0$ , o sistema devolve energia à fonte, o que não ocorre na situação de ressonância quando a fonte e a corrente estão em fase.

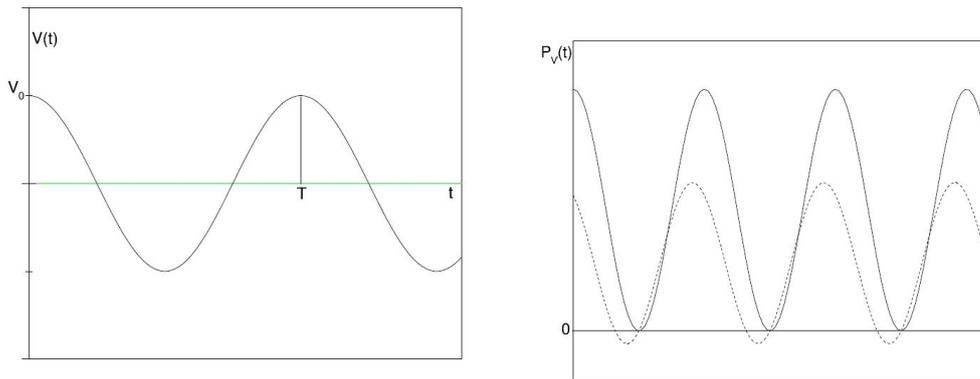


Figura 5.5: (a) Corrente  $I(t)$  que percorre o circuito RLC para uma fase  $\phi$  qualquer (curva tracejada) e para  $\phi = \pi/2$  (curva cheia). (b) Potência fornecida pela fonte em função do tempo para uma frequência  $\omega \neq \nu_0$  (curva tracejada) e para frequência de ressonância  $\omega = \nu_0$  (curva cheia).

### • exercícios

1. Um circuito simples é formado por uma fonte de tensão  $V(t) = V_0 \cos \omega t$  e um resistor de resistência  $R$ . Calcule

- a corrente no sistema, em função do tempo;
- a potência fornecida pela fonte, em função do tempo;
- a potência média, por período, fornecida pela fonte;
- considere, agora, um circuito  $RLC$  em série, ligado à mesma fonte. Supondo que a resistência do resistor seja  $R$  e a capacitância do capacitor seja  $C$ , existe algum valor de  $L$  para o qual a corrente e a potência fornecida pela fonte sejam as mesmas determinadas nos itens anteriores? Caso positivo, qual é esse valor?

2. Determine o ponto de máximo da função  $\langle U_V(\omega) \rangle$  dada na eq.(5.23), seus comportamentos na origem e no infinito e esboce um gráfico que a represente.

### • respostas

1. a)  $I(t) = \frac{V_0}{R} \cos \omega t$ ;    b)  $P_V(t) = \frac{V_0^2}{R} \cos^2 \omega t$     c)  $\langle P_V \rangle = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R}$ ;    d)  $L = \frac{1}{C\omega^2}$ .

2.  $\omega = \sqrt{\nu^2 - \frac{r^2}{\alpha}}$

## Capítulo 6

# circuitos com corrente alternada: impedância

- motivação

Nas aulas anteriores, discutimos o comportamento de um circuito RLC ligado a uma fonte de tensão dependente do tempo, no qual todos os elementos estavam em série. Naquele caso, a equação diferencial que determinava o comportamento temporal do sistema era simples e a solução particular  $Q_{NH}(t)$  da equação não homogênea era relativamente fácil de ser obtida. Entretanto, existem circuitos bastante mais complicados, envolvendo indutores, capacitores e resistores. Como exemplo, temos os mostrados abaixo:

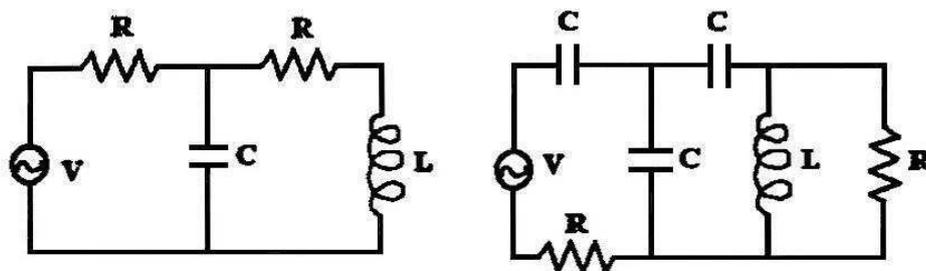


Figura 6.1: Exemplos de circuitos: (a) com duas malhas e (b) com três malhas.

No caso de um circuito genérico, a obtenção da solução particular da equação não homogênea torna-se bastante complicada, devido ao fato de a corrente poder se dividir entre várias malhas. A saída para essa dificuldade é muito inteligente.

No caso de sistemas formados apenas por resistores, sabemos resolver problemas envolvendo várias malhas. Por exemplo, se substituirmos os capacitores na Fig. 6.1 por um resistor  $R_1$  e o indutor por um resistor  $R_2$ , seremos capazes de obter as correntes nos vários trechos associando, gradualmente, os resistores que estão em série ou em paralelo.

Podemos copiar essa idéia e estendê-la a circuitos envolvendo também capacitores e indutores, usando o conceito de *impedância*. As impedâncias são normalmente representadas pela letra  $Z$ . A cada elemento do circuito está associada uma impedância. Assim,  $C \rightarrow Z_C$ ,  $R \rightarrow Z_R$ ,  $L \rightarrow Z_L$ . As regras para tal associação são simples e são dadas na seqüência. Antes de fazer isso, entretanto, vale a pena compreender a essência do método.

Imaginemos, por exemplo, que desejássemos conhecer a corrente que percorre o circuito da Fig. 6.1(a), no regime estacionário. O primeiro passo para resolver esse problema consiste em refazer o desenho usando os símbolos de impedância, como na Fig. 6.2.

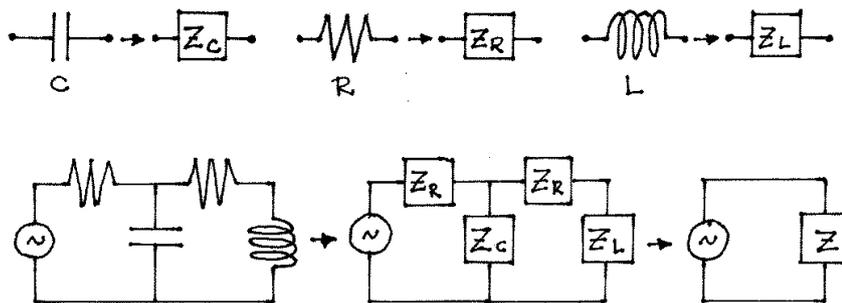


Figura 6.2: A substituição dos elementos do circuito 6.1(a) por impedâncias.

Em seguida, calculamos a impedância equivalente  $Z$ , usando as mesmas regras de associação de resistores, como na Fig. 6.3.

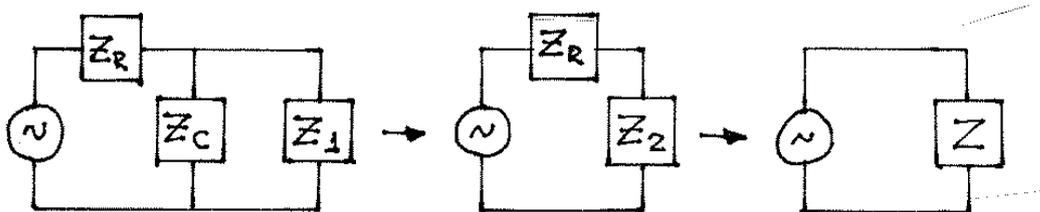


Figura 6.3: As impedâncias nos diferentes trechos do circuito 6.1(a) e a impedância  $Z$  equivalente.

Inicialmente associamos o resistor e o indutor à direita da figura, que estão em série, obtendo

$$Z_1 = Z_R + Z_L. \tag{6.1}$$

Em seguida, associamos  $Z_1$  e  $Z_C$ , que estão em paralelo, e encontramos

$$Z_2 = \frac{Z_C Z_1}{Z_C + Z_1}. \tag{6.2}$$

Finalmente, a associação em série do último resistor com  $Z_2$  fornece a impedância equivalente

$$Z = Z_R + Z_2, \quad (6.3)$$

com  $Z_2$  e  $Z_1$  dadas pelas eqs.(6.2) e (6.1). Assim, calcular impedâncias não é difícil.

Do ponto de vista matemático, impedâncias são grandezas complexas. No começo, isso pode parecer um pouco estranho. Há, entretanto, uma razão física forte para o emprego desse tipo de formalismo, diretamente associada ao fato de o capacitor e o indutor conservarem energia e de o resistor dissipar energia. Nesse sentido, dissipação e conservação representam duas dimensões diferentes do comportamento do sistema. E o emprego de números complexos é conveniente porque esses números bidimensionais são capazes de descrever duas coisas ao mesmo tempo. Antes dos cálculos, revemos rapidamente alguns resultados envolvendo números complexos.

### • números complexos

Números complexos envolvem o símbolo  $i$ , definido pela relação  $i^2 = -1$ . Um número complexo qualquer  $z$  pode ser escrito nas formas cartesiana e polar como

$$z = a + i b \longleftrightarrow z = \rho e^{i\theta}, \quad (6.4)$$

sendo

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}. \quad (6.5)$$

Números complexos envolvem duas dimensões, a real e a imaginária, e podem ser representados em planos. Um exemplo é dado na Fig. 6.4. Dela, podemos concluir diretamente que

$$a = \rho \cos \theta \quad \text{e} \quad b = \rho \operatorname{sen} \theta. \quad (6.6)$$

No caso em que  $\rho = 1$ , encontramos um resultado muito importante,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta. \quad (6.7)$$

O complexo conjugado de  $z$  é representado por  $z^*$  e obtido a partir de  $z$ , trocando o sinal de  $i$ . Assim,

$$z^* = a - i b \longleftrightarrow z^* = \rho e^{-i\theta}. \quad (6.8)$$

A soma de dois números complexos  $z_1 = (a + i b)$  e  $z_2 = (c + i d)$  é dada por

$$z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d) \longleftrightarrow z_1 + z_2 = \rho_1 e^{i\theta_1} + \rho_2 e^{i\theta_2} \quad (6.9)$$

e o seu produto por

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc) \longleftrightarrow z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad (6.10)$$

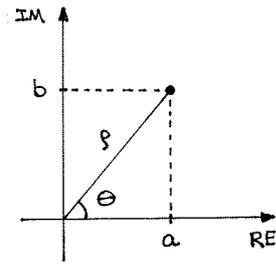


Figura 6.4: Representação em um plano do número complexo da eq.(6.4).

Inspecionando as eqs.(6.14) e (6.15), notamos que a forma cartesiana é mais conveniente para a soma e a forma polar, para o produto.

O inverso de um número complexo pode ser escrito como

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{1}{a + ib} \frac{(a - ib)}{(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \longleftrightarrow \frac{1}{z} = \frac{e^{-i\theta}}{\rho}. \quad (6.11)$$

Finalmente, o quociente de dois números complexos  $z_1 = (a + ib)$  e  $z_2 = (c + id)$  é dado por

$$\frac{z_1}{z_2} = (a + ib) \frac{(c - id)}{(c^2 + d^2)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{(c^2 + d^2)} \longleftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}. \quad (6.12)$$

Nestes casos, também, a forma polar é mais conveniente. No caso da impedância, as informações acerca das partes conservativa e dissipativa do sistema estão contidas nos cálculos.

## • o método das impedâncias

Resolver um circuito consiste em determinar a sua corrente, a partir do conhecimento dos seus componentes e da fonte que o alimenta. No método das impedâncias, toda a informação acerca dos elementos do circuito fica codificada na grandeza  $Z$ .

Quando a fonte física de tensão é descrita pela função  $V(t) = V_0 \cos \omega t$ , a corrente  $I(t)$  no regime estacionário, oscila com a frequência da fonte e tem a forma geral

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \delta). \quad (6.13)$$

Resolver o problema corresponde, portanto, a determinar a amplitude  $I_0$  e a fase  $\delta$ .

No método das impedâncias essas funções são generalizadas para

$$\hat{V}(t) = V_0 e^{i\omega t}, \quad (6.14)$$

$$\hat{I}(t) = I_0 e^{i(\omega t - \delta)}, \quad (6.15)$$

e os acentos circunflexos nas notações  $\hat{V}$  e  $\hat{I}$  indicam que essas funções são complexas.

Em seguida, calculamos a corrente complexa  $\hat{I}(t)$  por meio da relação

$$\hat{V}(t) = Z \hat{I}(t), \quad (6.16)$$

que é a generalização do resultado  $V = RI$ , válido para circuitos envolvendo somente resistores ligados a uma fonte de tensão.

Escrevendo  $Z = |Z|e^{i\delta}$  e usando a eq. (6.7) podemos obter a corrente complexa

$$\hat{I}(t) = \frac{\hat{V}(t)}{Z} \rightarrow \hat{I} = \frac{V_0 e^{i\omega t}}{|Z|e^{i\delta}} \quad (6.17)$$

e portanto,

$$I_0 = \frac{V_0}{|Z|} \quad (6.18)$$

e  $\delta$  é obtida da impedância. Tomando a parte real de  $\hat{I}(t)$ , encontramos a *corrente física*  $I(t)$ , que é a solução desejada, e dado pela eq. (6.4).

**resumo do método:** a análise de um circuito elétrico através do método baseado no conceito de impedância envolve as seguintes etapas:

1. escrever a tensão da fonte como um número complexo;
2. determinar a impedância  $Z$  do circuito;
3. escrever  $\hat{I}(t) = \hat{V}(t)/Z$ ;
4. identificar a corrente física à parte real de  $\hat{I}(t)$ .

Para determinar a impedância de um circuito que contém indutores, capacitores e resistores, precisamos conhecer as impedâncias de cada elemento. Por isso, mais adiante, determinamos  $Z_L$ ,  $Z_C$  e  $Z_R$ , respectivamente, as impedâncias de um indutor, de um capacitor e de um resistor.

## • impedância dos elementos

Para determinar a impedância do indutor, capacitor e resistor, usamos circuitos simples, onde cada um desses elementos está diretamente ligado a uma fonte externa que fornece a tensão  $V(t) = V_0 \cos \omega t$ . Esse cálculo envolve três passos:

- escrevemos a equação diferencial real para o circuito físico;
- efetuamos a generalização complexa, usando

$$V(t) \longrightarrow \hat{V}(t) = V_0 e^{i\omega t}, \quad (6.19)$$

$$I(t) \longrightarrow \hat{I}(t) = I_0 e^{i(\omega t - \delta)}. \quad (6.20)$$

- calculamos  $Z$ , usando a relação

$$Z = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{I}(t)}. \quad (6.21)$$

### • indutor



Figura 6.5: Um indutor ligado a uma fonte de tensão alternada.

A equação diferencial é

$$V(t) = L \frac{dI}{dt}, \quad (6.22)$$

e corresponde à generalização complexa

$$\hat{V}(t) = L \frac{d\hat{I}}{dt} \longrightarrow V_0 e^{i\omega t} = i\omega L I_0 e^{i(\omega t - \delta)}. \quad (6.23)$$

A partir dela, obtemos a expressão para a impedância  $Z_L$  de um indutor

$$Z_L = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{I}(t)} = i\omega L. \quad (6.24)$$

### • capacitor

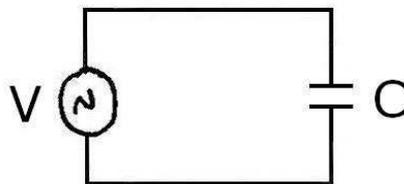


Figura 6.6: Um capacitor ligado a uma fonte de tensão alternada.

A equação para este circuito é

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C}, \quad (6.25)$$

que é generalizada para

$$\hat{V}(t) = \frac{\hat{Q}(t)}{C}. \quad (6.26)$$

A carga  $\hat{Q}(t)$  está relacionada à corrente  $I(t)$  por  $\hat{I}(t) = \frac{d\hat{Q}(t)}{dt}$ . Usando a eq.(6.19), encontramos

$$\hat{Q}(t) = \frac{1}{i\omega C} \hat{I}(t). \quad (6.27)$$

Assim,

$$Z_C = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{I}(t)} = \frac{1}{i\omega C} = \frac{-i}{\omega C}. \quad (6.28)$$

### • resistor

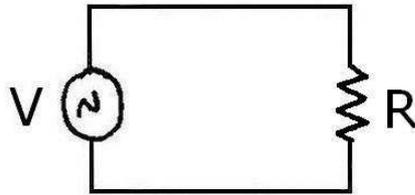


Figura 6.7: Um resistor ligado a uma fonte de tensão alternada.

Para o resistor, podemos escrever

$$V(t) = R I(t) \longrightarrow \hat{V}(t) = R \hat{I}(t) \quad (6.29)$$

e a sua impedância vale

$$Z_R = R. \quad (6.30)$$

**resumo:** as impedâncias do indutor, do capacitor e do resistor são dadas por

$$Z_L = i\omega L, \quad Z_C = \frac{-i}{\omega C}, \quad Z_R = R. \quad (6.31)$$

As impedâncias  $Z_C$  e  $Z_L$ , associadas a elementos que conservam a energia, são imaginárias. A associada ao resistor, que dissipa a energia, é real. Deste modo, o uso de números complexos permite que os dois tipos de componentes sejam tratados de maneira conjunta, respeitando as características de cada um deles.

### • exemplo 1

Como exemplo, resolvemos novamente o circuito RLC em série ligado a uma fonte externa que fornece tensão  $V = V_0 \cos \omega t$ , discutido na aula 4 e representado na Fig. 4.2.

Os itens numerados da solução correspondem aos passos usados na descrição do **resumo do método**.

1. a tensão da fonte, em notação complexa, é obtida a partir da tensão física

$$V(t) = V_0 \cos \omega t \longrightarrow \hat{V}(t) = V_0 e^{i \omega t}, \quad (6.32)$$

2. a impedância  $Z$  do circuito é dada, neste caso, pela soma das impedâncias do resistor, do capacitor e do indutor:

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right). \quad (6.33)$$

Para completar os cálculos é conveniente reescrever a impedância em coordenadas polares, como

$$Z = |Z| e^{i \delta}, \quad (6.34)$$

onde

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}, \quad (6.35)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{R}; \quad (6.36)$$

3. a corrente  $\hat{I}(t)$  é dada por

$$\hat{I}(t) = \frac{\hat{V}(t)}{Z} = \frac{V_0 e^{i \omega t}}{|Z| e^{i \delta}} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} e^{i(\omega t - \delta)}. \quad (6.37)$$

4. Assim, a corrente física no circuito é dada pela parte real da expressão (6.36),

$$I(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cos(\omega t - \delta) \quad (6.38)$$

com  $\operatorname{tg} \delta$  dada por (6.35).

Essa expressão é, como esperado, idêntica à da aula 4, exercício 2.

## • exemplo 2

Estudamos o circuito mostrado na Fig. 6.8, sujeito à uma fonte de tensão externa dada por  $V(t) = V_0 \cos \omega t$ . Em particular, estamos interessados nas funções que descrevem, em função do tempo, a corrente no resistor e a carga do capacitor, no regime estacionário.

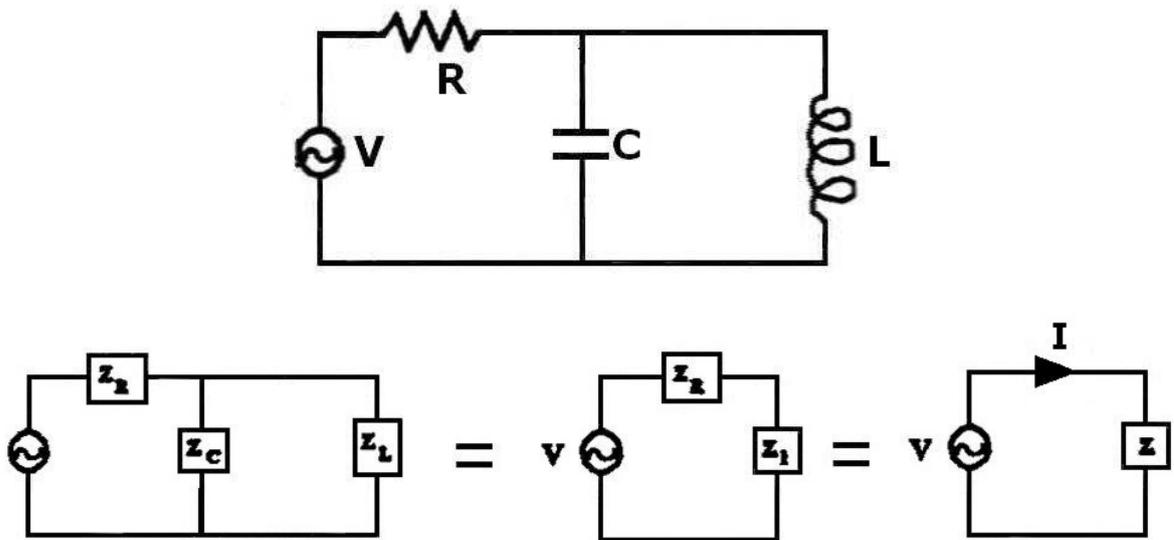


Figura 6.8: (a) Circuito com resistência, capacitância e indutância ligado a uma fonte de tensão alternada; (b) representação em termos de impedância.

As impedâncias são dadas por  $Z_R = R$ ,  $Z_L = i \omega L$ ,  $Z_C = -i/\omega C$ . A associação de  $Z_C$  e  $Z_L$ , em paralelo, corresponde a uma impedância equivalente  $Z_1$ , dada por

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} \longrightarrow Z_1 = \frac{Z_C Z_L}{Z_C + Z_L} \quad (6.39)$$

e portanto,

$$Z_1 = \frac{i}{\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)} = \frac{i \omega L}{1 - \omega^2 LC}. \quad (6.40)$$

A impedância equivalente  $Z$  do circuito é

$$Z = Z_R + Z_1 = R + \frac{i \omega L}{(1 - \omega^2 LC)}. \quad (6.41)$$

Usando coordenadas polares, temos  $Z = |Z| e^{i\delta}$ , onde

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}\right)^2}, \quad (6.42)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\omega L}{R (1 - \omega^2 LC)}. \quad (6.43)$$

O conhecimento da impedância permite obter a corrente no resistor que, na notação complexa, é escrita como

$$\hat{I}(t) = \frac{\hat{V}(t)}{Z} = \frac{V_0 e^{i(\omega t - \delta)}}{\left[R^2 + \left(\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}\right)^2\right]^{1/2}} \quad (6.44)$$

Assim, a corrente física no resistor é dada por

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \delta), \quad (6.45)$$

com

$$I_0 = \frac{V_0}{\left[ R^2 + \left( \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (6.46)$$

e  $\text{tg } \delta$  dada pela eq. (6.42).

O próximo passo consiste em obter a função que descreve a carga no capacitor. Para isso precisamos, inicialmente, determinar a corrente no capacitor. A idéia que a impedância  $Z$  do sistema é dada por associações das impedâncias das suas partes permite escrever, neste exemplo:

$$\hat{V}(t) = Z \hat{I}(t) = Z_R \hat{I}(t) + Z_1 \hat{I}(t) = \hat{V}_R(t) + \hat{V}_1(t). \quad (6.47)$$

Na última passagem, identificamos o produto de  $\hat{I}(t)$  pela impedância de cada elemento à tensão complexa entre as extremidades daquele elemento. Assim, as tensões complexas no capacitor e no indutor são iguais entre si e valem

$$\hat{V}_1(t) = Z_1 \hat{I}(t), \quad (6.48)$$

com  $Z_1$  e  $\hat{I}(t)$  dadas por (6.39) e (6.43). No subsistema formado pelo capacitor e pelo indutor, a corrente  $\hat{I}(t)$  se divide em duas componentes  $\hat{I}_C(t)$  e  $\hat{I}_L(t)$ , sendo

$$\hat{I}(t) = \hat{I}_C(t) + \hat{I}_L(t). \quad (6.49)$$

Como a tensão complexa é a mesma para o capacitor e para o indutor, valem também as relações

$$\hat{V}_1(t) = Z_C \hat{I}_C(t) \quad \text{e} \quad \hat{V}_1(t) = Z_L \hat{I}_L(t). \quad (6.50)$$

Neste exemplo estamos interessados na carga no capacitor e escrevemos

$$\hat{I}_C(t) = \frac{\hat{V}_1(t)}{Z_C} = \frac{Z_1}{Z_C} \hat{I}(t) = \frac{\frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC}}{\frac{-i}{\omega C}} \hat{I}(t) = - \frac{\omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC} \hat{I}(t). \quad (6.51)$$

Como o fator em frente de  $\hat{I}(t)$  é real, não há diferença de fase entre as duas correntes. A corrente física no capacitor vale

$$I_C(t) = I_{0C} \cos(\omega t - \delta), \quad (6.52)$$

com

$$I_{0C} = \frac{\omega^2 C L}{(1 - \omega^2 L C)} I_0. \quad (6.53)$$

Finalmente, a carga no capacitor é dada por

$$Q(t) = \int dt I_{0C} \cos(\omega t - \delta) = \frac{I_{0C}}{\omega} \text{sen}(\omega t - \delta) \quad (6.54)$$

$$= \frac{\omega L C}{(1 - \omega^2 L C)} I_0 \text{sen}(\omega t - \delta), \quad (6.55)$$

com  $\delta$  e  $I_0$  dados por (6.42) e (6.45).

## • potência

No caso de um circuito qualquer, acionado por um único gerador de tensão  $V(t) = V_0 \cos \omega t$ , existe uma relação muito geral e importante entre a potência média fornecida pelo gerador ao sistema e a sua impedância.

A impedância sempre pode ser escrita como

$$Z = x + i y \equiv |Z| e^{i \delta}, \quad (6.56)$$

onde

$$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{e} \quad \text{tg } \delta = \frac{y}{x}. \quad (6.57)$$

A corrente  $\hat{I}(t)$  é dada por

$$\hat{I}(t) = \frac{V_0 e^{i \omega t}}{|Z| e^{i \delta}} = \frac{V_0}{|Z|} e^{i(\omega t - \delta)}. \quad (6.58)$$

Usando

$$\cos \delta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{e} \quad \text{sen } \delta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (6.59)$$

escrevemos a corrente física como

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{V_0}{|Z|} \cos(\omega t - \delta) = \frac{V_0}{|Z|} [\cos(\omega t) \cos \delta + \text{sen}(\omega t) \text{sen} \delta] \\ &= \frac{V_0}{x^2 + y^2} [x \cos \omega t + y \text{sen} \omega t]. \end{aligned} \quad (6.60)$$

A potência média fornecida pelo gerador em um período é dada por

$$\begin{aligned} \langle P_V \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T dt V(t) I(t) = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{V_0^2}{|Z|} \cos(\omega t) \cos(\omega t - \delta) \\ &= \frac{V_0^2}{2} \frac{x}{(x^2 + y^2)}. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Esse resultado é importante porque ressalta o fato que a parte real  $x$  da impedância descreve a dissipação de energia enquanto que a parte imaginária  $y$  está associada aos elementos onde a energia é conservada. Ele mostra, em particular, que se a impedância for um número imaginário ( $x = 0$ ), a potência média, em um período, fornecida pela fonte ao sistema, será nula. Se a parte real da impedância for um número positivo, o gerador estará fornecendo energia ao sistema em cada período.

• **exercícios**

1. Determine as correntes físicas nos circuitos descritos pelas figuras 6.5, 6.6 e 6.7.
2. Mostre que a corrente  $I(t)$  dada pela expressão (6.37) é idêntica à encontrada na aula 4, eq. 4.17.
3. Para o circuito da figura 6.1(b), calcule:
  - a) a impedância equivalente;
  - b) a corrente no circuito no regime estacionário.
4. A partir da expressão (6.60), obtenha a potência média que a fonte de tensão  $V = V_0 \cos \omega t$  fornece a um circuito RLC em série, em um período. Compare seu resultado com o obtido na aula 5.
5. (**difícil**) Verifique que  $\langle P_V \rangle \neq Re \langle \hat{P}_V \rangle$  e justifique.

• **respostas**

$$1. \text{ 6.5 } \longrightarrow I(t) = \frac{V_0}{\omega L} \text{ sen } \omega t; \quad 6.6 \longrightarrow I(t) = -\omega C V_0 \text{ sen } \omega t;$$

$$6.7 \longrightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} \text{ cos } \omega t.$$

$$3. \text{ a) } Z = \frac{3Z_L Z_C^2 + 4Z_L Z_C Z_R + 3Z_C^2 Z_R + 2Z_C Z_R^2 + Z_L Z_R^2}{2Z_L Z_C + 2Z_C Z_R + Z_L Z_R};$$

$$Z = \frac{a+ib}{c+id}, \text{ com } a = \left[ \frac{4LR}{C} - \frac{3R}{\omega^2 C^2} \right], \quad b = \left[ -\frac{3L}{\omega C^2} - \frac{2R^2}{\omega C} + \omega L R^2 \right], \quad c = \frac{2L}{C},$$

$$d = \left[ 2\omega L - \frac{1}{\omega C} \right] R$$

$$\text{b) } I(t) = \frac{V_0}{|Z|} \text{ cos}(\omega t - \delta)$$

$$Z = |Z| e^{i\delta} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}} e^{i\delta}, \quad \delta = \text{arc tg } \frac{b}{a} - \text{arc tg } \frac{c}{d}$$

# Capítulo 7

## circuito LC infinito

### • introdução

Até o presente ponto do curso, consideramos circuitos RLC em duas situações diferentes. Numa delas, as fontes eram estáticas e, matematicamente, o problema consistia em resolver uma equação diferencial homogênea. Na outra situação, o sistema era ligado a uma fonte externa oscilante. Nesses dois casos, supusemos tacitamente os circuitos como estando localizados em regiões muito pequenas do espaço. Esta ideia permeou a discussão de modo sutil, pois não nos preocupamos com o fato de que eventos que ocorrem numa certa região do espaço não podem influenciar *instantaneamente* eventos que ocorrem em outras regiões. Fisicamente, existem atrasos entre efeitos que ocorrem em um ponto do circuito e as suas conseqüências em outros pontos, pois a relação entre causa e efeito é mediada pela velocidade da luz que leva um tempo para percorrer a distância que separa dois pontos. No caso de sistemas “pequenos”, esse tempo de atraso pode ser desprezado, e foi por isso que não o consideramos nas discussões precedentes. Uma das motivações para o estudo das linhas de transmissão é entender como esses efeitos de retardamento se manifestam e porque eles ocorrem. Uma outra motivação, é que as linhas de transmissão são utilizadas para transportar energia entre regiões diferentes, seja de uma usina hidroelétrica até as cidades, seja entre duas pessoas que conversam por telefone. Elas têm, por isso, grande importância prática.

O crescente consumo de energia tem motivado um debate a respeito do aproveitamento de diversas fontes, tais como carvão, petróleo, hidroelétrica, nuclear, solar, eólica, etc. Uma parte deste debate envolve problemas associados à poluição e ao transporte da energia. A energia hidroelétrica é, entre as fontes convencionais, a que mais tem sido aproveitada no Brasil, e a tecnologia envolvida no seu uso está bastante desenvolvida. O transporte dessa energia representa um aspecto importante do problema porque, na maioria dos casos, as usinas hidroelétricas estão bastante longe dos grandes centros consumidores. Nosso objetivo aqui não é discutir a tecnologia envolvida no transporte de energia, mas estudar os princípios de física envolvidos nesta questão e entender como se

dá a transmissão da energia eletromagnética.

### • linhas de transmissão

Uma linha de transmissão é, geralmente, constituída por dois condutores longos e paralelos, cuja geometria pode variar, como ilustra a Fig. 7.1.



Figura 7.1: Linhas de transmissão.

Quando uma fonte de tensão é ligada em um dos extremos da linha de transmissão, existem campos elétricos e magnéticos no seu interior e, conseqüentemente, acúmulos de energias elétrica e magnética. Isto indica que sistemas como este possuem capacitância e indutância que, como no caso de circuitos pequenos, podem ser determinadas. Com o intuito de facilitar os cálculos, o nosso estudo da linha de transmissão será feito com base no caso concreto de um sistema formado por duas placas planas e paralelas. Entretanto os resultados obtidos podem ser facilmente generalizados para sistemas com outras características geométricas.

Consideramos que a nossa linha seja formada por duas fitas metálicas muito longas, planas e paralelas, de largura  $a$  separadas pela distância  $b$ , sendo  $b \ll a$ . A linha está disposta paralelamente ao eixo dos  $y$ , conforme a Fig. 7.2, e supomos que no seu interior existe o vácuo. Isso corresponde a uma simplificação da situação mais realística, onde o interior da linha é preenchido por um dielétrico, que impede que as duas placas se toquem.

O primeiro passo para a solução do problema consiste nos cálculos da capacitância e da indutância de um trecho de comprimento  $\Delta y$  dessa linha. A capacitância  $C$ , que depende apenas da geometria do sistema, pode ser determinada a partir da energia elétrica armazenada entre as placas quando elas estão carregadas com cargas  $+Q$  e  $-Q$ . Essa energia está relacionada à capacitância por

$$U_C = \frac{Q^2}{2C} \quad (7.1)$$

e está distribuída na região interna ao trecho da linha considerado. Sua densidade volumétrica é dada por

$$\frac{dU_C}{dV} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}, \quad (7.2)$$

onde o módulo do campo elétrico, calculado por meio da lei de Gauss, vale

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (7.3)$$

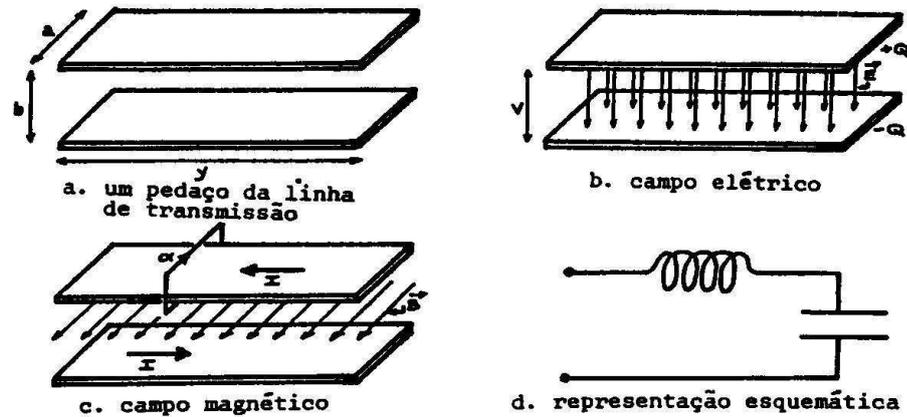


Figura 7.2: Um trecho de linha de transmissão.

Juntando esses resultados, obtemos a capacitância *deste trecho* da linha

$$C = \frac{\epsilon_0 a \Delta y}{b}. \quad (7.4)$$

A indutância  $L$  do sistema também depende apenas de sua geometria, podendo ser determinada pela energia magnética existente entre as placas quando por elas flui uma corrente  $I$ , em sentidos opostos. Neste caso, a energia pode ser escrita como

$$U_L = \frac{L I^2}{2}, \quad (7.5)$$

estando distribuída pelo interior do trecho considerado com densidade

$$\frac{dU_L}{dV} = \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (7.6)$$

Usando a lei de Ampère no caminho  $\alpha$  mostrado na Fig. 7.2c, obtemos o módulo do campo magnético

$$B = \frac{\mu_0 I}{a}. \quad (7.7)$$

Estes resultados permitem-nos concluir que a indutância *deste trecho* do circuito é dada por

$$L = \frac{\mu_0 b \Delta y}{a}. \quad (7.8)$$

Os valores de  $L$  e  $C$  obtidos acima determinam o comportamento de um pequeno elemento do sistema, representado de duas maneiras diferentes na Fig. 7.3. É interessante

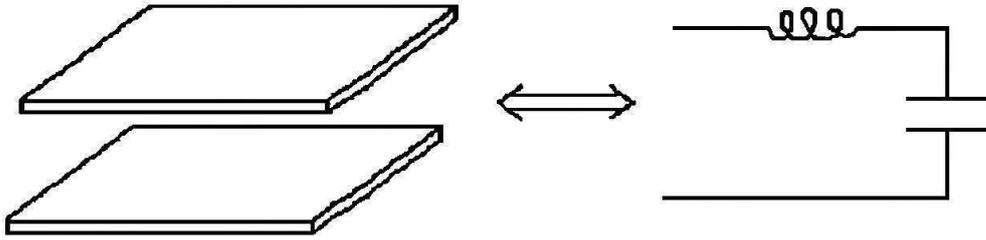


Figura 7.3: Um trecho da linha de transmissão e sua representação esquemática.

notar o caráter simbólico destas representações. O desenho da esquerda propõe-se a ser uma espécie de fotografia de um trecho da linha de transmissão, enquanto que o da direita é um pouco mais abstrato. O primeiro ajuda a imaginar a situação física, o segundo é mais apropriado ao tratamento matemático. O primeiro mostra claramente que, na linha de transmissão, as energias elétrica e magnética coexistem numa mesma região do espaço. O segundo é mais geral, e não se compromete com esta idéia. Ele pode representar qualquer sistema que armazene energias elétrica e magnética, tanto na configuração da linha de transmissão como no caso onde o capacitor e o indutor são elementos distintos, como indicado na Fig. 7.4.

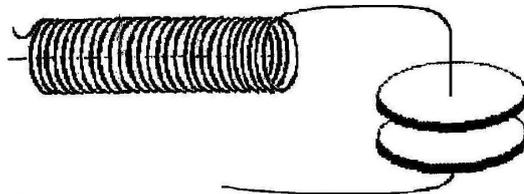


Figura 7.4: Representação de um sistema que armazena energia elétrica e magnética em diferentes elementos.

A linha de transmissão completa pode ser entendida como uma associação de pequenos trechos semelhantes aos considerados acima. Isso significa que ela pode ser representada pelo circuito LC infinito da Fig. 7.5. É importante notar que, a bem da simplicidade, estamos desprezando os efeitos associados à resistência do metal do qual a linha é feita.

### • circuito LC infinito

Passamos, agora, a estudar as propriedades de um circuito infinito, formado por indutores e capacitores. Circuitos deste tipo podem representar tanto linhas de transmissão, onde as energias elétrica e magnética encontram-se na mesma região do espaço, como outros sistemas, formados por elementos como os da Fig. 7.4. Para equacionar este circuito, é preciso determinar a sua impedância.

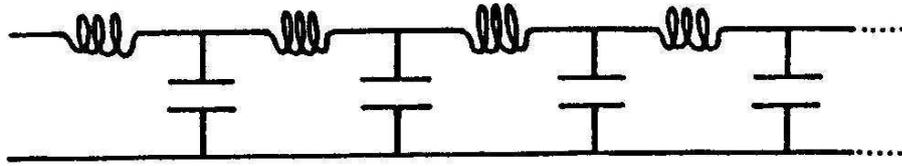


Figura 7.5: Representação esquemática de uma linha de transmissão.

Chamamos de  $Z$  a impedância total do circuito infinito, que desejamos calcular, e de  $Z_L$  e  $Z_C$  as impedâncias de cada um dos indutores e capacitores elementares. A relação entre  $Z$ ,  $Z_L$  e  $Z_C$  é determinada usando um truque matemático, baseado na ideia de que um circuito infinito sempre pode ser considerado como a associação de um elemento da sua extremidade esquerda com um outro sistema, também infinito. Tal ideia é representada esquematicamente na Fig. 7.6.

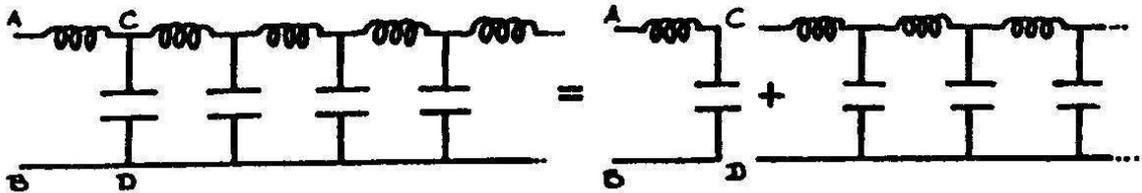


Figura 7.6: Circuito formado por infinitos circuitos elementares.

A Fig. 7.7 representa a mesma ideia, só que formulada em termos de impedâncias. A primeira igualdade desta figura indica que a impedância total  $Z$  é o resultado da associação das diversas impedâncias elementares. A segunda representa, como vimos acima, o fato de o circuito infinito poder ser entendido como a associação entre um elemento e um resto. A terceira igualdade, incorpora o truque matemático. O fato de o circuito ser infinito faz com que a impedância da parte que sobra depois do trecho da esquerda também seja  $Z$ . Ela somente é válida para circuitos infinitos, e é baseada na ideia que a impedância de tal circuito não se altera quando dele retiramos uma parte finita. Finalmente, a última identidade nos diz que o circuito infinito pode ser entendido como a associação de um de seus elementos com ele mesmo.<sup>1</sup>

A igualdade entre o primeiro e o último circuitos da figura permite-nos escrever

$$Z = Z_L + \frac{1}{\frac{1}{Z} + \frac{1}{Z_C}}, \quad (7.9)$$

que corresponde à igualdade

$$Z^2 - Z Z_L - Z_L Z_C = 0. \quad (7.10)$$

<sup>1</sup>Esse tipo de raciocínio é o mesmo que permite calcular a soma de séries geométricas. Se  $S = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots$ , podemos escrever  $S = 1 + a(1 + a + a^2 + a^3 + \dots) = 1 + aS$  e, portanto,  $S = 1/(1 - a)$ .

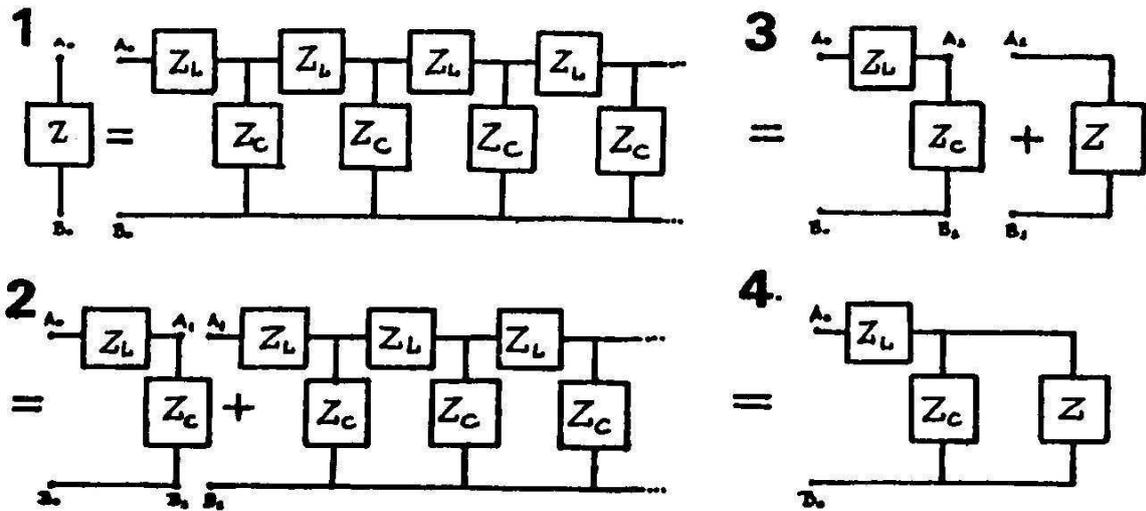


Figura 7.7: Os circuitos 1, 2, 3 e 4 são equivalentes.

Resolvendo esta equação algébrica, obtemos  $Z$ , a impedância da linha de transmissão

$$Z = \frac{Z_L}{2} \pm \sqrt{\frac{Z_L^2}{4} + Z_L Z_C}. \quad (7.11)$$

A solução com sinal negativo não tem significado físico pois, de acordo com a eq.(7.9), no caso  $Z_C = 0$ , devemos ter  $Z = Z_L$ . Por isso, ela não será considerada na seqüência.

Lembrando que as impedâncias de um indutor e de um capacitor sujeito a tensão alternada com frequência  $\omega$  são dadas por  $Z_L = i\omega L$  e  $Z_C = -i/\omega C$ , obtemos

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}} + \frac{i\omega L}{2}. \quad (7.12)$$

### • dois regimes de frequência

O conhecimento da impedância total  $Z$  permite-nos analisar o comportamento do circuito infinito quando está conectada uma fonte de tensão alternada na sua extremidade, da forma  $V(t) = V_0 \cos \omega t$ . Para compreender como os efeitos da fonte se propagam através do circuito, notamos que, na eq.(7.12), o termo no interior da raiz pode ser positivo, negativo, ou nulo. Existem, por isso, casos diferentes a serem considerados, dependendo do valor da frequência  $\omega$ .

No caso de frequências baixas, quando  $\omega^2 < 4/LC$ , a impedância é um número complexo, com uma parte real e outra imaginária. A parte real, como vimos anteriormente, indica a existência de dissipação de energia. Isso pode parecer estranho num circuito que

contém apenas capacitores e indutores, que são elementos não dissipativos. Como podem esses elementos absorver continuamente energia, como se fossem um resistor? Isso ocorre porque, quando se conecta a fonte a este circuito, ela fornece energia ao primeiro circuito LC elementar, em seguida ao segundo, então ao terceiro, e assim por diante. Como o circuito é infinito, ele estará absorvendo energia continuamente, energia esta que vai sendo armazenada nos indutores e capacitores e, portanto, se propaga através da linha. Deste modo, é possível a uma pessoa colocada no fim da linha de transmissão receber a energia introduzida na extremidade oposta. Assim, para frequências baixas, a energia “entra” na linha, e este fato é representado matematicamente por uma impedância que contém uma parte real.

O caso de frequências altas é determinado pela condição  $\omega^2 > 4/LC$ . Nesta situação, podemos esperar que não ocorra propagação da energia através da linha, uma vez que circuitos com impedância puramente imaginária não absorvem energia da fonte durante um ciclo. Estas duas situações são discutidas a seguir.

### • tensão no primeiro capacitor

Estudamos, agora, o comportamento da tensão ao longo do circuito LC infinito e um pouco do que acontece pode ser antecipado. Estamos tratando de um circuito composto de elementos não dissipativos, de comprimento bastante grande, alimentado por uma fonte de tensão colocada numa das suas extremidades. Do ponto de vista energético, essa situação assemelha-se a uma corda muito longa, balançada por alguém, a partir de uma das suas extremidades. A pessoa que balança a corda faz o papel da fonte de energia que, uma vez fornecida à corda, propaga-se através dela na forma de ondas. Assim podemos esperar que a energia fornecida pela fonte de tensão ao circuito LC infinito também venha a se propagar pelo interior do mesmo.

Consideremos um circuito LC infinito feito de um metal muito bom condutor, de modo a podermos desprezar a energia dissipada por efeito Joule. Um gerador, cuja tensão é dada por

$$V(t) = V_0 \cos \omega t, \quad (7.13)$$

está ligado à extremidade esquerda do circuito, representada pelos pontos  $A_E$  e  $B_E$  da Fig. 7.8.

Quando a fonte é ligada, ela gera correntes no indutor e cargas são acumuladas no capacitor mais próximo, fazendo com que exista uma tensão  $V_1(t)$  entre os pontos  $A_1$  e  $B_1$ . É esta tensão que alimenta o funcionamento do resto do sistema. Ou seja, para o resto do circuito, tudo se passa como se houvesse uma “fonte”  $V_1(t)$  conectada aos pontos  $A_1$  e  $B_1$ . Essa nova “fonte” gera correntes e cargas no segundo elemento, fazendo com que exista uma tensão  $V_2(t)$  entre os pontos  $A_2$  e  $B_2$ . Essa tensão  $V_2(t)$  passa a alimentar o circuito daí para a frente e assim, sucessivamente. Por isso, para compreender o comportamento da tensão ao longo do circuito LC infinito, basta investigar o que acontece no primeiro

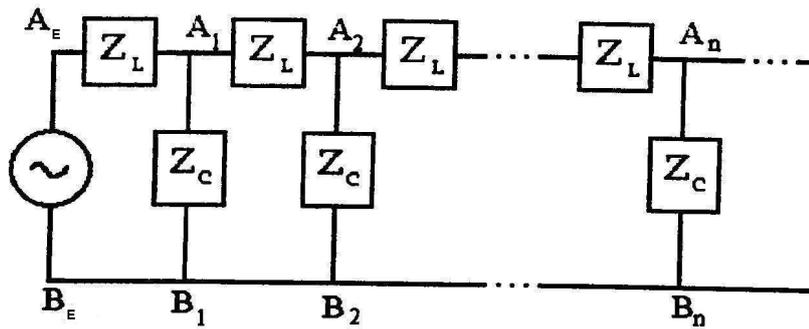


Figura 7.8: Representação do circuito LC infinito com fonte de tensão na extremidade esquerda.

elemento. O que acontecer ali vai se repetir através do restante do circuito.

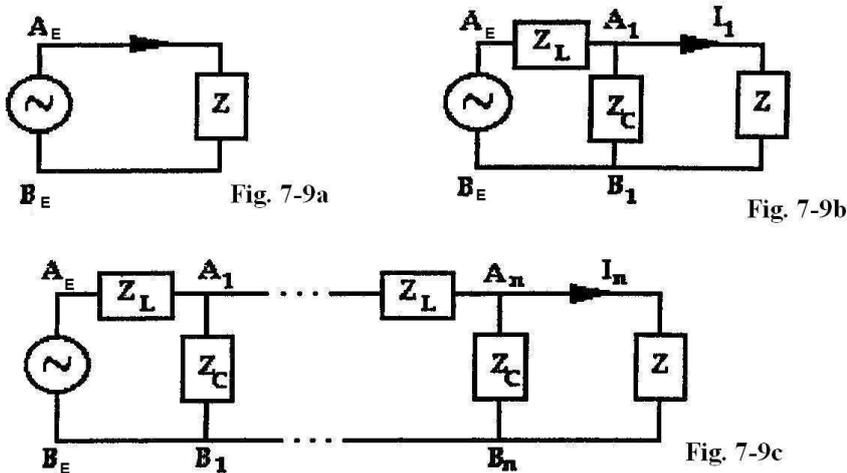


Figura 7.9: Representações do circuito LC infinito com fonte de tensão na extremidade esquerda.

A Fig. 7.9(a) corresponde a um gerador acoplado ao circuito LC infinito, representado pela sua impedância total  $Z$ . A mesma situação está indicada na Fig. 7.9(b), só que desta vez o circuito foi representado como uma associação de um elemento formado por um indutor e um capacitor, de impedâncias  $Z_L$  e  $Z_C$ , com o restante da linha, cuja impedância é  $Z$ . Estudar a propagação da energia através do circuito LC infinito equivale, então, a analisar a relação entre as tensões  $V_E(t)$  e  $V_1(t)$ . Essas duas tensões são diferentes porque, entre os pontos  $A_E$  e  $A_1$  existe um indutor. Para calcular a relação entre elas, usamos o formalismo das impedâncias e chamamos de  $\hat{V}$  e  $\hat{I}$  os correspondentes complexos das tensões e correntes. A Fig. 7.9(a) permite-nos escrever a corrente que sai da fonte e atravessa o primeiro indutor como

$$\hat{I}_E = \frac{\hat{V}_E}{Z}. \quad (7.14)$$

Por outro lado, considerando a Fig. 7.9(b), temos

$$\hat{V}_E = \hat{I}_E Z_L + \hat{V}_1. \quad (7.15)$$

Juntando esses dois resultados, encontramos a relação

$$\hat{V}_1 = \left(1 - \frac{Z_L}{Z}\right) \hat{V}_E. \quad (7.16)$$

Usando os valores obtidos anteriormente para  $Z_L$  (eq. 6.23) e  $Z$  (eq. 7.12), podemos expressar o fator em frente de  $\hat{V}_E$  como

$$\left(1 - \frac{Z_L}{Z}\right) = \frac{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4} - \frac{i\omega L}{2}}}{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4} + \frac{i\omega L}{2}}}. \quad (7.17)$$

As características deste fator dependem do sinal do termo no interior da raiz e, consequentemente, do valor de  $\omega$ .

Para *frequências baixas*, que correspondem a  $\omega^2 < 4/LC$ , o interior da raiz é positivo e o fator  $(1 - Z_L/Z)$  é dado pelo quociente de um número complexo pelo seu conjugado, que sempre tem módulo 1. De fato, podemos escrever

$$\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4} - \frac{i\omega L}{2}} = \rho e^{-i\phi}, \quad (7.18)$$

onde

$$\rho = \frac{L}{C}, \quad \text{tg}\phi = \frac{\frac{\omega L}{2}}{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}}}. \quad (7.19)$$

Assim, neste caso, temos

$$\left(1 - \frac{Z_L}{Z}\right) = e^{-i2\phi}, \quad (7.20)$$

e a tensão  $V_1(t)$ , dada pela parte real de  $\hat{V}_1(t)$ , é

$$V_1(t) = \text{Re}[\hat{V}_1(t)] = \text{Re}\left[\left(1 - \frac{Z_L}{Z}\right)\hat{V}_0(t)\right] = \text{Re}[V_0 e^{i(\omega t - 2\phi)}] = V_0 \cos(\omega t - 2\phi). \quad (7.21)$$

Para *frequências altas*, ou seja, quando  $\omega^2 > 4/LC$ , o fator  $(1 - Z_L/Z)$  passa a ser

$$\left(1 - \frac{Z_L}{Z}\right) = -\eta, \quad (7.22)$$

$$\eta = \frac{\frac{\omega L}{2} - \sqrt{\frac{\omega^2 L^2}{4} - \frac{L}{C}}}{\frac{\omega L}{2} + \sqrt{\frac{\omega^2 L^2}{4} - \frac{L}{C}}} < 1. \quad (7.23)$$

já que  $\omega L/2 > \sqrt{\omega^2 L^2/4 - L/C}$

Este resultado mostra que a tensão cai ao longo da linha de transmissão, uma vez que a função  $V_1(t)$  é dada por

$$V_1(t) = -\eta V_0 \cos \omega t. \quad (7.24)$$

Em resumo, nos dois casos, as tensões no primeiro capacitor são dadas por

$$\omega^2 < 4/LC \rightarrow V_1(t) = V_0 \cos(\omega t - 2\phi), \quad (7.25)$$

$$\omega^2 > 4/LC \rightarrow V_1(t) = [-\eta V_0] \cos \omega t. \quad (7.26)$$

Assim, para frequências baixas, aparece uma fase entre  $V_1$  e  $V_E$  enquanto que, para frequências altas, a diferença entre essas duas tensões manifesta-se no módulo.

Na discussão precedente, vimos que existe uma frequência  $\omega_C$ , dada por

$$\omega_C = \frac{2}{\sqrt{LC}}, \quad (7.27)$$

que regula o comportamento do circuito, separando os regimes de frequências altas e baixas. Ela é chamada de *frequência de corte* do circuito LC infinito.

### • tensão ao longo do circuito LC infinito

Como discutimos anteriormente, cada trecho do circuito é alimentado pelo imediatamente anterior. Como o segundo capacitor é alimentado pela tensão  $V_1(t)$ , podemos escrever

$$\hat{V}_2 = \left[1 - \frac{Z_L}{Z}\right] \hat{V}_1 \quad (7.28)$$

e usando (7.16),

$$\hat{V}_2 = \left[1 - \frac{Z_L}{Z}\right]^2 V_0. \quad (7.29)$$

De modo totalmente análogo, a tensão no n-ésimo capacitor vale

$$\hat{V}_n = \left[1 - \frac{Z_L}{Z}\right]^n V_0 \quad (7.30)$$

Assim, no caso de *frequências baixas*, obtemos

$$V_n(t) = V_0 \cos(\omega t - 2n\phi), \quad (7.31)$$

enquanto que, para *frequências altas*, a tensão assume a forma

$$V_n(t) = [-\eta]^n V_0 \cos(\omega t). \quad (7.32)$$

Estes resultados permitem-nos concluir que, para frequências baixas, a energia se propaga através do circuito LC infinito, uma vez que a tensão  $V_n(t)$  oscila com frequência e amplitude idênticas às do gerador. A única diferença entre as duas tensões é devida a uma fase de valor  $2n\phi$ , estando  $V_n(t)$  atrasada em relação a  $V_0(t)$ . Por outro lado, quando as frequências são altas, a tensão vai caindo ao longo do circuito LC infinito, sempre à mesma proporção  $\eta$  de um elemento para outro. Por isso, neste caso, a tensão tende a zero depois de um número grande de elementos. Assim, para frequências baixas, a tensão adentra o circuito enquanto que, para frequências altas, ela decresce ao longo dele.

### • exercícios

1. Determine a indutância e a capacitância de um trecho de comprimento  $\Delta y$  de uma linha de transmissão formada por um cabo coaxial cuja cavidade tem raios menor e maior iguais a  $a$  e  $b$  respectivamente.
2. Como está distribuída a tensão ao longo do circuito LC infinito quando  $\omega = \omega_C$  ?
3. (**difícil**) No caso de frequências altas, qual a relação entre o sinal negativo de  $(1 - Z_L/Z)$  e a não propagação da energia?
4. Para os casos  $\omega < \omega_C$  e  $\omega > \omega_C$ , faça gráficos representando a tensão, a carga no capacitor e a energia elétrica ao longo de um circuito LC infinito, num dado instante. O que acontece com o passar do tempo?

### • respostas

1.  $\epsilon = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln b/a} \Delta y$ ;  $L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln b/a \Delta y$

2. Neste caso,  $(1 - Z_L/Z) = -1$ , e a tensão em cada elemento tem a fase oposta ao anterior.

3. Sugestão: pense no que acontece no caso  $\omega = \omega_C$  e, depois, considere os casos  $\omega = (1 - \epsilon)\omega_C$  e  $\omega = (1 + \epsilon)\omega_C$ , sendo  $\epsilon$  um número positivo e pequeno.  $\zeta$



# Capítulo 8

## linha de transmissão

### • introdução

Na aula anterior, argumentamos que uma linha de transmissão pode ser pensada como uma associação de infinitos elementos, cada um deles possuindo capacitância e indutância. Resolvemos, em seguida, o problema do circuito LC infinito, obtendo a sua impedância e a tensão em cada um dos seus capacitores. Em especial, vimos que estes sistemas são caracterizados por uma frequência de corte  $\omega_C$ , abaixo da qual a energia pode se propagar. Nesta aula, voltamos à linha de transmissão, cabos metálicos, contínuos e muito longos. Na situação idealizada em que a resistência do metal é desprezada, o sistema pode ser descrito como um circuito LC infinito.

É importante notar, entretanto, que existem circuitos LC infinitos que não se comportam como linhas de transmissão contínuas. Por exemplo, se comprarmos em uma loja mil componentes de capacitância  $C$  e indutância  $L$ , podemos montá-los como na Fig. 7.6 e teremos algo que se aproxima de um circuito LC infinito. O mesmo vale se optarmos por componentes de capacitância  $C'$  e indutância  $L'$ . Ou seja, ao montarmos um circuito LC infinito, temos ampla liberdade de escolher os valores de  $L$  e  $C$ . No caso da linha de transmissão contínua, tal liberdade deixa de existir e os valores de  $L$  e  $C$  estão sempre "amarrados" entre si.

### • tensão na linha de transmissão

Para discutir o caso contínuo, dividimos o comprimento  $D$  da linha de transmissão em  $N$  pedaços iguais, de comprimento  $\Delta y$  dado por

$$\Delta y = \frac{D}{N}. \quad (8.1)$$

Nas eqs.(7.4) e (7.8), mostramos que a capacitância e a indutância de cada um dos pedaços de uma linha de transmissão feita com placas planas e paralelas, de largura  $a$ , comprimento  $\Delta y$  e separadas pela distância  $b$ , são  $C = \epsilon_0 a \Delta y/b$  e  $L = \mu_0 b \Delta y/a$ .

Assim, a frequência de corte  $\omega_C$  para esta linha de transmissão é dada pela eq.(7.27) e vale

$$\omega_{CLT} = \frac{2}{\sqrt{LC}} = \frac{2}{(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \Delta y)}. \quad (8.2)$$

Este resultado independe das características geométricas do sistema e tende a infinito quando  $\Delta y$  se torna muito pequeno. Assim, qualquer que seja a frequência da fonte, ela é sempre menor que esta frequência de corte e a energia sempre pode propagar-se pela linha de transmissão.

A impedância deste circuito é obtida a partir do resultado (7.12) e, usando os valores de  $L$  e  $C$  dados por (7.4) e (7.8), temos

$$Z_{LT} = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}. \quad (8.3)$$

A tensão no  $n$ -ésimo pedaço da linha é obtida a partir da eq.(7.31) e vale

$$V_n(t) = V_0 \cos(\omega t - 2n\phi), \quad (8.4)$$

onde  $\phi$  é dado pela eq.(7.19)

$$\phi = \text{tg}^{-1} \frac{\omega L}{2\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}}}. \quad (8.5)$$

No caso da linha de transmissão, obtemos

$$\phi_{LT} = \text{tg}^{-1} \left( \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\Delta y}{2} \right) \cong \left( \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\Delta y}{2} \right), \quad (8.6)$$

usando o fato de que  $\text{tg}^{-1}\theta \cong \theta$ , para  $\theta \ll 1$ . Substituindo este resultado na eq.(8.4), temos

$$V_n(t) = V_0 \cos(\omega t - \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} n \Delta y). \quad (8.7)$$

Nesta expressão,  $n\Delta y$  corresponde à posição do  $n$ -ésimo elemento, medida a partir da extremidade onde se encontra a fonte. Por isso, denotamos esta distância por

$$y = n \Delta y \quad (8.8)$$

e escrevemos a tensão neste elemento como

$$V(y, t) = V_0 \cos(\omega t - \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} y). \quad (8.9)$$

Este resultado indica que a tensão ao longo da linha de transmissão depende do instante  $t$  e da posição  $y$ . A tensão ao longo da linha é descrita por uma função cosseno, que é cíclica. Se considerarmos um ponto fixo  $y$ , os valores da tensão oscilam e se repetem

depois de um tempo  $T$ , conhecido como o *período* da função. Ele é determinado pela condição  $V(y, t + T) = V(y, t)$  e vale

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (8.10)$$

Alternativamente, se consideramos um instante fixo  $t$  e nos movemos ao longo do eixo  $y$ , a tensão também se repete ao longo de uma distância  $\lambda$ , conhecida como *comprimento de onda* e determinada pela condição  $V(y + \lambda, t) = V(y, t)$ . O valor de  $\lambda$  é dado por

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (8.11)$$

Se tomarmos um instante  $t$  fixo, a eq. (8.9) representa a distribuição espacial de tensão entre as placas da linha em função da distância  $y$  à sua extremidade esquerda, onde está a fonte. Na figura 8.1 mostramos a tensão ao longo da linha, nos instantes  $t = 0$  e  $t = t_0$ ,  $t_0 > 0$ .

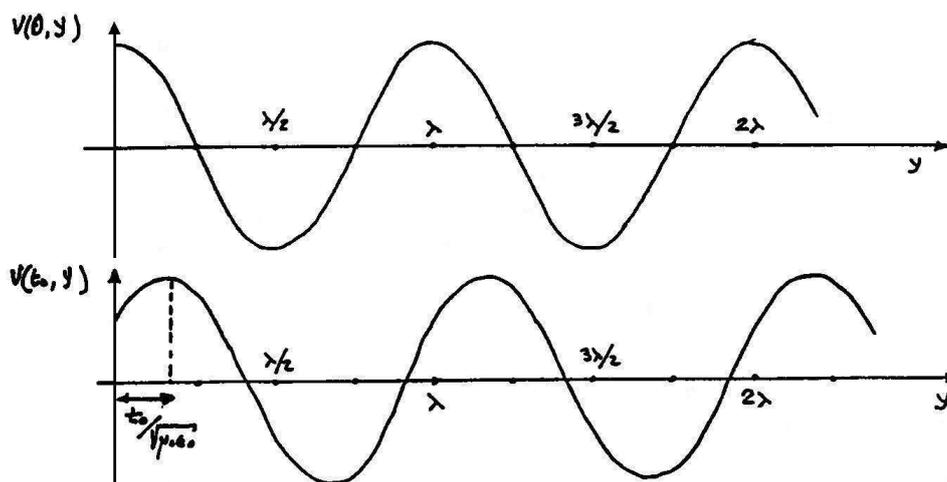


Figura 8.1: Tensão  $\times$  distância ao gerador na linha de transmissão, para os instantes  $t = 0$  e  $t = t_0 > 0$ .

Estas figuras representam as distribuições espaciais de tensão ao longo da linha e, por isso, são parecidas a duas fotografias em instantes diferentes, separadas pelo intervalo  $t_0$ . O segundo desenho corresponde a um instante posterior ao primeiro e está deslocado para a direita em relação a ele. Comparando essas duas figuras, é possível perceber que o papel do parâmetro  $t_0$  é o de deslocar a curva inteira para a direita, de uma quantidade proporcional ao seu valor.

Se tomarmos o parâmetro  $t$  como sendo uma variável contínua, temos uma situação na qual, à medida que o tempo passa, a curva desloca-se continuamente. Por isso, interpretamos a equação  $V(y, t) = V_0 \cos [\omega(t - \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} y)]$ , obtida anteriormente, como uma *onda* que se move para a direita.

Na representação mais comum desta onda, usamos o fato de que a função cosseno é par para trocar o sinal do seu argumento, escrevendo

$$V(y, t) = V_0 \cos(\kappa y - \omega t), \quad (8.12)$$

onde  $\kappa$  é dado por

$$\kappa = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \quad (8.13)$$

Essa constante tem dimensão de inverso de espaço e é chamada *número de onda*. Ela desempenha, para o espaço, o mesmo papel que a frequência angular para o tempo e está relacionada ao comprimento de onda  $\lambda$ , eq.(8.11), por

$$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (8.14)$$

### • a velocidade da onda

A velocidade de propagação da onda no interior da linha de transmissão é obtida dividindo a distância percorrida num certo intervalo de tempo por este intervalo. Se tomarmos, no caso das Figs. 8.1, este tempo como sendo um período  $T$ , a distância percorrida pela onda será  $\lambda$ , o comprimento de onda. Assim,

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (8.15)$$

Por muitos motivos, este resultado simples tem enorme importância. Essa velocidade é expressa em termos das constantes  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$ , que podem ser extraídas diretamente de medidas experimentais envolvendo cargas e correntes. No S.I., os seus valores são dados por

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= 8.854\,187\,817 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{m}^2 \text{N}} \\ \mu_0 &= 1.256\,637\,061 \times 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \end{aligned}$$

e, substituídos na eq.(8.12), fornecem

$$v = 299.792.458 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

que corresponde a  $c$ , a velocidade de propagação da luz no vácuo. Deste modo, obtemos o resultado

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}, \quad (8.16)$$

que é muito importante e motiva várias questões:

1. Por que a velocidade de *luz* aparece em um problema envolvendo um circuito tão

simples como uma linha de transmissão? Por que ela independe totalmente das características geométricas do sistema considerado?

2. A óptica é o ramo da física que estuda a luz, as suas propriedades e o seu comportamento. Por que, então, a velocidade da luz pode ser obtida no contexto do eletromagnetismo?

3. Uma velocidade pressupõe um referencial. Neste problema qual é esse referencial? Ele parece não existir, já que  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  são constantes ...

A primeira questão será discutida na aula 9. A segunda, na aula 11 e a terceira, na parte do curso dedicada à relatividade.

### • algumas propriedades gerais de ondas unidimensionais

O nosso estudo mostrou que, ao ligarmos uma fonte de tensão da forma  $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$  na extremidade de uma linha de transmissão, em seu interior aparece uma onda da forma  $V(t, y) = V_0 \cos[\omega(t - y/c)]$ . Esta última função descreve uma curva de forma cossenoidal bem definida, que se propaga ao longo da linha de transmissão. Assim, forma e propagação *parecem* estar relacionadas. Entretanto, do ponto de vista físico, essas duas características da onda são completamente independentes. Para clarificar este ponto, fazemos um digressão para discutir as propriedades gerais de uma onda unidimensional.

Ondas são fenômenos físicos comuns, cuja principal característica é o transporte de energia através do espaço. Para ler estas palavras, o leitor recebe ondas de luz refletidas pela página. Ao ouvir alguém, chegam aos seus ouvidos, ondas sonoras. No mar ondas de água se propagam... Situações simples, envolvendo ondas em cordas ou molas, contêm características gerais, presentes em todas as ondas. As ondas em cordas e molas, assim como as ondas sonoras e de água, resultam de movimentos de matéria, ou seja, precisam de matéria não rígida para existir. Por isso, são chamadas de ondas elásticas ou mecânicas e podem ser obtidas a partir da segunda lei da dinâmica de Newton.

De modo geral, a descrição da propagação de ondas envolve o tempo e uma, duas ou três dimensões espaciais. Quando apenas uma dimensão espacial é relevante, temos ondas *unidimensionais* como, por exemplo, em cordas ou linhas de transmissão. Ondas bidimensionais ocorrem em superfícies líquidas ou em membranas de tambores. Talvez o exemplo mais comum de ondas tridimensionais à nossa volta seja o som das palavras e outros ruídos.

Neste curso, estudamos apenas ondas unidimensionais. Para representar uma onda deste tipo, é preciso uma função  $F$  que dependa de duas variáveis: do tempo e da posição na direção de propagação. Por isso, escrevemos  $F = F(y, t)$ , para uma onda que se propaga na direção do eixo  $y$ . Esta função,  $F(y, t)$ , é chamada de *função de onda*. Na corda, por exemplo, a função de onda é a medida do seu deslocamento em relação à posição de equilíbrio. A Fig. 8.2(a) mostra uma corda em equilíbrio e a 8.2(b), uma onda na corda. Neste caso, o movimento de cada elemento de massa da corda é cossenoidal

na direção vertical, e a onda se propaga na direção horizontal, que é a direção de sua velocidade.

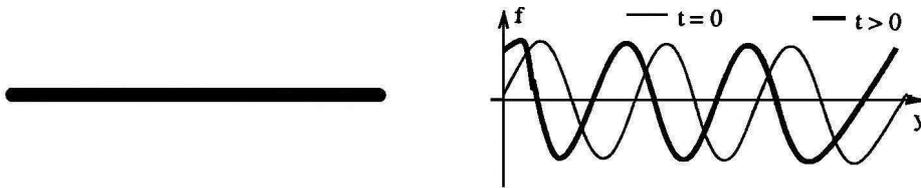


Figura 8.2: (a) A corda em equilíbrio; (b) a corda em dois instantes diferentes.

A Fig. 8.3 mostra outra onda. Ela não tem forma cossenoidal e é chamada de pulso. Podemos gerar uma onda deste tipo em uma corda, balançando a sua extremidade esquerda de modo adequado. Alguns puxões para cima, outros para baixo, durante um intervalo de tempo finito, geram um pulso que se move para a direita. Esse pulso também é uma onda e carrega energia através da corda, apesar de não ser periódico.

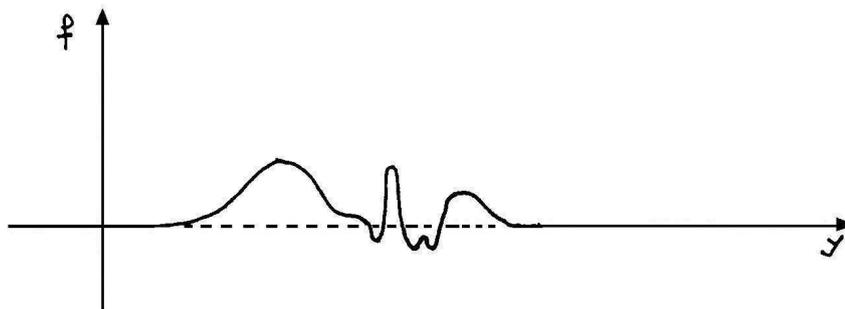


Figura 8.3: Um pulso que se propaga na direção  $y$ .

De modo muito geral, a característica principal de uma onda unidimensional é que ela é descrita por qualquer função  $F(y, t)$ , que satisfaz uma equação diferencial do tipo

$$\frac{\partial^2 F(y, t)}{\partial y^2} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 F(y, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (8.17)$$

Ela é chamada de *equação de onda* e determina que a derivada segunda da função de onda  $F$  em relação à posição  $y$  é proporcional à derivada segunda em relação ao tempo  $t$ .

Para que uma função  $F(y, t)$  seja solução da equação de onda, é preciso apenas que ela dependa de  $y$  do mesmo modo que ela depende de  $t$ . Para verificar esta propriedade, consideremos uma função qualquer  $F(u)$ . Substituindo seu argumento por  $u \equiv (y + \alpha t)$ , automaticamente fazemos com que ela passe a ser solução da equação de onda, como

podemos ver com auxílio da regra da cadeia. Assim

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}, \quad (8.18)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial F}{\partial u} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}. \quad (8.19)$$

Vemos, então, que qualquer função de argumento  $(y + \alpha t)$  é solução da equação de onda. Além disso, como o parâmetro  $\alpha$  aparece ao quadrado nessa equação, qualquer função de argumento  $(y - \alpha t)$  também é solução. Assim, a solução mais geral da equação de onda tem a forma

$$F(y, t) = g(y - \alpha t) + h(y + \alpha t), \quad (8.20)$$

onde  $g$  e  $h$  são funções quaisquer. Por exemplo, as seguintes funções são soluções da equação de onda:

$$\begin{aligned} &\cos(\kappa y - \alpha t), \quad \cos^3(\kappa y - \alpha t), \quad \cos[(\kappa y - \alpha t)^3], \quad \text{tg}^{-1}(\kappa y - \alpha t)^{-1}, \\ &\log(\kappa y - \alpha t) + \exp[-(\kappa y + \alpha t)], \quad A(\kappa y - \alpha t) + B(\kappa y + \alpha t)^3, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Por estranho que possa parecer, é essa a razão pela qual *qualquer* palavra que você fala num telefone pode ser ouvida por uma outra pessoa. Se você disse *alô*, a outra pessoa, escuta *alô*, se você disser *sorvete*, a outra pessoa escuta *sorvete* ...

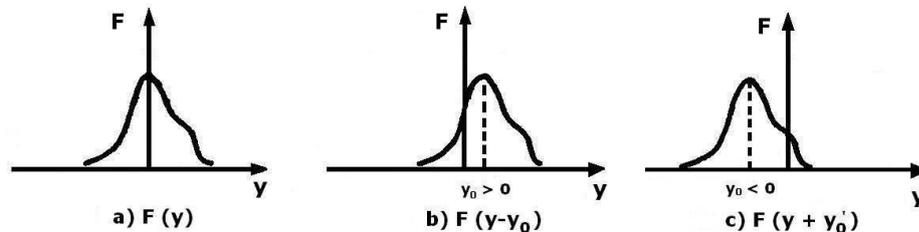


Figura 8.4: (a) Uma função  $F(y)$ ; (b) a mesma função deslocada para a direita; (c) a mesma função deslocada para a esquerda.

Para compreender esta propriedade maravilhosa, é preciso entender o significado da solução da equação de onda. Suponha que  $F(y)$  seja a função cujo gráfico está representado na Fig. 8.4a. Se subtrairmos de seu argumento um certo valor constante  $y_0$ , positivo, o único efeito é deslocar o gráfico deste valor para a direita e temos a situação descrita na Fig. 8.4b. Se somarmos  $y_0$ , temos o caso da Fig. 8.4c. Vemos, portanto, que a solução geral da equação de onda,  $g(y - \alpha t)$ , com  $\alpha > 0$ , representa uma função que, à medida que o tempo passa, vai se deslocando para a direita. Analogamente,  $h(y + \alpha t)$  se desloca para a esquerda. Por exemplo, os gráficos de uma possível função  $g(y - \alpha t)$ , em diversos

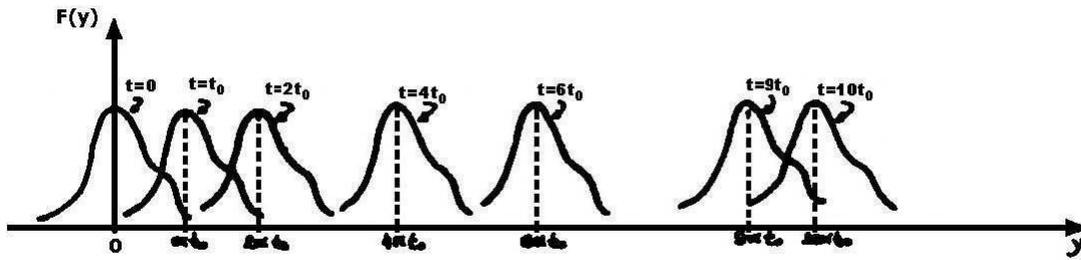


Figura 8.5: O gráfico se desloca quando o argumento é mudado.

instantes diferentes, estão representados na Fig. 8.5. É importante notar que, neste caso,  $\alpha$  é a velocidade com que o gráfico se desloca.

É por possuir soluções com estas propriedades que equações da forma

$$\frac{\partial^2 F(y, t)}{\partial y^2} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 F(y, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (8.21)$$

são chamadas de equações de onda unidimensionais. Este tipo de equação é encontrado em todos os ramos da física, desde cordas vibrantes até partículas elementares. A solução geral da equação de onda é dada por funções extremamente genéricas, da forma

$$F(y, t) = g(y - \alpha t) + h(y + \alpha t).$$

A equação de onda impõe restrições apenas ao argumento da função, não à sua forma. Do ponto de vista matemático, *uma onda é uma função que anda!*

### • as formas das ondas

Para completar este estudo, discutimos como uma dada situação física “escolhe” uma forma particular para a função  $F(y, t)$ , no caso da linha de transmissão. No início desta aula, vimos que a tensão no ponto  $y$  de uma linha sujeita a uma fonte do tipo  $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$  é dada por

$$V(y, t) = V_0 \cos[\omega(t - y/c)].$$

Este resultado indica que, a tensão em  $y$  tem as mesmas características da fonte: ela oscila cossenoidalmente, com a mesma amplitude e a mesma frequência. A única diferença entre as tensões da fonte e do ponto  $y$  é uma fase, dada por  $\omega y/c$ , que representa um atraso devido ao tempo finito de propagação da onda. Assim, a tensão em  $y$  num dado instante  $t_0$  é sempre igual à tensão da fonte em um instante anterior,  $t_0 - y/c$ . A essência da onda é ser o passado da fonte. E esse passado será tão mais longínquo quanto mais distante o ponto  $y$  considerado estiver da fonte.

De modo muito geral, a tensão entre as placas de uma linha de transmissão satisfaz uma equação de onda e, portanto, deve ter a forma genérica

$$V(y, t) = V_D(y - vt) + V_E(y + vt), \quad (8.22)$$

onde  $v = c$  é a velocidade de propagação da onda e os índices  $D$  e  $E$  indicam, respectivamente, propagações para a direita e para a esquerda. Consideremos o caso de duas pessoas conversando pelo telefone. Um aparelho de telefone fixo, para os nossos propósitos, pode ser pensado como sendo apenas um fone, feito de um diafragma preso a um ímã, como mostra a Fig. 8.6. Este ímã constitui o núcleo móvel de um solenóide, cujas extremidades estão ligadas à linha de transmissão. Quando uma pessoa fala, as ondas sonoras fazem com que o diafragma vibre, causando também vibrações no ímã. Estas, por sua vez, induzem correntes elétricas no solenóide, ligado num dos extremos da linha de transmissão. As correntes causam o aparecimento de densidades de cargas de sinais opostos nas placas que constituem a linha e, conseqüentemente, de uma tensão, descrita pela função  $V(t)$ . Esta tensão se propaga até o extremo oposto da linha, onde existe outro fone. Ao chegar lá, a tensão dá origem a correntes neste outro fone, que induzem campos magnéticos no interior do solenóide e que, por sua vez, causam vibrações no ímã. Estas são transmitidas ao diafragma, que faz vibrar o ar, reproduzindo os sons emitidos no extremo oposto da linha.

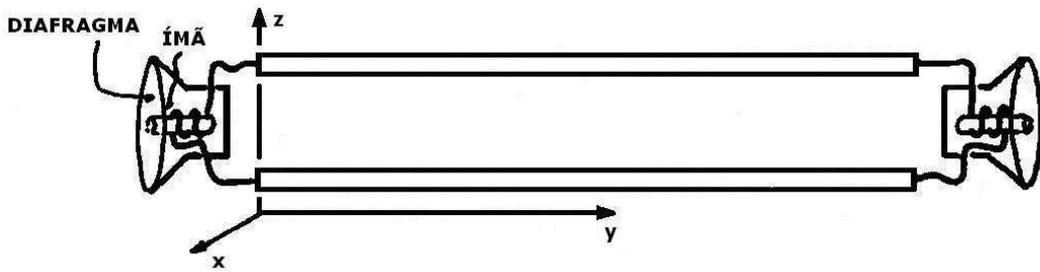


Figura 8.6: Um esquema do telefone: uma linha de transmissão.

Se a pessoa da esquerda disser “alô”, a tensão no ponto  $y = 0$  deve ser dada por uma função

$$V(y = 0, t) = \text{alô}(t) \quad (8.23)$$

Neste caso, estamos interessados apenas nas soluções que se propagam para a direita, ou seja, para o interior da linha de transmissão. Por isso, escolhemos  $V_E(y + vt) = 0$  na solução geral da equação de onda. A função que descreve a tensão que leva a informação correspondente à palavra “alô” pelo interior da linha é dada por

$$V(y, t) = \text{alô}[y - vt] \quad (8.24)$$

A forma desta função descreve a propagação, para a direita, de uma seqüência específica de tensões que corresponderam, no passado, à palavra “alô”, injetada na extremidade esquerda da linha, no ponto  $y = 0$ .

Este resultado é muito importante, porque ele nos ensina que o que acontece no ponto  $y = 0$  determina o que vai acontecer em todos os demais pontos da linha de transmissão. É, na verdade, por isso que este circuito é chamado de *linha de transmissão*: o que quer

que seja colocado num extremo, se *transmite* através dele e vai até o outro extremo, sem distorções. Se a linha for perfeita, é claro!

A função que descreve uma palavra é, em geral, muito complicada. Entretanto, existe um teorema matemático que afirma que qualquer função, por mais complicada que seja, pode ser sempre decomposta como uma somatória de funções seno e cosseno com várias frequências diferentes. Este resultado, conhecido como *teorema de Fourier*, permite que a propagação de qualquer sinal através da linha de transmissão possa ser entendida como a propagação simultânea das diversas funções seno e cosseno que o compõem. Por exemplo, na extremidade esquerda da linha, a função  $al\hat{o}(t)$  teria uma decomposição do tipo:

$$al\hat{o}(t) = \int d\omega [a(\omega) \text{sen}(\omega t) + b(\omega) \text{cos}(\omega t)], \quad (8.25)$$

onde  $a(\omega)$  e  $b(\omega)$  são funções determinadas a partir de  $al\hat{o}(t)$ . Consequentemente, num ponto da linha distante  $y$  da origem, teríamos

$$al\hat{o}(y, t) = \int d\omega \left\{ a(\omega) \text{sen} \left[ \frac{\omega}{v}(y - vt) \right] + b(\omega) \text{cos} \left[ \frac{\omega}{v}(y - vt) \right] \right\}. \quad (8.26)$$

Por isso, não há perda de generalidade se estudarmos apenas o caso de uma fonte com tensão cossenoidal.

### • exercícios

1. Sem usar fórmulas decoradas, determine o período e o comprimento de onda da função descrita pela equação  $V(y, t) = V_0 \text{cos}(\alpha t - \beta y)$ .

2. Considere uma linha de transmissão formada pelo cabo coaxial descrito no exercício 7.1. Determine:

a) a impedância da linha;

b) a função que descreve a tensão ao longo da linha quando ela é alimentada por uma fonte  $V(t) = V_0 \text{sen} \omega t$ ;

c) a velocidade de propagação da tensão ao longo da linha.

3. A tensão na extremidade direita de uma linha de transmissão infinita é dada por  $V(t) = V_0 e^{-\alpha t^2}$ . Qual a função que descreve a tensão num ponto do interior da linha?

### • respostas

1.  $T = 2\pi/\alpha$ ,  $\lambda = 2\pi/\beta$ .

2. a)  $Z = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ ,    b)  $V(y, t) = V_0 \text{sen} [\omega (t - \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} y)]$ ,    c)  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c$

3.  $V(y, t) = V_0 e^{-\alpha (y+ct)^2/c^2}$  .



# Capítulo 9

## linha de transmissão: cargas, correntes e campos

### • os cálculos

Até o momento, estudamos apenas a tensão  $V(y, t)$  entre as placas da linha de transmissão. Passamos, agora, a discutir o comportamento de outras grandezas: cargas, correntes e campos. Nesta discussão, usamos um sistema de referência com o eixo  $x$  paralelo à largura das placas, o eixo  $y$  paralelo ao comprimento das placas e o eixo  $z$ , à separação entre elas.

Num ponto  $y$  qualquer da linha, a tensão  $V(y, t)$ , dada pela eq.(8.12), é devida a cargas de sinais opostos existentes nas faces interiores das duas placas. Cada pequeno trecho da linha funciona como um capacitor e, por isso, podemos escrever

$$Q(y, t) = C V(y, t) = C V_0 \cos(\kappa y - \omega t) \quad (9.1)$$

onde  $C$ , a capacitância, é dada pela eq.(7.4):  $C = a\varepsilon_0\Delta y/b$ .

A densidade superficial de carga pode ser calculada dividindo a carga por um elemento de área das placas, e é dada por

$$\frac{Q(y, t)}{a\Delta y} = \sigma(y, t) = \frac{\varepsilon_0 V_0}{b} \cos(\kappa y - \omega t). \quad (9.2)$$

Entre as placas existe um campo elétrico  $\vec{E} = E \hat{k}$ , vertical, cujo módulo no ponto  $y$  é dado pela função

$$E(y, t) = \frac{\sigma(y, t)}{\varepsilon_0} = \frac{V_0}{b} \cos(\kappa y - \omega t). \quad (9.3)$$

Assim, na linha, as densidades de carga e o campo elétrico podem ser representados como na Fig. 9.1. À medida que o tempo passa, os “desenhos” das cargas e campos elétricos movem-se para a direita, com a velocidade  $c$ .

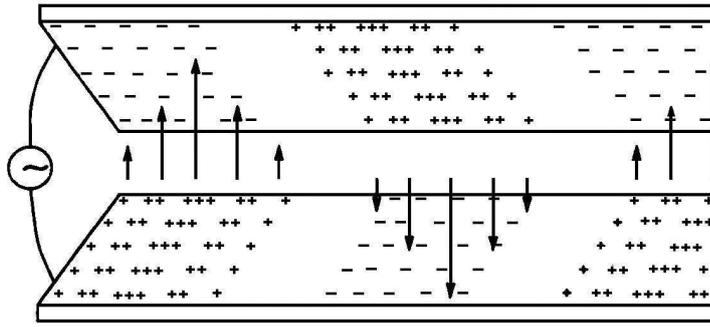


Figura 9.1: Um esboço das cargas nas placas e campo elétrico na linha de transmissão, em um dado instante.

As correntes na linha de transmissão são obtidas a partir da relação

$$I(y, t) = \frac{V(y, t)}{Z_{LT}}, \quad (9.4)$$

onde  $Z_{LT}$  representa a impedância da parte da linha à direita do ponto  $y$ . Como a linha é considerada infinita, o valor dessa impedância é dado pela eq.(8.3). Por isso,

$$I(y, t) = V_0 \frac{a}{b} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos(\kappa y - \omega t). \quad (9.5)$$

O campo magnético  $\vec{B} = B\vec{i}$  é horizontal, paralelo ao eixo  $x$ . O seu módulo, obtido a partir da lei de Ampère, usando o caminho indicado na figura 7.2(c), é dado por

$$B(y, t) = \frac{\mu_0}{a} I(y, t) = \frac{V_0}{bc} \cos(\kappa y - \omega t). \quad (9.6)$$

As correntes e campo magnético na linha são mostrados na fig. 9.2. Neste caso, também, os “desenhos” da corrente e campos magnéticos movem-se para a direita, com velocidade  $c$ .

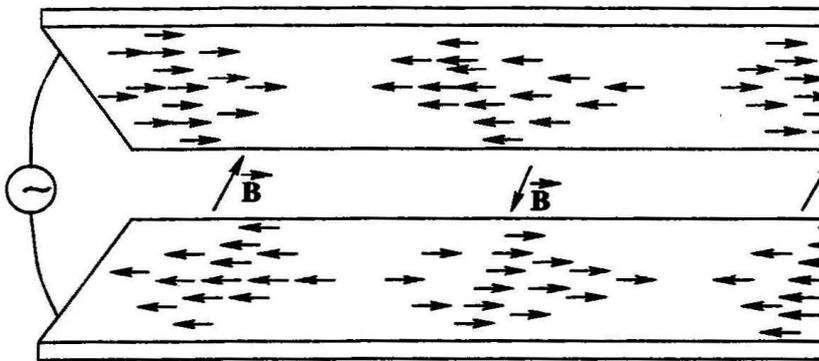


Figura 9.2: Esboço das correntes e campo magnético na linha de transmissão.

## • os resultados

Uma linha de transmissão ligada a uma fonte de tensão possui cargas e correntes nas suas faces internas e campos elétrico e magnético em seu interior. No caso de uma linha alimentada por uma fonte com variação cossenoidal, os comportamentos dessas grandezas, ao longo da linha e em função do tempo, são descritos pelas funções

$$\sigma(y, t) = \frac{\varepsilon_0 V_0}{b} \cos(\kappa y - \omega t), \quad (9.7)$$

$$I(y, t) = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} V_0 \cos(\kappa y - \omega t), \quad (9.8)$$

$$E(y, t) = \frac{V_0}{b} \cos(\kappa y - \omega t), \quad (9.9)$$

$$B(y, t) = \frac{V_0}{bc} \cos(\kappa y - \omega t). \quad (9.10)$$

É importante notar que todas estas funções são proporcionais a  $V_0$  e estão em fase. Assim, os máximos da carga e da corrente coincidem, o mesmo acontecendo com os máximos das intensidades dos campos. O fato de todas estas grandezas terem a mesma dependência do tempo e da posição indica que todas elas se propagam de mesma maneira pelo interior da linha. A velocidade desta propagação, é a mesma da tensão,  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ , eq.(8.12).

## • comprimentos de onda

Os comprimentos de onda dos efeitos eletromagnéticos numa linha de transmissão, alimentada por fontes cossenoidais, estão relacionadas às suas frequências:

$$\lambda = cT = \frac{c}{f}. \quad (9.11)$$

Por exemplo, usando o valor aproximado  $c = 3 \times 10^8$  m/s, encontramos para a rede doméstica, que tem a frequência de 60 Hz, o valor  $\lambda = [3 \times 10^8/60]$  m =  $5 \times 10^6$  m = 5.000 Km. Este comprimento é enorme quando avaliado na escala do corpo humano ou de edifícios ou de cidades, sendo da ordem de grandeza do raio da Terra. No caso das rádios FM, que emitem em frequências em torno de 100 MHz as ondas têm comprimentos de onda da ordem de  $\lambda = 3 \times 10^8/10^8$ m = 3m.

## • densidade de carga

Para compreender melhor o funcionamento de uma linha de transmissão, consideramos um sistema formado por duas placas de cobre, paralelas, com 1 cm de largura, 0,1 mm de espessura e separadas pela distância de 2 mm, no interior do qual existe o vácuo. Essa linha é alimentada por uma fonte que varia cossenoidalmente, com amplitude 180V e frequência de 60 Hz.

A densidade superficial de carga associada à tensão na linha de transmissão é dada pela eq.(9.7) e sua amplitude, neste exemplo, vale

$$\sigma_0 = \frac{\varepsilon_0 V_0}{b} = \frac{180}{(4\pi \times 9 \times 10^9) \times (2 \times 10^{-3})} = 0,8 \times 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}.$$

Sabendo que a carga do elétron tem módulo  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{C}$ , podemos concluir que esse valor de  $\sigma_0$  corresponde a uma densidade superficial de elétrons dada por

$$\frac{\sigma_0}{e} = \frac{0,8 \times 10^{-6}}{1,6 \times 10^{-19}} = 0,5 \times 10^{13} \text{ elétrons/m}^2.$$

Essa densidade superficial de carga em cada uma das superfícies internas da linha representa um excesso ou falta de elétrons relativamente à quantidade de elétrons livres normalmente existente nestas superfícies.

O cobre, como os demais metais, é formado por uma rede iônica bastante estável, no interior da qual movem-se os elétrons livres. No cobre, a densidade volumétrica de elétrons livres vale  $N = 8,4 \times 10^{28} \text{ elétrons/m}^3$ . Supondo que estes elétrons estejam uniformemente distribuídos pelo interior do metal, podemos pensar que existem  $N_L = N^{1/3} = 4,4 \times 10^9$  elétrons ao longo de cada comprimento de 1 metro. Como existe aproximadamente um elétron livre por íon de cobre, esse número corresponde a uma distância  $d = 2,3 \times 10^{-10} \text{ m}$  entre dois íons vizinhos. Essa distância é característica da espessura de cada camada de íons no interior do metal. Ela também indica que, em média, existem um íon e um elétron livre dentro de cada cubo de lado  $d$  no interior do metal. Assim, o número de elétrons livres por  $\text{m}^2$  na superfície do cobre é dado por

$$N_L^2 = 1,9 \times 10^{19} \text{ elétrons/m}^2.$$

A magnitude do *excesso* de elétrons relativamente ao número de elétrons livres na superfície do metal é dada por

$$\frac{\sigma_0}{e} \frac{1}{N_L^2} = \frac{0,5 \times 10^{13}}{1,9 \times 10^{19}} = 0,3 \times 10^{-6}.$$

Em outras palavras, a densidade  $\sigma_0$  corresponde aproximadamente a um elétron excedente para cada três milhões de elétrons livres existentes na superfície do metal. Se considerarmos todos os elétrons existentes no volume do metal, esta proporção torna-se muito menor ainda. A densidade relativa calculada acima mostra que é legítimo considerar que as cargas na linha de transmissão são fenômenos superficiais, envolvendo apenas algumas camadas de átomos na parte *externa* do metal. O mesmo vale para as correntes na linha, já que elas são devidas ao movimento dos *excessos* de carga.

### • a corrente elétrica

A função  $I(y, t)$ , dada pela eq.(9.8), descreve as correntes elétricas ao longo da linha de transmissão. Esse resultado indica que os excessos de carga movem-se com a velocidade

da luz, ao longo da linha. Isso pode parecer contraditório com a teoria da relatividade, já que elétrons têm massa e, portanto, não podem se mover com a velocidade da luz. Entretanto, esta contradição é apenas aparente. Quem se move com a velocidade da luz é o *excesso* de elétrons, não os próprios elétrons. Estes se movem com velocidades bem mais baixas.

Existe uma relação entre as funções  $\sigma(y, t)$  e  $I(y, t)$  que descrevem, respectivamente, os excessos de carga e os movimentos destes excessos. Essa relação é um pouco sutil e precisa ser pensada com atenção.

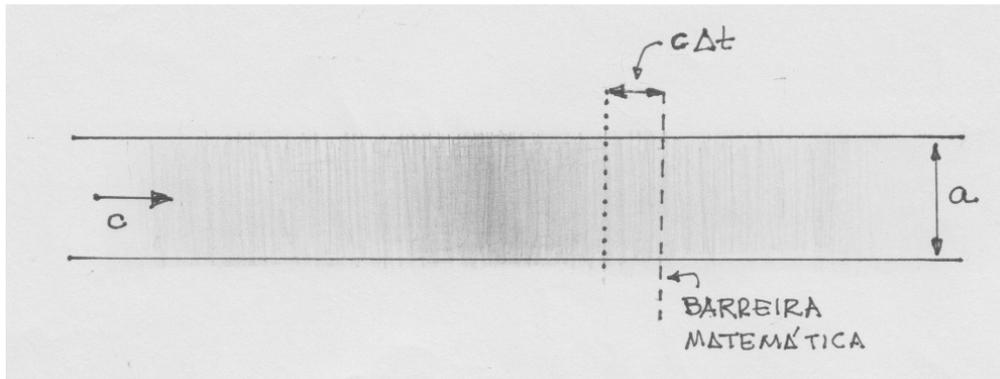


Figura 9.3: Representação da densidade de carga na face interna de um condutor da linha de transmissão em um dado instante.

A Fig. 9.3 representa a densidade de carga  $\sigma(y, t)$  em uma das faces internas da linha de transmissão, em um instante fixo. Para calcular a corrente elétrica em um dado ponto, é preciso colocar ali uma barreira matemática e calcular a quantidade de carga  $\Delta q$  que a atravessa num intervalo de tempo  $\Delta t$ . Como os excessos de carga se movem para a direita com velocidade  $c$ , esta carga é dada por

$$\Delta q(y, t) = a c \Delta t \sigma(y, t) \quad (9.12)$$

e, conseqüentemente, a corrente vale

$$\frac{\Delta q(y, t)}{\Delta t} = I(y, t) = a c \sigma(y, t). \quad (9.13)$$

Este resultado está de acordo com as eqs.(9.7) e (9.8) e indica que a corrente envolve o produto da densidade de carga pela velocidade de propagação da onda. Ele mostra que a corrente é devida ao arrastamento da densidade de carga. Como a densidade representa o excesso de cargas num ponto, a corrente corresponde ao movimento desse excesso de cargas. É preciso ter cuidado com a eq.(9.13) e notar que a função  $q(y, t)$  representa a quantidade de carga que atravessa a barreira matemática por unidade de tempo e não deve ser confundida com a função  $Q(y, t)$ , que corresponde à carga contida num trecho de comprimento  $\Delta y$  da linha de transmissão, e é dada por

$$Q(y, t) = a \Delta y \sigma(y, t). \quad (9.14)$$

Sua derivada temporal, calculada usando a eq.(9.7), vale

$$\frac{\partial Q(y, t)}{\partial t} = -a \Delta y \frac{\epsilon_0 V_0}{b} \omega \sin(\kappa y - \omega t). \quad (9.15)$$

Este resultado envolve a função seno e é completamente diferente do lado direito da eq.(9.13). Isso acontece porque a derivada temporal da função  $Q(y, t)$  deve ser entendida no contexto da equação da continuidade e  $\partial Q(y, t)/\partial t$  representa a variação da concentração de carga num dado ponto da linha. No caso da figura 9.3, ela corresponde à diferença entre as cargas que *entram* pela linha pontilhada e *saem* pela barreira matemática, por unidade de tempo.

A corrente  $I(y, t)$  na linha de transmissão pode ter valores positivos e negativos. No contexto da figura 9.3, correntes positivas correspondem a excessos de cargas positivas que se movem para a direita enquanto que correntes negativas são produzidas por excessos de cargas negativas, que *também* se movem para a direita.

### • a velocidade dos elétrons e a velocidade da onda

Na linha de transmissão, as ondas de cargas e correntes se movem com velocidade  $c$ . Esses resultados podem nos induzir a pensar que, neste processo, os elétrons também se movem com velocidade  $c$ , o que estaria em contradição com a relatividade. Nesta seção, mostramos que essa ideia *não* é correta e que as velocidades individuais dos elétrons são bastante baixas. Para tanto, consideramos a Fig. 9.4, que mostra em detalhe um trecho de uma das lâminas que formam a linha de transmissão, no caso em que ela é alimentada por uma fonte cuja tensão é  $V(t) = V_0 \cos \omega t$ . Essa lâmina é metálica e, portanto, constituída de íons positivos e elétrons livres. Esses dois tipos de densidade de carga são representados, na fig. 9.4, por hachuras em direções diferentes. Nas regiões em que as duas densidades coexistem e se superpõem, a densidade volumétrica total de cargas  $\rho$  é nula. Entretanto, nas superfícies internas, nas quais o metal está em presença do campo elétrico, os elétrons são levemente puxados para fora do metal ou empurrados para dentro dele, dependendo do sentido desse campo. Na situação da figura o campo  $\vec{E}$  é paralelo ao eixo  $z$  e os movimentos dos elétrons ocorrem, também, na direção  $z$ . Por isso, o deslocamento de um elétron que está num ponto de coordenada  $y$  da superfície da lâmina metálica é descrito por um vetor

$$\vec{r}(y, t) = r_0 \hat{k} \cos(\kappa y - \omega t), \quad (9.16)$$

medido em relação à superfície da densidade de íons positivos. Assim, a primeira conclusão importante desta discussão é que cada elétron descreve um movimento harmônico simples numa direção *ortogonal* à direção de propagação de onda.

A velocidade de um elétron que oscila na superfície do metal é dada por

$$\vec{v}(y, t) = \frac{d\vec{r}(y, t)}{dt} = -r_0 \omega \hat{k} \sin(\kappa y - \omega t). \quad (9.17)$$

A amplitude  $r_0$  dessa oscilação pode ser calculada considerando uma região de largura  $\Delta y$  em torno do ponto  $P$  da fig. 9.4. Ali existe uma densidade de carga *negativa* de módulo

$\sigma_0$ , descrita pela eq.(9.7). Essa densidade permite-nos calcular a carga máxima contida em uma pequena área de lados  $a$  e  $\Delta y$ , sobre a superfície interna da fita, como sendo

$$\Delta q = \sigma_0 a \Delta y . \quad (9.18)$$

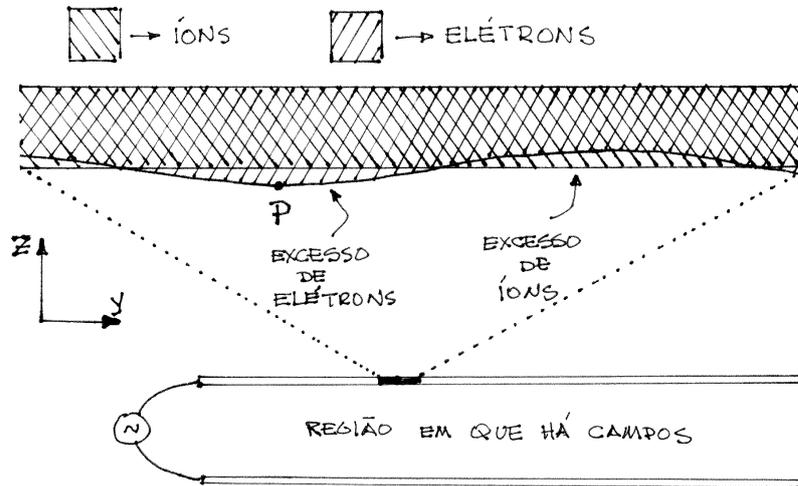


Figura 9.4: Representação dos íons e elétrons em um trecho do metal da linha de transmissão.

Por outro lado, a fig. 9.4 informa que a carga dada pela eq.(9.7) está, na verdade, distribuída em um pequeno *volume* de lados  $a$ ,  $\Delta y$  e  $r_0$ . Por isso a carga  $\Delta q$  também pode ser escrita como

$$\Delta q = \rho a \Delta y r_0 , \quad (9.19)$$

com  $\rho = eN$ , sendo  $N$  a densidade volumétrica de elétrons livres no metal. Comparando as eqs.(9.18) e (9.19), concluímos que

$$r_0 = \frac{\sigma_0}{eN} . \quad (9.20)$$

No caso da linha de transmissão discutida no exemplo 1,

$$r_0 = \frac{0,8 \times 10^{-6} \text{C/m}^2}{[1,6 \times 10^{-19} \text{C}] \times [8,4 \times 10^{28} / \text{m}^3]} = 0,06 \times 10^{-15} \text{m} .$$

Lembrando que  $10^{-15} \text{m}$  é a escala do tamanho de um próton, vemos que  $r_0$  é a amplitude de uma oscilação bastante pequena! Se ela for alimentada por uma fonte que oscila com  $60 \text{Hz}$ , a amplitude da velocidade do elétron na eq.(9.17) vale

$$v_0 = \omega r_0 = [2\pi 60 / \text{s}] \times [0,06 \times 10^{-15} \text{m}] = 2,3 \times 10^{-15} \text{m/s} ,$$

que é, de fato, muito menor do que a velocidade  $c$  de propagação da onda.

• os campos

Em todos os pontos do interior da linha de transmissão, os módulos dos campos elétrico e magnético são dados pelas eqs.(9.9) e (9.10). Introduzindo os versores das respectivas direções temos

$$\vec{E}(y, t) = \frac{V_0}{b} \hat{k} \cos(\kappa y - \omega t), \tag{9.21}$$

$$\vec{B}(y, t) = \frac{V_0}{bc} \hat{i} \cos(\kappa y - \omega t). \tag{9.22}$$

Esses campos possuem quatro propriedades muito importantes que, como veremos adiante, são compartilhadas por todas ondas eletromagnéticas que se propagam no vácuo.

1.  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  satisfazem equações de onda.
2. Os módulos de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , em cada ponto e em cada instante, são relacionados por

$$|\vec{E}| = |\vec{B}|/c \tag{9.23}$$

3.  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são perpendiculares entre si.
4.  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são transversais às suas direções de propagação,

As Figs. 9.5a. e 9.5b. representam os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  no interior da linha de transmissão, em dois instantes diferentes.

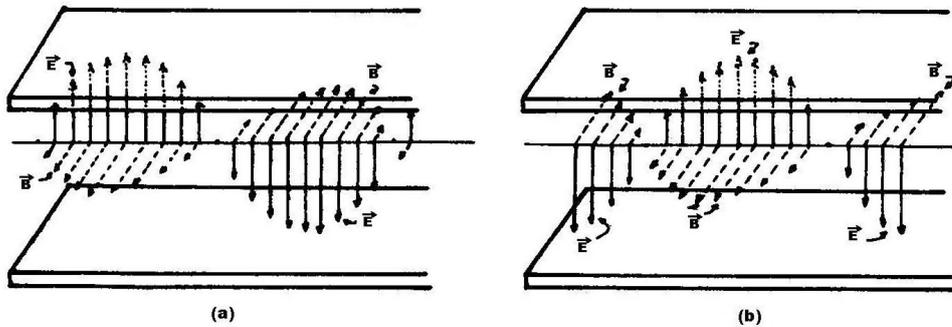


Figura 9.5: Campos elétrico  $\vec{E}$  (a) e magnético  $\vec{B}$  (b) na linha de transmissão.

• a propagação dos campos

No interior da linha de transmissão, o campo elétrico é criado pelas cargas concentradas em certos pontos e o campo magnético é devido ao movimento destas cargas. No cálculo de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  usamos, respectivamente, as leis de Gauss e Ampère na forma integral. Assim, do ponto de vista destas leis, é razoável pensar que as cargas criam  $\vec{E}$  e as correntes criam  $\vec{B}$ , sendo as variações destes campos com o tempo explicadas pelas variações das suas fontes com o tempo.

Esta não é, entretanto, a única explicação possível para o que acontece com os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  no interior da linha de transmissão. A explicação alternativa, que discutimos adiante corresponde a uma interpretação dos mesmos fenômenos, de um ponto de vista diferente. Ela é mais fundamental que a anterior e explica porque a velocidade de propagação das ondas no interior da linha de transmissão é a mesma que a da luz. Ela é baseada na ideia que, em cada ponto, o campo magnético, por ser variável com o tempo, cria um campo elétrico. Este, entretanto, também varia com o tempo, gerando um campo magnético. Mas esse campo gera um campo elétrico, que por sua vez também gera...

Para compreender melhor esta explicação alternativa, imagine um microlaboratório de dimensões  $dx, dy, dz$ , no interior da linha de transmissão. Com um pouco mais de esforço da imaginação, coloque-se no interior do microlaboratório, sentado a uma mesa, como mostra a Fig. 9.6.

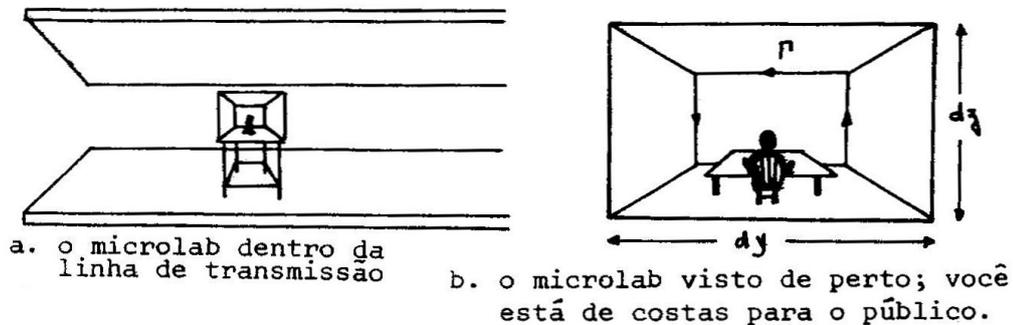


Figura 9.6: (a) O microlab dentro da linha de transmissão; (b) o microlab visto de perto; você está de costas para o público.

O microlaboratório é, agora, o seu universo. Usando detetores sensíveis, você consegue medir os campos elétrico e magnético no interior do laboratório. O campo elétrico é vertical e, em cada instante, uniforme ao longo de planos paralelos às paredes esquerda e direita, mas assume valores diferentes em cada uma dessas paredes. Com o passar do tempo, o vetor campo elétrico ora fura o chão, ora o teto do laboratório, ora de cima para baixo, ora de baixo para cima.

O campo magnético é horizontal, e também uniforme ao longo de planos paralelos às paredes esquerda e direita. Da mesma forma que o campo elétrico, o campo magnético é, em cada instante, diferente em cada uma das paredes. O vetor campo magnético ora entra no laboratório pela parede da frente, ora entra pela parede de trás.

Depois de efetuar muitas medidas, você consegue chegar às seguintes expressões para os campos elétrico e magnético na parede esquerda, situada no plano  $y = y_e$

$$\vec{E}_e = E_0 \hat{k} \cos(\kappa y_e - \omega t), \quad \vec{B}_e = B_0 \hat{i} \cos(\kappa y_e - \omega t). \quad (9.24)$$

Para a parede direita situada no plano  $y = y_d = y_e + \Delta y$ , é possível escrever

$$\vec{E}_d = E_0 \hat{k} \cos(\kappa y_d - \omega t), \quad \vec{B}_d = B_0 \hat{i} \cos(\kappa y_d - \omega t). \quad (9.25)$$

Os seus experimentos mostram que, em cada instante,

$$\vec{E}_e \neq \vec{E}_d, \quad \vec{B}_e \neq \vec{B}_d. \quad (9.26)$$

Dentro do microlab, você observa que os campos elétricos e magnéticos nas paredes direita e esquerda são diferentes. O seu problema passa a ser, então, elaborar uma explicação para esta diferença, baseada em algo existente no *interior* do microlaboratório. Não vale olhar para fora!

Parte do problema é resolvido pela lei de Faraday, que permite atribuir a diferença entre  $E_e$  e  $E_d$  à variação do campo magnético com o tempo. Para compreender isso, escrevemos a lei de Faraday para o circuito  $\Gamma$  da Fig. 9.5, que delimita a parede à sua frente no microlaboratório, cuja área é  $S$ .

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{c} = - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \hat{n} dS. \quad (9.27)$$

Se o caminho  $\Gamma$  é percorrido no sentido anti-horário, a normal  $\hat{n}$  corresponde ao versor  $\hat{i}$  e, temos

$$(E_d - E_e)dz = - \int \frac{\partial B_x}{\partial t} dS. \quad (9.28)$$

Deste modo, podemos afirmar que a diferença entre  $E_e$  e  $E_d$  é causada pelo campo magnético variável com o tempo. O fato de o microlab ser muito pequeno permite que se retire  $\partial B_x / \partial t$  do interior da integral. Temos, então,

$$E_d - E_e = - \frac{\partial B_x}{\partial t} dy. \quad (9.29)$$

O campo elétrico é função de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $t$ , sendo sua diferencial total dada por

$$d\vec{E} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dt. \quad (9.30)$$

No caso do microlaboratório

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = 0, \quad (9.31)$$

e, se os campos nas paredes esquerda e direita forem considerados num instante fixo, podemos escrever

$$E_d - E_e = \frac{\partial E_z}{\partial y} dy. \quad (9.32)$$

Substituindo esta expressão na eq.(9.29), obtemos

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = - \frac{\partial B_x}{\partial t}. \quad (9.33)$$

Esta equação corresponde à lei de Faraday na forma diferencial e exprime a ideia que a variação do campo magnético dentro do microlaboratório é responsável pela diferença entre os campos elétricos nas paredes esquerda e direita.

De modo totalmente análogo você pode atribuir a diferença entre  $B_e$  e  $B_d$  à variação do campo elétrico com o tempo. Para tanto, basta usar a equação de Ampère-Maxwell na forma diferencial

$$-\frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\partial E_z}{\partial t}. \quad (9.34)$$

Resumindo o conhecimento que você, que vive no microlab, tem do seu universo: por meio de detetores foi possível fazer um mapeamento dos vetores  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  em todos os pontos do laboratório em diversos instantes; a partir deste mapeamento, foi possível concluir que  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  nas paredes esquerda e direita são funções cíclicas do tempo dadas pelas equações (9.21) e (9.22); com base nas equações de Maxwell foi possível atribuir a diferença entre os campos elétricos nas paredes esquerda e direita à variação do campo magnético com o tempo e a variação espacial de  $\vec{B}$  também foi explicada de modo análogo.

Um aspecto muito importante dessas explicações é que elas se baseiam somente em fatos que ocorrem *dentro* do laboratório. Deste modo, as equações de Maxwell permitem que você descreva o que acontece no laboratório usando somente fatos ocorridos dentro dele. Note que, para explicar as variações dos campos ocorridos dentro do microlab, você não precisou saber que entidades haviam criado os campos no seu exterior. Em outras palavras, as equações de Maxwell permitem que você tenha um *conhecimento autônomo* do seu pequeno universo.

No microlab, então, existem campos elétricos e magnéticos que variam com o tempo, gerando campos magnéticos e elétricos, respectivamente. Tome, por exemplo, o campo magnético: ele, ao mesmo tempo, é criado pela variação do campo elétrico com o tempo e cria a variação espacial do mesmo campo elétrico. Em outras palavras, as variações do campo elétrico com o tempo e com o espaço estão ligadas. A criação do campo magnético é descrita pela equação (9.34), enquanto que a do campo elétrico o é pela eq. (9.33). Para achar a ligação entre as variações espaciais e temporais do campo elétrico, basta eliminarmos  $\vec{B}$  dessas duas equações. Derivando a eq. (9.33) em relação a  $y$ , obtemos

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 B_x}{\partial y \partial t}. \quad (9.35)$$

Usando a eq.(9.34) encontramos

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0. \quad (9.36)$$

De modo análogo podemos obter

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = 0. \quad (9.37)$$

Estas duas expressões são equações de onda unidimensionais discutidas na aula 8 e, nos dois casos, a velocidade de propagação é

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c. \quad (9.38)$$

Na aula 8 vimos, também, que essa velocidade é idêntica a  $c$ , a velocidade da luz. Este resultado fornece uma pista importante acerca dos mecanismos básicos que determinam o que acontece na linha de transmissão. Cargas, correntes, tensão e campos se propagam com a velocidade da luz no interior da linha porque, no vácuo, os campos se propagam com essa velocidade. A propagação dos campos é o efeito básico, primordial. Ao se propagarem, os campos arrastam com eles as densidades de carga e corrente. Na verdade, uma linha de transmissão é um *guia de onda*, o seu papel é conduzir a onda de um lugar a outro. Nesse processo, a onda se propaga de maneira autônoma.

No interior do microlab não existem cargas ou correntes elétricas. Mas, mesmo assim, podem haver lá dentro campos elétricos e magnéticos que, por variarem com o tempo, criam campos magnéticos e elétricos, respectivamente. Usando as equações de Maxwell, podemos entender tudo o que acontecia com esses campos dentro do microlab *de modo autônomo*, ou seja, sem precisar saber o que acontece fora dele.

Feitos esses comentários, você pode abandonar o microlab, e retornar ao macrolab, ou seja, à Terra, cheia de luz. É importante perceber que, por exemplo, quando se estuda a luz do Sol num laboratório na Terra, tudo se passa como se estivéssemos no microlab. Sim, porque estudamos a luz numa região do espaço distante das cargas que a produziu. E uma das características das equações de Maxwell é que elas permitem o estudo das ondas eletromagnéticas de modo independente de como elas foram produzidas. Como no microlab.

## • exercícios

1. A velocidade de propagação da tensão no interior da linha de transmissão é  $v = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  e independe de todas as características particulares do sistema considerado. Qual o significado disto?
2. (**difícil**) Neste problema  $I(y, t)$  é diferente de  $dQ(y, t)/dt$ . Por que isto ocorre ?
3. Uma linha de transmissão formada por duas placas planas e paralelas, está sujeita a tensão  $V(t) = V_0 \cos \omega t$ . Faça um desenho representando cargas, correntes e os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  nos instantes:
  - a)  $t = \pi/2\omega$ ;
  - b)  $t = 5\pi/\omega$ .
4. Descreva o comportamento de uma carga elétrica e de uma bússola colocadas no interior da linha de transmissão.

# Capítulo 10

## linha de transmissão: energia

### • potência e vetor de Poynting

Quando uma fonte de tensão é acoplada a uma linha de transmissão, as superfícies internas do metal ficam recobertas por densidades de cargas que se movem em direção ao interior da linha e, na região entre elas, passam a existir campos elétricos e magnéticos. São esses campos que carregam, ao longo da linha, a energia fornecida pela fonte, pois a eles está associada uma densidade volumétrica de energia dada por

$$u = \frac{dU}{dV} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 . \quad (10.1)$$

Essa energia é fornecida pelo gerador, e por isso, esta relacionada à potência e aos campos entre as placas.

A potência fornecida pelo gerador na extremidade da linha, que indicamos por  $P(y = 0, t)$ , pode ser escrita como

$$P(0, t) = V(0, t) I(0, t). \quad (10.2)$$

A tensão entre as placas vale, na extremidade

$$V(0, t) = |\vec{E}(0, t)| b, \quad (10.3)$$

onde  $b$  é a distância entre elas. Por outro lado, a eq.(9.6) da aula anterior nos permite escrever a corrente em termos do campo magnético na região entre as placas como

$$I(0, t) = \frac{a}{\mu_0} |\vec{B}(0, t)|. \quad (10.4)$$

Juntando esses resultados, expressamos a potência fornecida à linha de transmissão em termos de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , como

$$P(0, t) = \frac{|\vec{E}(0, t)| |\vec{B}(0, t)|}{\mu_0} ab. \quad (10.5)$$

Essa equação nos dá a energia fornecida ao sistema, por unidade de tempo, no plano  $y = 0$ , em termos dos campos elétrico e magnético nesse mesmo plano. Se considerarmos um plano  $y$  qualquer da linha de transmissão, é o trecho situado entre este plano e o gerador que “fornece” energia ao restante do sistema<sup>1</sup>. O potencial aí vale  $V(y, t)$ , a corrente  $I(y, t)$ , e o mesmo cálculo anterior nos leva a

$$P(y, t) = \frac{|\vec{E}(y, t)||\vec{B}(y, t)|}{\mu_0} ab. \quad (10.6)$$

A grandeza  $P(y, t)$  representa a energia que, por unidade de tempo, passa através do plano  $y$  em direção ao resto da linha. Se notarmos que essa energia é proporcional à área entre as placas  $ab$ , é natural introduzir a ideia de fluxo de energia por unidade de área e de tempo como sendo

$$\frac{P(y, t)}{ab} = \frac{|\vec{E}(y, t)||\vec{B}(y, t)|}{\mu_0}. \quad (10.7)$$

Esta expressão representa a energia que, em um certo instante, atravessa o plano  $y$ , por unidade de tempo e de área. Como esse fluxo de energia tem também uma direção e um sentido, é útil construirmos um vetor com módulo dado pela eq.(10.7). Lembrando que  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são perpendiculares entre si e também ao eixo  $y$ , e que a energia flui ao longo da linha, este vetor é definido como

$$\vec{S}(y, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(y, t) \times \vec{B}(y, t). \quad (10.8)$$

O símbolo  $\vec{S}$  é usualmente atribuído a essa grandeza, conhecida como vetor de Poynting, em referência ao físico inglês que o introduziu no final do século XIX. A relação entre  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  e  $\vec{S}$  é mostrada na Fig. 10.1.

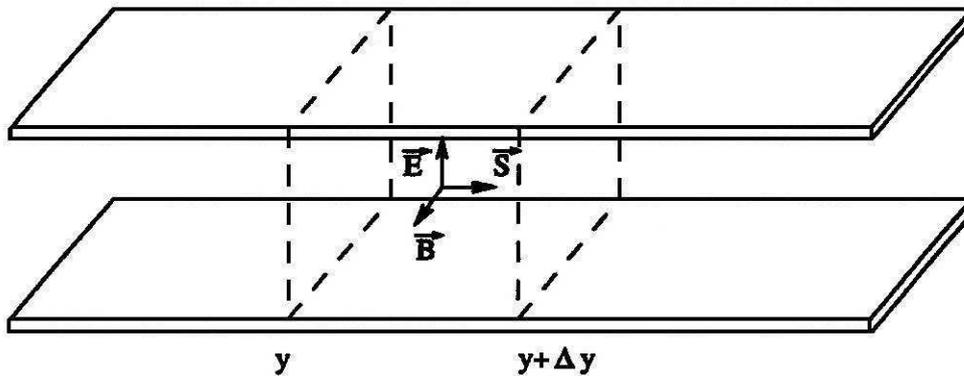


Figura 10.1: Os campos elétrico e magnético e o vetor de Poynting no interior da linha de transmissão.

<sup>1</sup>De modo geral chamamos de plano  $y$  o plano perpendicular ao eixo  $y$ , e que passa pelo ponto  $y$ .

## • a conservação da energia e o teorema de Poynting

No interior da linha de transmissão, existem campos elétricos e magnéticos e, portanto, existe também uma quantidade de energia armazenada em cada região. A energia é uma grandeza conservada e podemos expressar matematicamente essa conservação em analogia ao caso da carga elétrica. A conservação da carga é representada pela equação da continuidade

$$\oiint_A \vec{j} \cdot \hat{n} dA = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV, \quad (10.9)$$

onde  $A$  é uma superfície fechada e  $V$  é o volume encerrado por essa superfície. A mesma ideia pode, também, ser expressa na forma diferencial

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (10.10)$$

No caso da linha de transmissão que estudamos, consideramos apenas a energia eletromagnética, já que foram desprezadas perdas de energia devidas ao efeito Joule. O vetor  $\vec{S}$  é análogo a  $\vec{j}$ , pois ele está relacionado aos fluxos de energia através de superfícies. O análogo à densidade volumétrica de carga  $\rho$  é a densidade volumétrica de energia  $u$ , dada pela eq.(10.1). Assim, a conservação da energia eletromagnética é expressa por

$$\oiint_A \vec{S} \cdot \hat{n} dA = -\frac{d}{dt} \iiint_V u dV \quad (10.11)$$

ou, alternativamente,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\frac{\partial u}{\partial t}, \quad (10.12)$$

onde

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}. \quad (10.13)$$

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2. \quad (10.14)$$

Este resultado representa o *teorema de Poynting*, e é válido para qualquer sistema eletromagnético no vácuo. A seguir, apresentamos a sua demonstração formal, usando as equações de Maxwell na forma diferencial.

Para dois vetores  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  quaisquer, vale a relação

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}), \quad (10.15)$$

que pode ser demonstrada calculando explicitamente o produto vetorial e, em seguida, o divergente. Assim<sup>2</sup>

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \partial_x(A_y B_z - A_z B_y) + \partial_y(A_z B_x - A_x B_z) + \partial_z(A_x B_y - A_y B_x). \quad (10.16)$$

<sup>2</sup>Introduzimos aqui uma notação mais econômica para derivadas parciais, escrevendo  $\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \partial_x$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \partial_y$ ,  $\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \partial_z$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \partial_t$ .

Efetuada as derivações temos

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\partial_x A_y) B_z - (\partial_x A_z) B_y + (\partial_y A_z) B_x - (\partial_y A_x) B_z \\ &+ (\partial_z A_x) B_y - (\partial_z A_y) B_x - (A \leftrightarrow B).\end{aligned}\quad (10.17)$$

Reorganizando os termos, encontramos

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= [\partial_y A_z - \partial_z A_y] B_x + [\partial_z A_x - \partial_x A_z] B_y \\ &+ [\partial_x A_y - \partial_y A_x] B_z - (A \leftrightarrow B),\end{aligned}\quad (10.18)$$

que é o resultado (10.15). Aplicando-o ao vetor  $\vec{S}$ , escrevemos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0} [(\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{B} - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})].\quad (10.19)$$

Os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  estão *entre as placas*, ou seja, numa região onde não existem cargas e correntes. Como as equações de Maxwell na forma diferencial são locais e relacionam  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  num ponto com  $\rho$  e  $\vec{j}$  no mesmo ponto, para o *interior* da linha valem as relações

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},\quad (10.20)$$

já que  $\rho = 0$  e  $\vec{j} = 0$  naquela região. Assim,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{S} &= \frac{1}{\mu_0} \left[ -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] = -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{\mu_0} \frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{2} + \varepsilon_0 \frac{\vec{E} \cdot \vec{E}}{2} \right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2\mu_0} B^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \right] = -\frac{\partial u}{\partial t}.\end{aligned}\quad (10.21)$$

### • exemplo 1

Cálculo da energia  $\mathcal{U}$  que flui pela linha de transmissão, alimentada por uma fonte de tensão  $V(t) = V_0 \cos \omega t$ , durante um período  $T$ . Existem várias maneiras de resolver este problema.

**solução 1.** Como não há dissipação, a energia que flui pela linha é a que foi fornecida pela fonte em instantes anteriores. A energia fornecida pela fonte entre os instantes  $t$  e  $t + T$  independe de  $t$  e pode ser expressa, em termos da corrente  $I(t)$  dada pela eq.(9.5). Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \int_0^T dt V(t) I(t) = \int_0^T dt V_0 \cos(\omega t) \frac{V_0 a}{b} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cos(\omega t) \\ &= \frac{T}{2} V_0^2 \frac{a}{b} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = \frac{V_0^2}{2} \frac{2\pi}{\omega} \frac{a}{b} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}.\end{aligned}\quad (10.22)$$

**solução 2.** Uma alternativa consiste em notar que a energia que flui pela linha durante um período é igual à energia distribuída em um comprimento de onda no seu interior. Essa idéia é expressa por

$$\mathcal{U} = \iiint dV \left[ \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right], \quad (10.23)$$

onde a integral é efetuada sobre o volume  $V = a b \lambda$ . Como  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  dependem apenas de  $y$ , temos

$$\mathcal{U} = ab \int_0^\lambda dy \left[ \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right] \quad (10.24)$$

Usando os valores de  $E$  e  $B$  dados pelas eqs.(9.9) e (9.10), e a eq. (8.13) encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= ab \int_0^\lambda dy \left[ \frac{\varepsilon_0 V_0^2}{2 b^2} \cos^2(\kappa y - \omega t) + \frac{\mu_0 \varepsilon_0 V_0^2}{2\mu_0 b^2} \cos^2(\kappa y - \omega t) \right] \\ &= \frac{a}{b} \frac{V_0^2}{2} \varepsilon_0 \frac{2\pi}{\kappa} = \frac{1}{2} \frac{a}{b} V_0^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{2\pi}{\omega}. \end{aligned} \quad (10.25)$$

**solução 3.** Uma outra possibilidade consiste em calcular a energia que flui através da linha usando o vetor de Poynting. Nesse caso, escrevemos

$$\mathcal{U} = \int_0^T dt \left[ \iint_A \vec{S} \cdot \hat{n} dA \right], \quad (10.26)$$

onde  $A$  é a área de uma seção transversal à linha.

Na situação da Fig. 10.1, o vetor  $\vec{S} = S\hat{j}$  e a normal à área também é dada pelo versor  $\hat{j}$ . Deste modo,  $\vec{S} \cdot d\vec{A} = S dA$  e temos

$$\mathcal{U} = \int_0^T dt \left[ \iint_A S dA \right]. \quad (10.27)$$

O passo seguinte consiste em notar que o módulo de  $\vec{S}$  é constante sobre a superfície  $A$ , o que permite escrever

$$\iint_A S dA = S \iint_A dA = S ab. \quad (10.28)$$

O módulo de  $\vec{S}$  é obtido a partir da eq.(10.8) e usando os resultados (9.9) e (9.10), escrevemos

$$\iint_A \vec{S} \cdot d\vec{A} = \frac{a}{b} V_0^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cos^2(\kappa y - \omega t). \quad (10.29)$$

Portanto,

$$U = \int_0^T dt \frac{a}{b} V_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos^2(\kappa y - \omega t) = \frac{1}{2} \frac{a}{b} V_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{2\pi}{\omega}. \quad (10.30)$$

### • exemplo 2

Cálculo do fluxo de energia em um trecho de fio metálico ligado a uma bateria, como na Fig. 10.2. Este é um caso muito interessante de aplicação do teorema de Poynting. A nossa questão consiste em saber por onde chega e quanto vale a energia dissipada no pedacinho de fio, cuja imagem ampliada aparece no lado direito da figura.

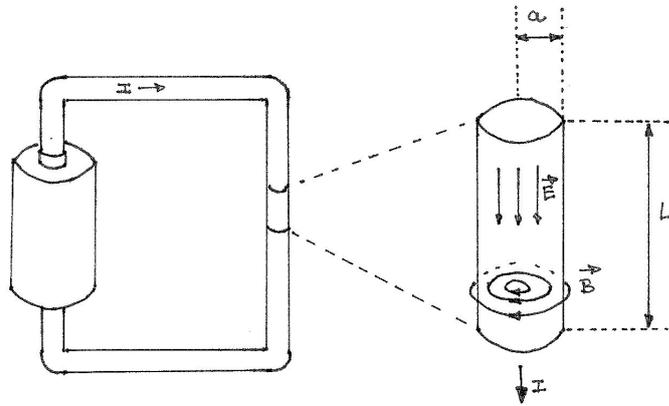


Figura 10.2: Campos e corrente em um trecho de um fio metálico ligado a uma bateria.

No interior do fio, o campo elétrico devido à bateria é relacionado à densidade de corrente  $\vec{j}$  por

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma}, \quad (10.31)$$

onde  $\sigma$  é a condutividade elétrica. Ela está relacionada à resistência  $R$  do pedacinho de fio por

$$\sigma = \frac{L}{\pi a^2 R}, \quad (10.32)$$

sendo  $\pi a^2$  a área da seção transversal do fio e  $L$ , o comprimento do pedaço considerado. O campo elétrico pode, assim, ser expresso como

$$\vec{E} = -\frac{I}{LR} \hat{e}_z, \quad (10.33)$$

sendo  $\hat{e}_z$  o versor na direção axial. O campo magnético no interior do fio, devido à corrente, é dado por

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \hat{e}_\theta, \quad (10.34)$$

onde  $r$  é a distância do ponto considerado ao eixo de simetria e  $\hat{e}_\theta$  é o versor da variação angular em coordenador cilíndricas. Esses resultados para  $\vec{E}$  e para  $\vec{B}$  velem para  $r$  variando desde o eixo do fio até a sua superfície. Por isso, na região  $0 \leq r \leq a$ , o vetor de Poynting vale

$$\vec{S} = -\frac{EB}{\mu_0} \hat{e}_r \quad (10.35)$$

sendo  $\hat{e}_r$  o versor radial em coordenadas cilíndricas. O sinal negativo nesta expressão é muito importante, pois ele indica que a energia eletromagnética fornecida pela bateria *entra* no fio radialmente, *através da sua superfície lateral*.

Usando os valores de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  dados por (10.33) e (10.34), para a superfície lateral ( $r = a$ ), obtemos

$$\vec{S} = -\frac{1}{\mu_0} \left( \frac{IR}{L} \right) \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \right) \hat{e}_r. \quad (10.36)$$

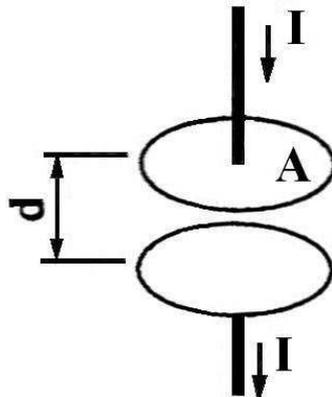
A potência *fornecida ao fio* através da sua superfície cilíndrica lateral vale, portanto,

$$P = \iint_A \vec{S} \cdot \hat{n} dA = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{IR}{L} \right) \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \right) 2\pi a L = RI^2. \quad (10.37)$$

Como não há acúmulo de energia no fio, a potência fornecida pela bateria é igual à dissipada pelo efeito Joule.

### • exercícios

1. A figura mostra um capacitor de placas paralelas, em processo de carga.



- a) Mostre que o vetor de Poynting  $\vec{S}$  é, em cada ponto, radial e aponta para dentro do volume cilíndrico compreendido entre as placas.

b) A relação entre o fluxo de energia por unidade de tempo que penetra na região entre as placas, calculado por integração do vetor de Poynting sobre a superfície lateral e a taxa de variação de energia eletrostática armazenada no capacitor é dada por

$$\iint_A \vec{S} \cdot \hat{n} dA = Ad \frac{d}{dt} \left( \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right).$$

Desprezando os efeitos de borda para o campo  $\vec{E}$ , demonstre esta relação.

**2.** Um gerador está ligado à extremidade de uma linha de transmissão, formada por duas placas planas e paralelas, de largura  $a$ , comprimento infinito e separadas por uma distância  $b$ . A tensão fornecida pelo gerador é  $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$ .

a) Represente as cargas ao longo da linha de transmissão no instante  $t = 7T/2$ , sendo  $T$  o período de oscilação de  $V(t)$ . Faça um gráfico desta carga em função da posição, para o mesmo instante.

b) Desenhe os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  no interior da linha, no mesmo instante do item anterior. Quais os valores máximos destes campos?

c) Escreva o vetor de Poynting no plano  $y$  e no instante  $t$ . Como ele se relaciona à tensão e corrente neste ponto?

**3.** Refaça o exercício 2 para o caso de uma linha de transmissão formada por um cabo coaxial de raios interno e externo  $a$  e  $b$ , na extremidade  $y = 0$  da qual é ligado um gerador que fornece uma tensão dado por  $V(t) = \cos(\omega t)$ .

# Capítulo 11

## ondas no vácuo

Ondas eletromagnéticas podem se propagar no vácuo, ou seja, em regiões do espaço onde não existem cargas ou correntes elétricas. A discussão desse tema será feita em duas partes: inicialmente, mostramos que as equações de Maxwell no vácuo levam a equações de onda para  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . Em seguida, passamos a estudar uma classe particular de soluções dessas equações, as ondas planas.

### • equação de onda

Numa região onde não há cargas ou correntes elétricas, temos  $\rho = 0$  e  $\vec{j} = 0$ . Nessa região, as equações de Maxwell são dadas por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (11.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (11.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (11.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (11.4)$$

Neste caso as leis de Gauss elétrica e magnética se tornam formalmente idênticas, enquanto as expressões (11.2) e (11.3) envolvem simultaneamente os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . As duas últimas podem ser desacopladas e obtemos uma equação para  $\vec{E}$  e outra para  $\vec{B}$ . Para tanto inicialmente calculamos o rotacional da eq. (11.2), dado por

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B}. \quad (11.5)$$

Usando a equação (11.3), obtemos

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (11.6)$$

Para calcular o lado esquerdo desta equação, usamos o fato de que o duplo rotacional de um vetor qualquer  $\vec{V}$  é igual a

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \left( \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2} \right). \quad (11.7)$$

Para demonstrar a relação (11.7), calculamos explicitamente o seu lado esquerdo em coordenadas cartesianas. O rotacional de  $\vec{V}$  é dado por

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = (\partial_y V_z - \partial_z V_y) \hat{i} + (\partial_z V_x - \partial_x V_z) \hat{j} + (\partial_x V_y - \partial_y V_x) \hat{k} \quad (11.8)$$

e o duplo rotacional vale

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) &= [\partial_y (\partial_x V_y - \partial_y V_x) - \partial_z (\partial_z V_x - \partial_x V_z)] \hat{i} \\ &+ [\partial_z (\partial_y V_z - \partial_z V_y) - \partial_x (\partial_x V_y - \partial_y V_x)] \hat{j} \\ &+ [\partial_x (\partial_z V_x - \partial_x V_z) - \partial_y (\partial_y V_z - \partial_z V_y)] \hat{k}. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Considere, por exemplo, a componente  $x$  deste resultado. Somando e subtraindo  $\partial^2 V_x / \partial x^2$  a ele e organizando os termos, obtemos

$$\begin{aligned} [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})]_x &= [\partial_x (\partial_x V_x + \partial_y V_y + \partial_z V_z) - (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) V_x] \\ &= [\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}]_x. \end{aligned} \quad (11.10)$$

A demonstração desta igualdade para as componentes  $y$  e  $z$  é feita de modo análogo, ficando provada a relação (11.7).

Assim, o duplo rotacional do campo elétrico é dado por

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \left( \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \right). \quad (11.11)$$

No vácuo o divergente do campo elétrico é nulo, como mostra a equação (11.1). Este resultado permite-nos escrever a equação (11.6) como

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (11.12)$$

As constantes  $\varepsilon_0$  e  $\mu_0$  estão relacionadas à velocidade de propagação da luz no vácuo pela eq.(8.16):  $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$  e, portanto,

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (11.13)$$

Esta é a equação de onda para o campo elétrico. A equação para o campo magnético pode ser obtida de modo análogo, a partir do rotacional da eq.(11.3), e é dado por

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (11.14)$$

As soluções das eqs.(11.13) e (11.14) descrevem ondas tridimensionais. Apesar de os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  aparecerem isoladamente nessas expressões, é muito importante notar que não existem ondas puramente elétricas ou puramente magnéticas, já que o acoplamento entre  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , determinado pelas equações de Maxwell (11.2) e (11.3), foi essencial à obtenção das equações de onda, e continua presente. Esse acoplamento apenas deixou de ser diretamente visível. Por isso, o correto é pensar em *ondas eletromagnéticas*.

### • luz é onda eletromagnética

Na obtenção das equações de onda para  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , usamos o resultado  $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ , apresentado pela primeira vez na aula 8, eq. (8.16), cabendo aqui um comentário sobre a sua importância histórica. Maxwell, ao estudar equações de onda dos campos elétrico e magnético, sugeriu que se medisse experimentalmente a velocidade de propagação. No entanto, na época, não havia aparelhos capazes de produzir variações do campo elétrico suficientemente rápidas para permitir a sua medição direta. Então, Maxwell sugeriu que se medissem cuidadosamente as constantes  $\mu_0$  e  $\varepsilon_0$ , de modo que essa velocidade pudesse ser obtida a partir de  $1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ . Feitas estas medidas, obteve-se  $1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \sim 300.000$  km/s. Mas esta era  $c$ , a velocidade de propagação da luz no vácuo, que à época de Maxwell já era bastante bem conhecida. A respeito desta igualdade numérica, A. D'Abro escreve<sup>1</sup> “*A conclusão era óbvia. A menos que fôssemos supor que esta extraordinária coincidência nos valores destas duas velocidades características, a da indução eletromagnética e a das ondas de luz, era devida ao acaso cego, não havia outra alternativa senão reconhecer que o que nós comumente chamávamos de um raio de luz não era nada mais que uma série de oscilações no campo eletromagnético, propagadas de ponto a ponto. Ondas eletromagnéticas e ondas luminosas eram, então, uma coisa só.*”

Deste modo, a igualdade numérica entre  $1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$  e  $c$  foi historicamente interpretada como a manifestação de algo mais profundo, a identidade entre ondas eletromagnéticas e luz.

### • ondas planas

As equações de onda para os campos elétrico e magnético, dadas pelas eqs.(11.13) e (11.14), envolvem as três coordenadas espaciais, além do tempo. Suas soluções correspondem, por isso, a ondas tridimensionais, cuja forma geral pode ser bastante complicada. Felizmente, o princípio da superposição permite que qualquer onda, por mais complicada que seja, possa ser decomposta em somas de ondas planas monocromáticas. E, como veremos adiante, a descrição destas ondas planas é relativamente simples.

Uma onda será dita *plana* se  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  forem, em cada instante, constantes ao longo de planos perpendiculares à sua direção de propagação. Se consideramos, por exemplo, ondas elétricas planas se propagando na direção  $y$ , podemos afirmar que

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(y, t). \quad (11.15)$$

---

<sup>1</sup>A.D'Abro, The Evolution of Scientific Thought, Dover 1950, Pg. 128

Uma possível onda plana, que se propaga na direção  $y$ , está representada na Fig. 11.1. Para esta onda, podemos afirmar que:

- em qualquer ponto do plano perpendicular ao eixo  $y$  o campo elétrico, representado pelas setas, é sempre o mesmo;
- as linhas de campo elétrico estão igualmente espaçadas sobre o plano.

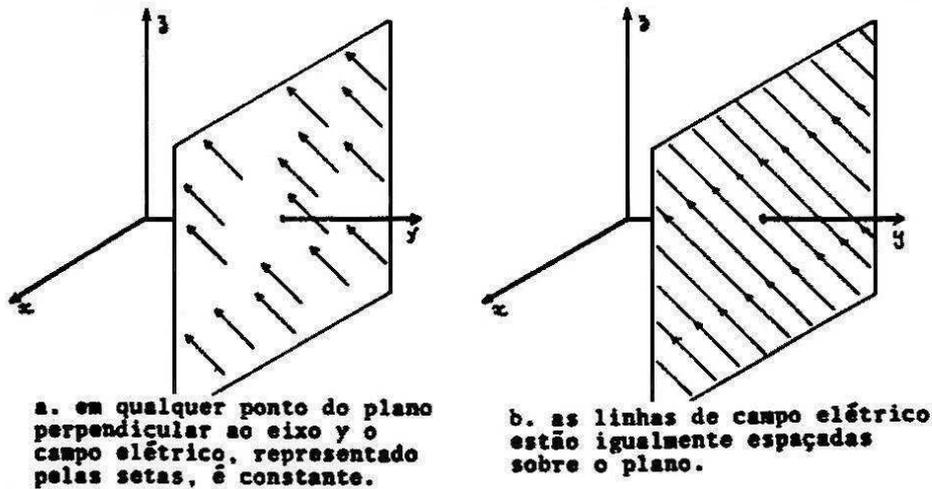


Figura 11.1: Ondas planas propagando-se na direção  $y$ ; (a) em qualquer ponto do plano perpendicular ao eixo  $y$  o campo elétrico, representado pelas setas, é constante; (b) as linhas de campo elétrico estão igualmente espaçadas sobre o plano.

A relação (11.15) simplifica bastante o tratamento do problema pois, neste caso, a equação de onda para o campo elétrico reduz-se a

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (11.16)$$

A solução geral de equações deste tipo já foi discutida anteriormente, na aula 8. Ela é dada por

$$\vec{E}(y, t) = \vec{E}_d(y - ct) + \vec{E}_e(y + ct), \quad (11.17)$$

sendo  $\vec{E}_d$  e  $\vec{E}_e$  funções arbitrárias, que descrevem a propagação da onda nos sentidos  $y$  positivo e  $y$  negativo, respectivamente.

Quando uma onda possui uma única e bem definida frequência, ela é dita *monocromática*.

Uma onda plana e monocromática, que se propaga para a direita, pode ser escrita como

$$\vec{E}_d = \vec{E}_0 \cos(\kappa y - \omega t). \quad (11.18)$$

onde  $\vec{E}_0$  é um vetor constante, que descreve a amplitude da onda. O período  $T$  e o comprimento de onda  $\lambda$  são relacionados aos parâmetros  $\omega$  e  $\kappa$  por  $\omega = 2\pi/T$  e  $\kappa = 2\pi/\lambda$ .

Não há perda de generalidade se estudarmos a onda cossenoidal pois, como mencionado no final da aula 8, segundo o Teorema de Fourier, qualquer função pode ser escrita como uma superposição de senos e cossenos.

A equação (11.18) é vetorial e, assim, corresponde a três equações escalares:

$$E_{dx} = E_{0x} \cos(\kappa y - \omega t), \quad (11.19)$$

$$E_{dy} = E_{0y} \cos(\kappa y - \omega t), \quad (11.20)$$

$$E_{dz} = E_{0z} \cos(\kappa y - \omega t). \quad (11.21)$$

Agora, algo muito importante: o fato de estas funções satisfazerem a equação de onda *não garante* que elas correspondam a campos elétricos reais. Para que isso aconteça é necessário que elas também satisfaçam as equações de Maxwell. Em particular, a compatibilidade da solução dada pela eq. (11.18) com a lei de Gauss no vácuo requer que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_d = 0. \quad (11.22)$$

Essa equação somente pode ser satisfeita se  $E_{0y} = 0$ . Para verificar isso, consideremos o divergente em coordenadas cartesianas

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_d = \frac{\partial E_{dx}}{\partial x} + \frac{\partial E_{dy}}{\partial y} + \frac{\partial E_{dz}}{\partial z}. \quad (11.23)$$

O vetor  $\vec{E}_d$  depende apenas da variável  $y$  e, portanto,

$$\frac{\partial E_{dx}}{\partial x} = \frac{\partial E_{dz}}{\partial z} = 0. \quad (11.24)$$

Usando a forma explícita de  $E_{dy}$ , dada pela eq.(11.20) temos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_d = \frac{\partial E_{dy}}{\partial y} = -E_{0y} \kappa \sin(\kappa y - \omega t). \quad (11.25)$$

Para que este divergente seja nulo para quaisquer valores de  $y$  e  $t$ , devemos ter  $E_{0y} = 0$ . Assim, na eq.(11.18), a amplitude tem a forma genérica

$$\vec{E}_0 = (E_{0x} \hat{i} + E_{0z} \hat{k}) \quad (11.26)$$

e o campo elétrico de uma onda eletromagnética, plana e monocromática, que se propaga na direção  $y$  positivo pode ser escrito como

$$\vec{E}_d = (E_{0x} \hat{i} + E_{0z} \hat{k}) \cos(\kappa y - \omega t). \quad (11.27)$$

A amplitude dessa onda não possui, portanto, a componente na direção de propagação. Ainda que tenhamos demonstrado esse fato no contexto particular de ondas planas e monocromáticas, ele é muito mais geral e o campo elétrico de uma onda eletromagnética está sempre contido no plano perpendicular à direção de propagação. Essa importante propriedade do campo elétrico no caso uma onda plana está esquematizada na Fig. 11.2.

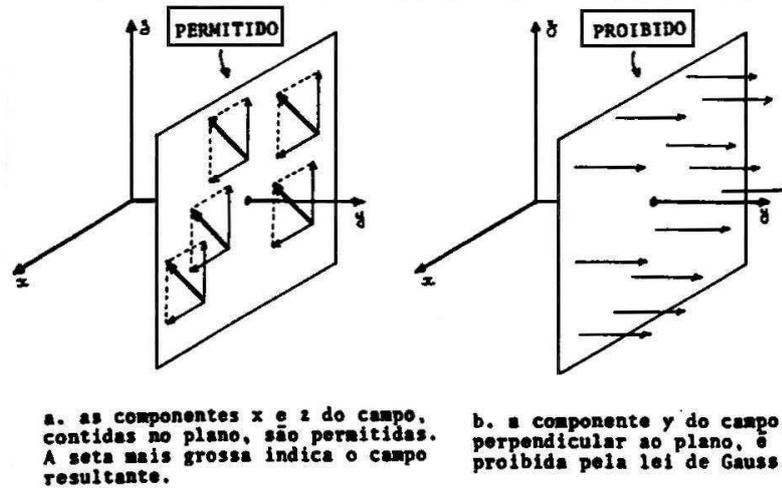


Figura 11.2: As componentes do campo elétrico de uma onda eletromagnética. (a) as componentes  $x$  e  $z$  do campo, contidas no plano, são permitidas. A seta mais grossa indica o campo resultante; (b) a componente  $y$  do campo, perpendicular ao plano, é proibida pela lei de Gauss.

Como a amplitude da onda dada por (11.26) é um vetor em duas dimensões, costuma-se dizer que são possíveis duas *polarizações* para ela. Por exemplo, se a amplitude tiver componentes  $E_{0x} = 0$  e  $E_{0z} \neq 0$ , diz-se que a onda elétrica está polarizada na direção  $z$ . A palavra *polarização* indica apenas a direção do campo elétrico da onda.

Numa onda eletromagnética sempre existe uma onda de campo magnético associada à onda de campo elétrico. A sua forma pode ser obtida através da lei de Faraday, expressa pela equação (11.2). Para o caso de ondas planas e monocromáticas se propagando para a direita, ao longo do eixo  $y$ , temos

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{\nabla} \times (E_{0x}\hat{i} + E_{0z}\hat{k}) \cos(\kappa y - \omega t) \\ &= -\kappa (E_{0z}\hat{i} - E_{0x}\hat{k}) \text{sen}(\kappa y - \omega t).\end{aligned}\quad (11.28)$$

O coeficiente do seno pode ser colocado na forma compacta

$$-\kappa (E_{0z}\hat{i} - E_{0x}\hat{k}) = -\kappa \hat{j} \times \vec{E}_0 \quad (11.29)$$

e a lei de Faraday permite escrever

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = (\kappa \hat{j} \times \vec{E}_0) \text{sen}(\kappa y - \omega t). \quad (11.30)$$

Essa equação pode ser integrada, produzindo o campo magnético

$$\vec{B} = (\kappa \hat{j} \times \vec{E}_0) \frac{1}{\omega} \cos(\kappa y - \omega t). \quad (11.31)$$

Usando a relação  $\kappa/\omega = 1/c$ , obtemos

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \hat{j} \times \vec{E} = \frac{\vec{c} \times \vec{E}}{c^2}, \quad (11.32)$$

já que, neste caso,  $\vec{c} = c\hat{j}$ .

O campo magnético está, assim, sempre contido num plano perpendicular ao eixo  $y$ , a direção de propagação neste caso, sendo também perpendicular ao campo elétrico. A expressão (11.32) relaciona, sem ambigüidades, as direções e sentidos da propagação da onda, de  $\vec{E}$  e de  $\vec{B}$ .

Resumindo, uma onda plana monocromática que se propaga na direção  $y > 0$  pode ser representada pelas equações

$$\vec{E} = (E_{0x}\vec{i} + E_{0z}\vec{k}) \cos(\kappa y - \omega t) \quad (11.33)$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{c} \times \vec{E}}{c^2}. \quad (11.34)$$

Este resultado envolve três vetores  $\vec{c}$ ,  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , que são sempre ortogonais entre si. Eles formam um triedro ortogonal. De modo geral, *ondas eletromagnéticas no vácuo são transversais*, pois os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são sempre ortogonais à direção de propagação. Por exemplo, se  $\vec{c} = c\hat{j}$  e  $\vec{E} = E\hat{k}$ , então  $\vec{B} = B\hat{i}$ . Ou alternativamente, se  $\vec{E} = E\hat{j}$  e  $\vec{B} = -B\hat{i}$ , então  $\vec{c} = c\hat{k}$ . Note que o ordenamento dos vetores ao longo dos eixos do triedro não pode ser feito ao acaso. Assim, por exemplo, os vetores  $\vec{c} = c\hat{j}$ ,  $\vec{E} = E\hat{i}$  e  $\vec{B} = B\hat{k}$  não podem descrever uma onda eletromagnética.

### • ondas no vácuo: propriedades gerais

Na seção anterior discutimos as características de ondas planas e monocromáticas, que são relativamente simples. Entretanto, várias das características encontradas ali são muito gerais e válidas para todas as ondas eletromagnéticas. Dentre essas propriedades gerais, mencionamos:

1.  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  satisfazem a equação de onda;
2. os módulos de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são proporcionais:  $|\vec{E}| = c |\vec{B}|$ ;
3.  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são perpendiculares entre si e, também, perpendiculares à direção da propagação da onda.

Um aspecto muito importante das ondas é o seu caráter eletromagnético, ou seja, as oscilações elétricas são sempre acompanhadas de oscilações magnéticas e vice-versa. Não é possível haver uma onda que seja puramente elétrica ou puramente magnética, pois os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  estão sempre acopladas pelas leis de Faraday e Ampère-Maxwell.

A Fig. 11.3 representa os campos elétrico e magnético para o caso de uma onda plana, monocromática e polarizada na direção  $z$ , que se propaga na direção  $y > 0$ . Note que os máximos e mínimos de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  sempre ocorrem no mesmo ponto.

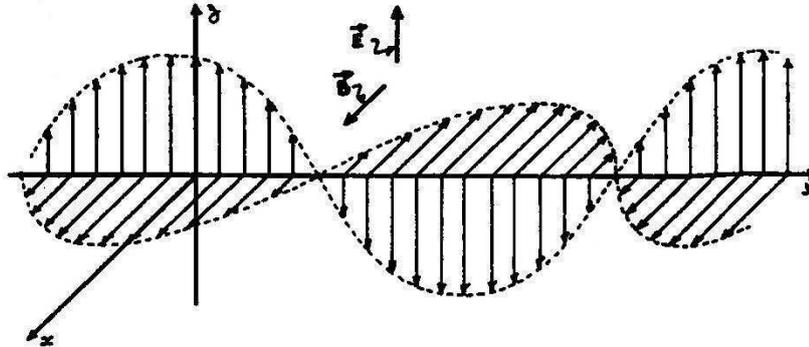


Figura 11.3: Onda eletromagnética plana e monocromática; o campo elétrico está no plano  $yz$ , enquanto que o campo magnético está no plano  $xy$ .

Qualquer onda, seja ela mecânica ou eletromagnética, apresenta sempre duas características importantes: transportar energia de um ponto a outro do espaço e interferir com ondas de natureza semelhante. Esses dois aspectos das ondas eletromagnéticas serão estudados nas próximas aulas.

### • espectro eletromagnético

As ondas eletromagnéticas são formadas por oscilações de campos elétrico e magnético, acoplados pelas leis de Faraday e de Ampère-Maxwell. No vácuo, todas as ondas se propagam com velocidade  $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ , podendo ter diferentes frequências  $f$  e comprimentos de onda  $\lambda$ , de tal forma que

$$c = \lambda f \quad (11.35)$$

Há vários tipos de ondas eletromagnéticas: ondas de rádio, microondas, radiação infravermelha, luz visível, ultravioleta, raios X, raios  $\gamma$ . O que diferencia um tipo de onda eletromagnética de outro é a sua frequência, que pode variar em uma longa faixa de valores. Por exemplo, a rede elétrica doméstica opera em 60Hz, luz visível tem frequência entre  $4,1 \times 10^{14}$  Hz e  $7,5 \times 10^{14}$  Hz, enquanto os raios  $\gamma$  podem ter frequências da ordem de  $10^{28}$  Hz. A amplitude deste espectro explica a diversidade de fenômenos envolvendo estas radiações e, em particular, a sua interação com a matéria. O conjunto de todos os tipos de ondas eletromagnéticas é chamado *espectro eletromagnético* e está ilustrado na Fig. 11.4.

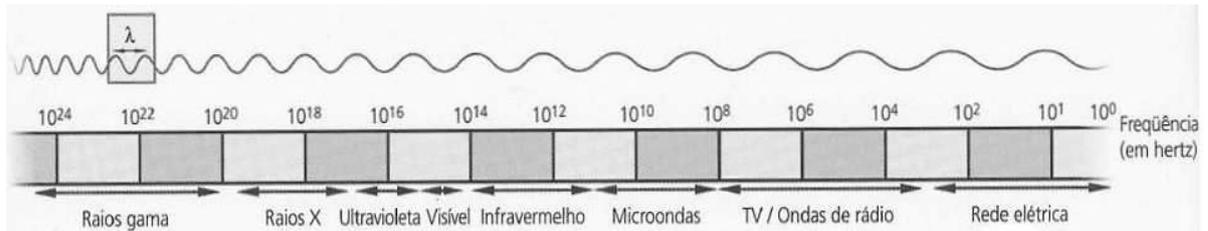
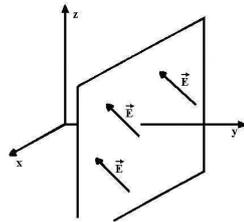


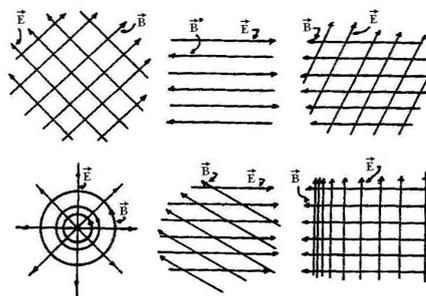
Figura 11.4: Espectro eletromagnético.

### • exercícios

1. Em que mudariam as equações (11.13) e (11.14) se não houvesse um termo correspondente à corrente de deslocamento nas equações de Maxwell? Quais seriam as possíveis consequências físicas deste fato?
2. É possível haver ondas de campo elétrico sem que haja ondas de campo magnético? Justifique a sua resposta.
3. As flexas da figura representam o vetor campo elétrico de uma onda plana monocromática que se propaga para a direita. Desenhe, nesta figura, o vetor campo magnético.



4. As figuras mostram as linhas de campo elétrico e magnético num dado plano. Quais das figuras podem corresponder a ondas eletromagnéticas? Nestes casos, qual a direção de propagação da onda?



5. Mostre, usando as equações de Maxwell, que a onda representada na Fig. 11.3 se propaga para a direita.
6. Escreva possíveis equações para os campos elétrico e magnético que descrevem ondas

planas monocromáticas que se propagam segundo as seguintes direções: a)  $y < 0$ ; b)  $x > 0$ .

**7.** Uma onda plana e monocromática é descrita pela equação  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\kappa y - \omega t)$ . Mostre que, se  $E_{0y}$ , a componente  $y$  de  $\vec{E}_0$ , não for nula, a lei de Gauss não é satisfeita. Sugestão: considere o fluxo total do campo elétrico através de uma superfície cúbica de lados de comprimento  $\ell = \pi/\kappa$  e paralelos aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

**8.** Determine a direção de polarização da onda dada pela equação (11.27) e mostre que ela não varia com o tempo.

**9.** O campo elétrico de uma onda, plana e monocromática, é descrito pela equação  $\vec{E} = (2E_0\hat{i} - E_0\hat{k}) \cos(\kappa y - \omega t)$ . Desenhe esse vetor em três pontos diferentes do plano  $y = 3\lambda/4$  nos instantes: a)  $t = 0$ ; b)  $t = T/4$ ; c)  $t = T/2$ ; d)  $3T/4$ .

**10.** Considere a onda plana e monocromática descrita pela equação  $\vec{E} = E_0 \hat{k} \cos(\kappa y - \omega t)$ . Desenhe, o vetor campo elétrico no instante  $t = T/4$ , em três pontos diferentes dos planos: a)  $y = 0$ ; b)  $y = \lambda/4$ ; c)  $y = \lambda/2$ ; d)  $y = 3\lambda/4$ .

# Capítulo 12

## ondas no vácuo: propagação e energia

- o vetor de onda

A descrição de uma onda eletromagnética plana envolve três vetores importantes, cada um com uma direção diferente. Um deles é o campo elétrico  $\vec{E}$  e o segundo, o campo magnético  $\vec{B}$ , que é sempre perpendicular a  $\vec{E}$  e o terceiro é o vetor de Poynting  $\vec{S}$ , que tem a direção de propagação da energia e é sempre simultaneamente perpendicular a  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . Como  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}/\mu_0$ , esses três vetores estão sempre relacionados entre si e alguns exemplos estão mostrados na da Fig. 12.1. Na aula 11, discutimos um caso particular desse tipo de relação, onde  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  estavam contidos no plano  $xz$ , eqs. (11.27) e (11.31), e a onda se propagava na direção  $y$ , representada pelo versor  $\hat{j}$ .

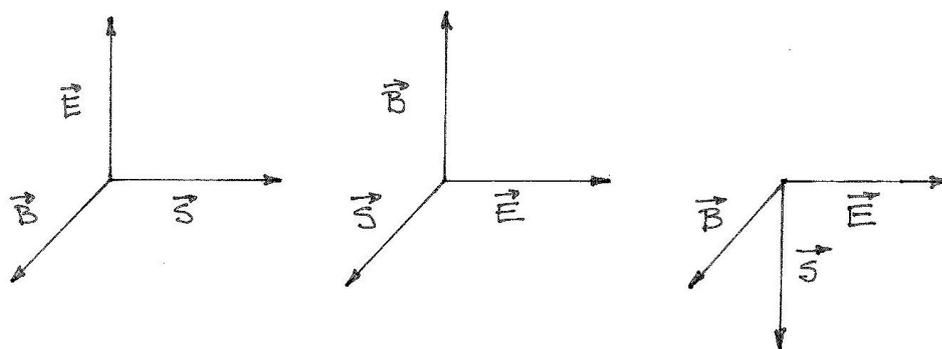


Figura 12.1: Exemplos de direções possíveis para os vetores campo elétrico, campo magnético e de Poynting de ondas eletromagnéticas.

Até o momento, consideramos apenas ondas que se propagam na direção  $y$ . O nosso objetivo, nesta seção, é discutir e apresentar a descrição de uma onda plana que se propaga numa direção qualquer.

Na aula 11, vimos que o campo elétrico  $\vec{E}$  de uma onda eletromagnética plana que se propaga na direção  $y$  positiva não depende de  $x$  e  $z$  e pode ser escrito como na eq. (11.17),  $\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(y, t)$ . Nesta relação, as variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  representam as coordenadas do ponto onde o vetor está aplicado e  $t$ , o instante no qual este campo é observado.

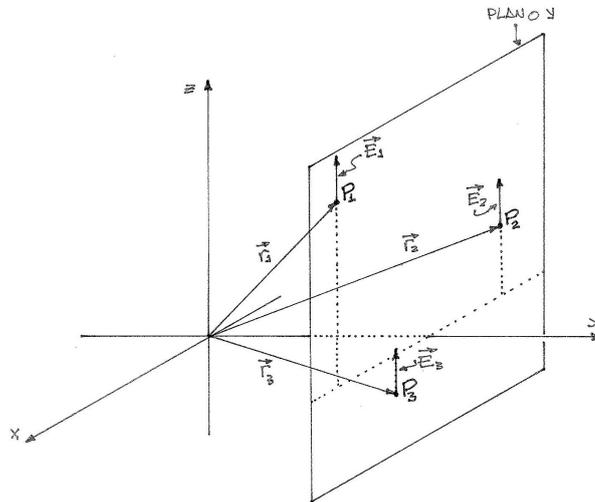


Figura 12.2: Campo elétrico em três pontos,  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ , de uma onda plana que se propaga na direção  $y$ .

Na Fig. 12.2, selecionamos três possíveis pontos do plano  $y$ , cujas coordenadas são  $P_1(x_1, y, z_1)$ ,  $P_2(x_2, y, z_2)$  e  $P_3(x_3, y, z_3)$ . Como eles estão sobre o plano, todos eles têm a mesma coordenada  $y$ . Esses pontos estão associados aos vetores  $\vec{r}_1 = x_1\hat{i} + y\hat{j} + z_1\hat{k}$ ,  $\vec{r}_2 = x_2\hat{i} + y\hat{j} + z_2\hat{k}$ ,  $\vec{r}_3 = x_3\hat{i} + y\hat{j} + z_3\hat{k}$  e, no instante  $t$ , os campos elétricos em  $P_1$ ,  $P_2$ , e  $P_3$ , são representados pelos vetores  $\vec{E}_1(\vec{r}_1, t)$ ,  $\vec{E}_2(\vec{r}_2, t)$ ,  $\vec{E}_3(\vec{r}_3, t)$ , apoiados sobre o plano  $y$ . O fato de a onda ser plana permite-nos escrever  $\vec{E}_1(\vec{r}_1, t) = \vec{E}_2(\vec{r}_2, t) = \vec{E}_3(\vec{r}_3, t)$ .

Assim, a condição de onda plana corresponde a representar o campo elétrico  $\vec{E}_n$  num ponto genérico  $P_n$  qualquer do plano  $y$ , descrito pelo vetor

$$\vec{r}_n = x_n\hat{i} + y\hat{j} + z_n\hat{k}, \quad (12.1)$$

no instante  $t$ , como  $\vec{E}_i(\vec{r}_i, t) = \vec{E}(y, t)$ . Deste modo, fica explícito o fato de que as coordenadas  $x_n$  e  $z_n$  do vetor  $\vec{r}_n$  são irrelevantes para o valor de  $\vec{E}_n$ . Como vimos na aula 8, esse campo elétrico obedece a uma equação diferencial característica, que obriga o *argumento* da função a ser da forma  $(\kappa y - \omega t)$ , sendo  $\kappa = \omega/c$ .

Se desejamos descrever uma onda plana que se propaga na direção  $x$  positiva, a re-elaboração da discussão precedente usando o vetor posição  $\vec{r}_n = x\hat{i} + y_n\hat{j} + z_n\hat{k}$  permite escrever  $\vec{E}_n(\vec{r}_n, t) = \vec{E}(x, t)$  e o argumento da função que descreve o campo elétrico passa a ser  $(\kappa x - \omega t)$ . Isso indica que não é preciso repetir toda a discussão em cada caso, pois basta adaptar o argumento da função à situação desejada. Por exemplo, uma onda que se propaga na direção  $z$  negativa, tem argumento  $(\kappa z + \omega t)$ .

Existem situações nas quais uma onda plana pode se propagar em direções mais gerais, como as indicadas na Fig. 12.3. Nestes casos, os planos de fase constantes são perpendiculares às direções de propagação.

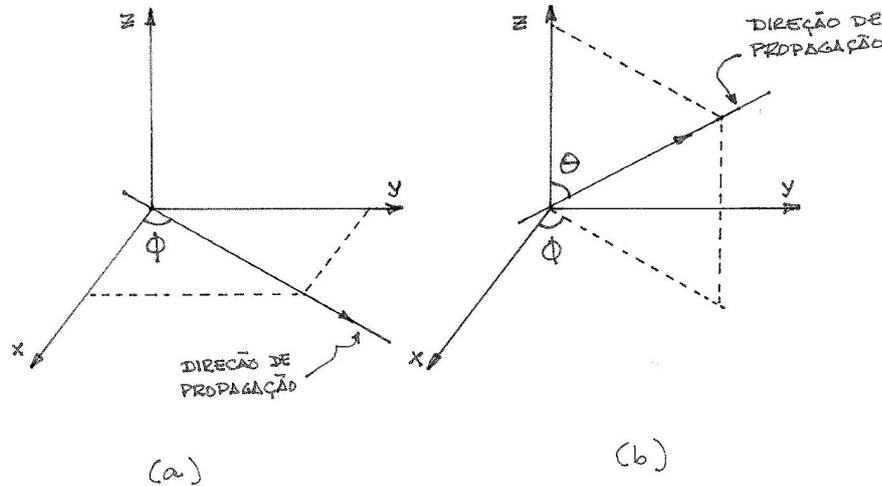


Figura 12.3: Possíveis direções de propagação de ondas eletromagnéticas(a) caracterizada pelo ângulo polar  $\phi$  e (b) pelos ângulos azimutal  $\phi$  e zezemital  $\theta$ .

A direção de propagação é um elemento muito importante de qualquer onda e, em particular, de ondas eletromagnéticas. Ela é incorporada na descrição da onda por meio de um vetor, chamado *vetor de onda*, geralmente representado pelo símbolo  $\vec{k}$ . Nós também adotamos esta convenção, usando o símbolo grego *kappa*. Ainda assim, é preciso tomar algum cuidado para não confundir o vetor de onda  $\vec{k}$  com o versor  $\hat{L}$  da direção  $z$ , pois eles representam coisas completamente diferentes.

O vetor de onda  $\vec{k}$  é construído de modo que seu módulo seja  $\vec{k} = \omega/c$  e sua direção e sentido sejam os da propagação da onda. Assim, por exemplo, para uma onda que se propaga na direção  $y$ , temos  $\vec{k} = \kappa \hat{j}$  e o argumento do campo elétrico no ponto genérico  $P_n$ , cujas coordenadas são dadas pela eq.(12.1), corresponde a  $(\vec{k} \cdot \vec{r}_n - \omega t) = (\kappa y - \omega t)$ . Ou seja, o produto escalar seleciona a componente de  $\vec{r}_n$  paralela a  $\vec{k}$ . As componentes de  $\vec{r}_n$  perpendiculares a  $\vec{k}$  não contribuem e, por isso, a fase não depende de  $x_n$  e  $z_n$ .

Este tipo de característica permanece válida para ondas que se propagam em direções quaisquer. No caso de uma onda que se propaga segundo a direção indicada na Fig. 12.3a, o vetor de onda é dado por

$$\vec{k} = \kappa [\cos \phi \hat{i} + \text{sen } \phi \hat{j}] \quad (12.2)$$

e o argumento da onda plana no ponto  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  e no instante  $t$ , é dado por

$$(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = [\kappa (x \cos \phi + y \text{sen } \phi) - \omega t]. \quad (12.3)$$

Analogamente, para a onda que se propaga segundo a direção mostrada na Fig. 12.3b, temos

$$\vec{\kappa} = \kappa [(\text{sen } \theta \cos \phi \hat{i} + \text{sen } \theta \text{sen } \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k})] \quad (12.4)$$

e

$$(\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t) = [\kappa(x \text{sen } \theta \cos \phi + y \text{sen } \theta \text{sen } \phi + z \cos \theta) - \omega t]. \quad (12.5)$$

### • as três direções importantes

O resultado (12.5) é importante porque permite descrever o argumento de uma onda plana que se propaga numa direção qualquer, dada pelo vetor  $\vec{\kappa}$ . O campo elétrico dessa onda plana é

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t). \quad (12.6)$$

Como o campo elétrico deve ser sempre transversal à direção de propagação, a amplitude  $\vec{E}_0$  deve satisfazer a condição

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{\kappa} = 0 \leftarrow \kappa[E_{0x} \text{sen } \theta \cos \phi + E_{0y} \text{sen } \theta \text{sen } \phi + E_z \cos \theta] = 0 \quad (12.7)$$

O campo magnético da onda dado por

$$\vec{B}(x, y, z, t) = \vec{B}_0 \cos(\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (12.8)$$

e o seu módulo deve ser simultaneamente ortogonal a  $\vec{\kappa}$  e a  $\vec{E}$ . Usando o resultado  $|\vec{B}| = |\vec{E}|/c$ , podemos escrever o campo magnético como

$$\vec{B}(x, y, z, t) = \frac{\vec{\kappa} \times \vec{E}(x, y, z, t)}{\omega} \quad (12.9)$$

O vetor de Poynting é dado por

$$\begin{aligned} \vec{S}(x, y, z, t) &= \frac{\vec{E}(x, y, z, t) \times \vec{B}(x, y, z, t)}{\mu_0} \\ &= \frac{\vec{\kappa}}{\mu_0 \omega} |\vec{E}(x, y, z, t)|^2, \end{aligned} \quad (12.10)$$

onde usamos a eq.(12.9) e a identidade vetorial  $\vec{A} \times [\vec{B} \times \vec{C}] = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ , válida para quaisquer vetores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  e  $\vec{C}$ . Como esperado, o vetor  $\vec{S}$ , associado ao fluxo de energia, é paralelo ao vetor de onda  $\vec{\kappa}$ .

### • exemplo 1

Determinação da direção de propagação e do campo magnético de uma onda eletromagnética cujo campo elétrico é dado por  $\vec{E} = E_0 \cos(\kappa x - \omega t) \hat{j}$ .

O argumento  $(\kappa x - \omega t)$  do campo  $\vec{E}$  é simples e indica que a onda se propaga ao longo do eixo  $x$  positivo. O nosso interesse, aqui, é obter o mesmo resultado a partir da eq.(12.5). Escrevendo

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \kappa (x \cos \theta \cos \phi + y \sin \theta \cos \phi + z \sin \theta) = \kappa x \quad , \quad (12.11)$$

obtemos  $\phi = 0$  e  $\theta = \pi/2$ , o que nos permite concluir que a onda se propaga na direção  $x$  positiva. Assim, o vetor de onda é  $\vec{k} = \kappa \hat{i}$ .

O campo magnético obtido a partir da relação (12.9) é

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \times E_0 \cos(\kappa x - \omega t) \hat{j} = \frac{\hat{i}}{c} \times E_0 \cos(\kappa x - \omega t) \hat{j} = \frac{E_0}{c} \cos(\kappa x - \omega t) \hat{k} \quad . \quad (12.12)$$

## • exemplo 2

Uma onda plana e monocromática, que se propaga na direção mostrada na Fig. 12.4, contida no plano  $xz$ , incide sobre um espelho plano, situado sobre o plano  $xy$ . O nosso objetivo é determinar os argumentos das ondas incidente ( $I$ ) e refletida ( $R$ ).

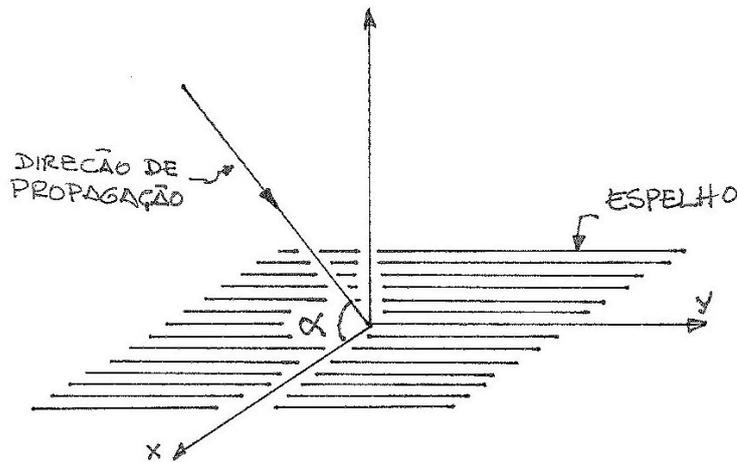


Figura 12.4: Direção de propagação no plano  $xz$  formando um ângulo  $\alpha$  com o eixo  $x$ .

Para a onda incidente, temos

$$\vec{k}_I = -\kappa (\cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \vec{k}) \quad (12.13)$$

e o seu argumento é dado por

$$[\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega t] = [\kappa (x \cos \alpha - z \sin \alpha) - \omega t] \quad . \quad (12.14)$$

Na reflexão, os ângulos de incidência e de reflexão, medidos em relação à normal ao espelho, são iguais. Entretanto, a onda refletida se afasta do espelho e, por isso, o seu vetor de onda é dado por

$$\vec{k}_R = \kappa (-\cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \vec{k}) \quad . \quad (12.15)$$

Portanto, o argumento da onda refletida é escrita como

$$[\vec{\kappa}_R \cdot \vec{r} - \omega t] = [\kappa(-x \cos \alpha + z \sin \alpha) - \omega t] . \quad (12.16)$$

No caso particular de incidência normal, em que  $\alpha = \pi/2$ , obtemos  $\vec{\kappa}_R = -\vec{\kappa}_I$ .

### • as energias elétrica e magnética

A energia transportada por uma onda eletromagnética está diretamente relacionada aos campos elétrico  $\vec{E}$  e magnético  $\vec{B}$ , que a constituem. Onde há campo elétrico e campo magnético, há energia elétrica e energia magnética, com densidades volumétricas dadas, respectivamente, por

$$u_E = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} , \quad u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} . \quad (12.17)$$

Para o caso de uma onda eletromagnética se propagando no vácuo, os módulos dos campos elétrico e magnético obedecem a relação  $E = cB$  onde  $c$  é a velocidade de propagação, dada por  $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ . Podemos, portanto, concluir que  $u_B = u_E$ . Este resultado é importante, pois evidencia que as densidades volumétricas de energia elétrica e de energia magnética de uma onda eletromagnética são iguais. Assim, ao se propagar, uma onda eletromagnética transporta energia com densidade volumétrica dada por

$$u = u_E + u_B = 2u_E = \varepsilon_0 E^2 . \quad (12.18)$$

### • a conservação da energia eletromagnética

O transporte de energia eletromagnética é representado pelo vetor de Poynting, definido por  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}/\mu_0$ . O seu módulo,  $S$ , é igual à potência da radiação por unidade de área e a sua direção e sentido são iguais aos da propagação da onda. Conforme discutimos na aula 10, a conservação de energia eletromagnética é expressa, na forma integral, pela eq.(10.11)

$$\oiint_A \vec{S} \cdot \hat{n} dA = -\frac{d}{dt} \iiint_V u dV , \quad (12.19)$$

sendo  $V$ , o volume contido pela superfície fechada  $A$ .

Usando o teorema de Gauss, a equação (12.19) pode ser reescrita na forma diferencial

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\frac{\partial u}{\partial t} . \quad (12.20)$$

### • exemplo 3

Cálculo da energia eletromagnética contida no interior do cubo de lado  $L$ , mostrado na Fig. 12.5, num instante genérico  $t$ , para a onda eletromagnética monocromática, cujo campo elétrico é dado por  $\vec{E} = E_0 \cos(\kappa x - \omega t)\hat{j}$ , considerada no exemplo 1.

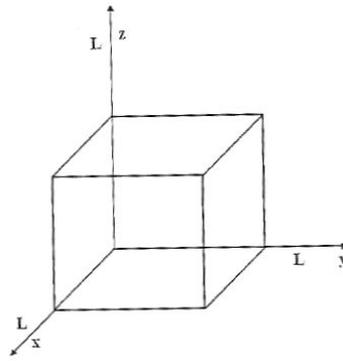


Figura 12.5: Um cubo no sistema de referência adotado para o cálculo da energia eletromagnética em seu interior.

A densidade volumétrica de energia é obtida a partir de (12.18) e vale

$$u = \frac{dU}{dV} = \varepsilon_0 E^2 .$$

A energia no interior do cubo é expressa por

$$\begin{aligned} U &= \int_0^L dz \int_0^L dy \int_0^L dx \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\kappa x - \omega t) \\ &= \varepsilon_0 E_0^2 L^2 \int_0^L dx \cos^2(\kappa x - \omega t) = \varepsilon_0 E_0^2 L^2 \frac{1}{2} \left[ x + \frac{1}{2\kappa} \sin 2(\kappa x - \omega t) \right]_0^L \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 L^3 \left\{ 1 + \frac{1}{2\kappa L} [\sin 2(\kappa L - \omega t) + \sin 2\omega t] \right\} . \end{aligned} \quad (12.21)$$

A presença explícita do parâmetro  $t$  neste resultado, que não pode ser eliminada, indica que a energia total no interior do cubo depende do instante considerado.

#### • exemplo 4

Verificação da conservação da energia no caso da situação discutida no exemplo anterior. A energia contida no interior do cubo de lado  $L$  pode variar à medida que o tempo passa. Entretanto, de acordo com o princípio da conservação da energia, tal variação deve estar relacionada ao fluxo dessa energia através das paredes do cubo.

Usando o resultado (12.21), obtemos a variação temporal da energia no interior do cubo, dada por

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 L^2 c [-\cos 2(\kappa L - \omega t) + \cos 2\omega t] , \quad (12.22)$$

onde usamos  $\omega/\kappa = c$ .

O fluxo de energia através das paredes do cubo é calculado por meio do vetor de Poynting e vale

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \cos^2(\kappa x - \omega t) \hat{i}. \quad (12.23)$$

Assim, o fluxo de  $\vec{S}$  através das paredes do cubo é não nulo apenas nas faces perpendiculares ao eixo  $x$ , sendo dado por

$$\begin{aligned} \Phi_S &= \iint_{\text{cubo}} \vec{S} \cdot \hat{n} \, dA \\ &= \frac{E_0^2}{c\mu_0} [-L^2 \cos^2 \omega t + L^2 \cos^2(\kappa L - \omega t)]. \end{aligned} \quad (12.24)$$

Sendo  $\cos^2 \alpha = (\cos 2\alpha + 1)/2$ , obtemos

$$\Phi_S = \frac{E_0^2}{c\mu_0} L^2 \frac{1}{2} [\cos 2(\kappa L - \omega t) - \cos 2\omega t]. \quad (12.25)$$

Usando (12.22) e  $\varepsilon_0 c = 1/c\mu_0$ , podemos escrever

$$\Phi_S = -\frac{dU}{dt}, \quad (12.26)$$

coerente com a equação da continuidade para a energia.

É interessante notar que, quando  $L = 2\pi/\kappa$ , temos

$$\Phi_S = -\frac{dU}{dt} = 0. \quad (12.27)$$

## • intensidade de uma onda

Em muitos problemas, é conveniente representar o fluxo de energia de uma onda por meio de sua intensidade  $I$ , definida como o valor médio do módulo do vetor Poynting em um período. Assim,

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \, S. \quad (12.28)$$

Para uma onda plana e monocromática que se propaga na direção  $y$ , temos

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T dt \, \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\kappa y - \omega t) = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}. \quad (12.29)$$

Este resultado vale para qualquer onda que se propaga no vácuo e é muito útil. Ele permite, em muitos problemas, conhecer a dependência do módulo de  $E$  com a distância à fonte das ondas. Por exemplo, quando estamos longe de uma lâmpada elétrica acesa,

ela pode ser considerada como puntiforme e as ondas luminosas que ela emite podem ser consideradas como esféricas. Se a luz emitida pela lâmpada pode se propagar livremente em todas as direções, então a mesma energia por período atravessa qualquer superfície esférica com centro na lâmpada. Ou seja,  $\Phi_{<S>}$  é constante sobre qualquer superfície fechada que contenha a lâmpada. Assim, se conhecermos a amplitude  $E_0(a)$  do campo elétrico, a uma distância  $a$  da fonte, então podemos afirmar que a uma distância  $b$ , a amplitude  $E_0(b)$  do campo elétrico é

$$E_0(b) = \frac{a}{b} E_0(a) \quad (12.30)$$

Analogamente, para uma fonte cilíndrica, teríamos

$$E_0(b) = \sqrt{\frac{a}{b}} E_0(a) \quad (12.31)$$

### • exercícios

1. O vetor de onda de uma onda eletromagnética é o dado pela eq.(12.4). Mostre que uma função  $f$  da forma  $f(\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t)$  obedece uma equação de onda dada por

$$\vec{\nabla}^2 f - \left(\frac{\kappa}{\omega}\right)^2 \partial_t^2 f = 0.$$

2. Dois espelhos planos estão colocados, respectivamente, sobre os planos  $xz$  e  $yz$  e a aresta entre eles está contida sobre o eixo  $z$ . Um raio de luz cujo vetor de onda é dado por  $\vec{\kappa}_I = -\kappa[\text{sen } \theta \cos \phi \hat{i} + \text{sen } \theta \text{sen } \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}]$  incide sobre o conjunto. Determine o vetor de onda  $\vec{\kappa}_R$  da onda, depois de ser refletida sucessivamente pelos dois espelhos.

3. Mostre que os componentes do campo elétrico de uma onda eletromagnética cujo vetor de onda é dado pela eq.(12.4) obedecem a relação  $E_z = -\text{tg } \theta [E_x \cos \phi + E_y \text{sen } \phi]$ . Estude o significado desta relação para o caso  $\theta = \pi/2$ , por meio de um desenho, mostrando  $\vec{\kappa}$  e  $\vec{E}$ .

4. Interprete e justifique o resultado dado pela eq.(12.27).

5. Uma folha de papel de área  $A$ , colocada sobre o plano  $xy$ , é iluminada por luz cujo campo elétrico é dado pela equação  $\vec{E} = E_0 \cos[\kappa(\text{sen } \theta y + \cos \theta z) + \omega t] \hat{i}$ . Determine a intensidade  $I$  da luz que incide sobre o papel.

### • respostas

2.  $\vec{\kappa}_R = \kappa[\text{sen } \theta \cos \phi \hat{i} + \text{sen } \theta \text{sen } \phi \hat{j} - \cos \theta \hat{k}]$

5.  $I = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \cos \theta$



# Capítulo 13

## ondas eletromagnéticas: superposição e polarização

### • introdução

Ondas eletromagnéticas são constituídas por campos elétricos e magnéticos, que se propagam no espaço. Uma propriedade muito importante desses campos é que eles obedecem ao princípio de superposição: se num ponto do espaço coexistem campos elétricos e magnéticos provenientes de várias fontes, então os campos resultantes são dados pelas somas vetoriais dos campos individuais.

O nosso ponto de partida são as ondas planas e monocromáticas estudadas anteriormente, com campos elétricos da forma

$$\vec{E} = E_0 \cos[(\kappa y - \omega t)] \hat{k}. \quad (13.1)$$

O campo elétrico especifica completamente a onda, já que ela indica a sua frequência, direção de propagação e, também, determina o campo magnético, que é dado pela eq. (11.32),

$$\vec{B} = \frac{c \hat{j} \times \vec{E}}{c^2}. \quad (13.2)$$

A onda associada a este campo elétrico está representada na Fig. 13.1, para um instante fixo. Ela mostra que o campo elétrico varia de intensidade de um ponto para outro, mas tem sempre a mesma direção e está contido num único plano. Diz-se que uma onda deste tipo tem polarização plana e a direção do campo elétrico é chamada de direção de polarização da onda. Assim, o campo elétrico dado acima representa uma onda com polarização plana, ao longo do eixo  $z$ . Análogamente, uma onda descrita pela equação

$$\vec{E} = E_0 \cos[(\kappa y - \omega t)] \hat{i}, \quad (13.3)$$

se propaga ao longo do eixo  $y$  e é polarizada ao longo do eixo  $x$ .

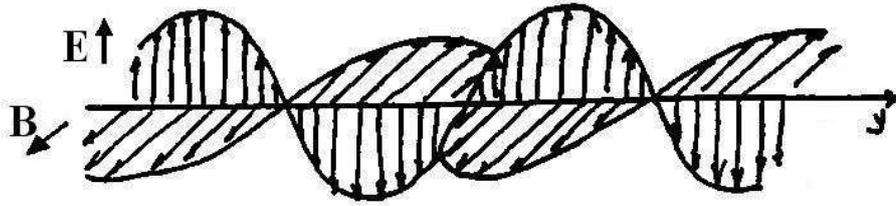


Figura 13.1: Os campos elétrico e magnético, em um instante arbitrário, de uma onda linearmente polarizada na direção  $z$ .

No caso de haver duas ondas, com campos elétricos  $\vec{E}_1$  e  $\vec{E}_2$ , se propagando numa mesma região do espaço, os campos elétrico e magnético resultantes, em cada ponto, são dados por

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \quad (13.4)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2. \quad (13.5)$$

As ondas envolvidas neste processo de superposição podem se propagar em direções iguais ou diferentes. Por exemplo, tanto no caso

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= E_0 \cos[(\kappa y - \omega t)]\hat{k}, \\ \vec{E}_2 &= 2E_0 \cos[(\kappa y - \omega t)]\hat{i}, \end{aligned}$$

como no caso

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= E_0 \cos[2(\kappa y - \omega t)]\hat{k}, \\ \vec{E}_2 &= E_0 \sin[(\kappa y - \omega t)]\hat{k}, \end{aligned}$$

o campo elétrico resultante é dado pela eq.(13.4). Entretanto, como as componentes são diferentes em cada caso, o mesmo acontece com o campo resultante.

### • exemplo 1

Determinação das características da onda que resulta da superposição de duas outras cujos campos elétricos são dados por

$$\vec{E}_1 = E_0 \cos[(\kappa y - \omega t)]\hat{k}, \quad (13.6)$$

$$\vec{E}_2 = E_0 \cos[2(\kappa y - \omega t)]\hat{k}. \quad (13.7)$$

Estas duas ondas diferem quanto às frequências, pois  $\omega_2 = 2\omega_1$ . Por isso, a onda resultante é plana, não é monocromática e tem polarização plana, ao longo do eixo  $z$ . Os valores de  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{E}_2$  e  $\vec{E}$  ao longo do eixo  $y$ , para um instante fixo, são mostrados na fig. 13.2. Com o passar do tempo, todo o desenho move-se para a direita com velocidade  $c$ .

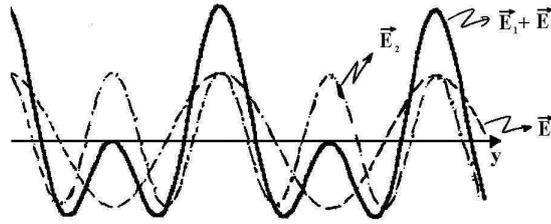


Figura 13.2: Onda resultante da interferência de duas ondas planas de mesma amplitude, polarização e direção de propagação, mas com frequências diferentes ( $\omega_2 = 2\omega_1$ ).

### • exemplo 2

Determinação das características da onda que resulta da superposição de duas outras cujos campos elétricos são

$$\vec{E}_1 = E_0 \cos[(\kappa y - \omega t)]\hat{k}, \quad (13.8)$$

$$\vec{E}_2 = \frac{E_0}{2} \cos[(\kappa y - \omega t)]\hat{i}. \quad (13.9)$$

Estas duas ondas diferem quanto às amplitudes e polarizações. A onda resultante é monocromática e tem polarização plana, como mostrado na fig. 13.3(a) e o seu campo pode ser escrito como

$$\vec{E} = \left[ \frac{E_0}{2}\hat{i} + E_0\hat{k} \right] \cos(\kappa y - \omega t) \quad (13.10)$$

Os valores de  $\vec{E}$  sobre o eixo  $y$ , para um instante fixo, são mostrados na fig. 13.3(b).

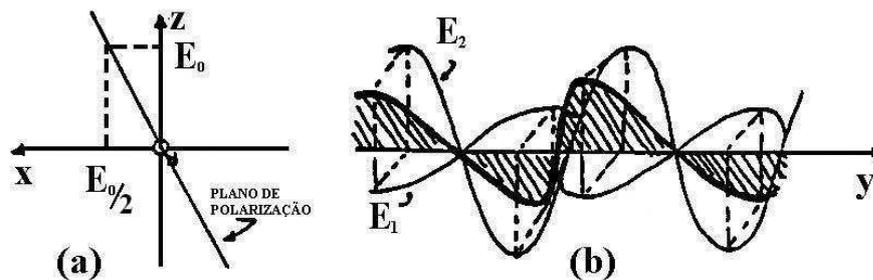


Figura 13.3: (a) Direção de polarização da onda resultante. (b) Onda resultante da interferência de duas ondas com polarizações perpendiculares, mesma frequências e direção de propagação e amplitudes diferentes.

### • exemplo 3

Uma onda eletromagnética, tem campo elétrico dado por

$$\vec{E} = E_0 \cos[(\kappa y - \omega t)]\hat{k} \quad (13.11)$$

Essa onda sempre pode ser pensada como o resultado da superposição de duas outras ondas com polarizações planas, com campos elétricos dados pelos vetores  $\vec{E}_1$  e  $\vec{E}_2$ . Por exemplo, essa onda pode ser devida à superposição das ondas dadas pelos vetores

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} \cos(\kappa y - \omega t) = \left( a \vec{i} \frac{E_0}{2} \vec{k} \right) \cos[(\kappa y - \omega t)], \quad (13.12)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{02} \cos(\kappa y - \omega t) = \left( a \vec{j} \frac{E_0}{2} \vec{k} \right) \cos[(\kappa y - \omega t)], \quad (13.13)$$

onde  $a$  é uma constante arbitrária. A figura abaixo mostra algumas possibilidades para  $\vec{E}_1$  e  $\vec{E}_2$ , e existem ainda muitas outras.

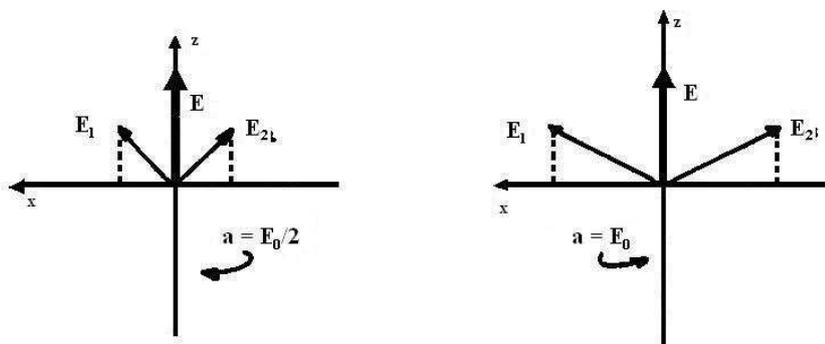


Figura 13.4: Amplitude do campo elétrico de uma onda linearmente polarizada resultante da interferência de dois possíveis pares de ondas diferentes, também linearmente polarizadas.

### • filtros polarizadores

As ondas eletromagnéticas que encontramos normalmente não têm polarização bem definida e são chamadas de ondas *não polarizadas* ou *despolarizadas*. Com isso, queremos dizer que elas são superposições aleatórias de muitas ondas com polarizações diferentes. Essa mistura de polarizações ocorre, por exemplo, com a luz que chega aos seus olhos depois de ser difundida pelo papel. Atualmente, o modo mais fácil de obter uma onda com polarização bem definida consiste em atirar ondas não polarizadas sobre um *filtro polarizador*. Filtros polarizadores são instrumentos que permitem a passagem de ondas com polarização ao longo de uma dada direção e bloqueiam ondas com polarização perpendicular a essa direção. No caso de ondas de comprimento macroscópico, como as microondas, um polarizador pode ser uma placa de metal, com ranhuras. Quando a polarização da onda é paralela às ranhuras, ela não atravessa o polarizador, porque o seu campo elétrico gera correntes na placa e sua energia é absorvida. Quando o campo é perpendicular às ranhuras, as correntes não podem circular eficientemente e a onda passa. No caso de ondas com comprimento de onda microscópico, tais como luz ( $\lambda \sim 10^{-7} \text{m}$ ), os polarizadores podem ser feitos com macromoléculas, que permitem a passagem de correntes elétricas apenas ao longo de uma dada direção. O seu princípio de funcionamento é o mesmo das

placas com ranhuras, apenas a escala é diferente. Em geral, chama-se de eixo do filtro polarizador a direção ao longo da qual ele deixa a onda passar.

Quando estudamos fenômenos de polarização, é costume representar a direção de polarização da onda por uma flecha de duas pontas, tal como  $\longleftrightarrow$ . Esta é uma representação convencional, que indica a *direção de polarização* e, não, o sentido do campo elétrico em cada instante, pois este oscila com o tempo. Assim, existe uma oscilação implícita na flecha de duas pontas, que enfatiza apenas a direção de polarização, deixando de lado aspectos tais como frequências e fases. A superposição aleatória de ondas costuma ser representada por um feixe de flechas de duas pontas, orientadas em várias direções. Assim, quando uma onda não polarizada incide sobre um polarizador, temos a situação indicada simbolicamente na Fig. 13.5.

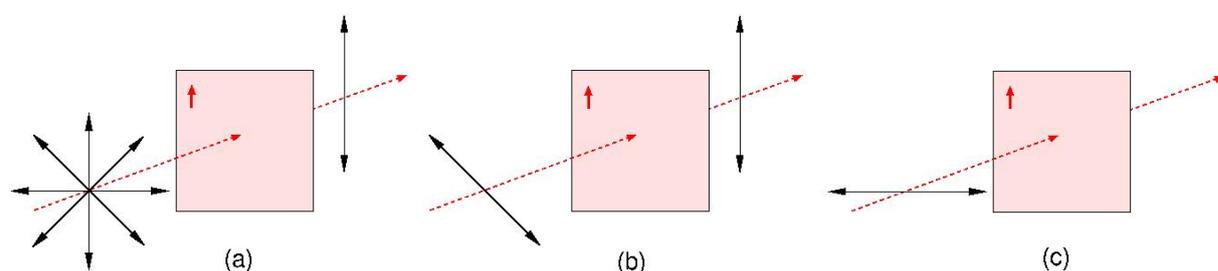


Figura 13.5: Um filtro polarizador, com direção de transmissão indicada pela flecha vertical vermelha; nos casos (a) e (b), componentes da onda incidente atravessam o filtro; no caso (c) a polarização da onda incidente é ortogonal à direção de transmissão e não há onda transmitida.

A luz que, depois de iluminar o mundo à nossa volta, chega aos nossos olhos é, em geral, composta por uma superposição aleatória de ondas polarizadas em direções diferentes. Costuma-se dizer que tal superposição corresponde a uma onda não polarizada. Entretanto, esta é uma prática infeliz pois, rigorosamente falando, ondas eletromagnéticas não polarizadas não existem. Toda onda tem de ter um campo elétrico, que possui uma direção, identificada como a sua polarização.

Existem, também, processos naturais onde ocorre a polarização da luz. Por exemplo, em dias sem nuvens, a luz que vem do céu azul é bastante polarizada. Isso pode ser facilmente constatado olhando o céu com o auxílio de um filtro polarizador; ao girarmos o seu eixo, vemos que certas regiões do céu podem tornar-se mais claras ou escuras. Também ocorre a polarização da luz quando ela é refletida por vidro, água ou outras superfícies polidas, como mesas envernizadas e a própria pele. Novamente, isso pode ser constatado com o auxílio de um filtro polarizador. É por este motivo que filtros polarizadores são bastante empregados em fotografia pois, com eles, é possível controlar a quantidade de reflexos dos objetos a serem fotografados.

• **exemplo 4**

Uma onda com campo elétrico dado por

$$\vec{E} = E_0 \cos[(\kappa y - \omega t)] \hat{k} \quad (13.14)$$

incide sobre um filtro polarizador, disposto perpendicularmente ao eixo  $y$ , e que tem o eixo de polarização orientado paralelamente à direção do versor

$$\hat{u} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{k}. \quad (13.15)$$

O nosso interesse é determinar o campo elétrico da onda que emerge do polarizador e a fração da energia da onda que atravessa o filtro.

Para determinar o campo da onda emergente, é preciso lembrar que, neste caso, o polarizador deixa passar apenas a componente da onda paralela ao versor  $\hat{u}$ . Por isso, é conveniente escrever o campo da onda incidente como a superposição de duas ondas, com polarizações respectivamente paralela e perpendicular a  $\hat{u}$ . O módulo da componente paralela ao eixo de polarização é dada pelo produto escalar  $\vec{E} \cdot \hat{u}$ . Usando estas informações sobre a onda, temos

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\parallel} &= (\vec{E} \cdot \hat{u}) \hat{u} = E_0 \cos[(\kappa y - \omega t)] \sin \theta \vec{u} \\ &= E_0 \cos[(\kappa y - \omega t)] \sin \theta (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{k}). \end{aligned} \quad (13.16)$$

O vetor  $E_{\perp}$ , por outro lado, é dado por

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\perp} &= \vec{E} - \vec{E}_{\parallel} \\ &= E_0 \cos[(\kappa y - \omega t)] (-\sin \theta \cos \theta \hat{i} + \cos^2 \theta \hat{k}) \end{aligned} \quad (13.17)$$

A energia da onda é proporcional ao quadrado do seu campo elétrico. Assim, a fração  $T$  de energia transmitida através do polarizador é dada por

$$T = \frac{E_{\parallel}^2}{E^2} = \sin^2 \theta. \quad (13.18)$$

Por outro lado, a fração  $A$  de energia absorvida pelo filtro vale

$$A = \frac{E_{\perp}^2}{E^2} = \cos^2 \theta. \quad (13.19)$$

• **exemplo 5**

Um feixe de luz não polarizada, com velocidade  $\vec{c} = c\hat{j}$ , incide, sucessivamente, sobre dois filtros polarizadores 1 e 2, situados respectivamente nos planos  $y_1 = 0$  e  $y_2 = 2a$  e com eixos orientados ao longo das direções  $z$  e  $x$ , respectivamente. Qual a polarização da onda depois de atravessar o sistema?

Após passar pelo primeiro polarizador, o campo elétrico da onda torna-se paralelo ao eixo  $z$ . Por isso, ela é totalmente bloqueada pelo segundo polarizador e, portanto, não passa luz nenhuma pelo sistema.

Um fato, que pode parecer surpreendente, é que esta situação muda se intercalarmos um terceiro filtro *entre* os dois anteriores, no plano  $y = a$ , com eixo de polarização orientado segundo uma direção formando um ângulo  $\theta$  ( $\theta \neq 0$  ou  $\pi/2$ ) com o eixo  $z$ . Neste caso podemos utilizar os resultados do exemplo 4 e, nas regiões  $0 < y < a$  e  $a < y < 2a$ , os campos da onda são dados, respectivamente, pelas eqs.(13.13) e (13.15). Isso indica que, agora, existe um campo que atravessa todo o sistema, dado por

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_0 \cos[(\kappa y - \omega t)] \text{sen } \theta \cos \theta \hat{i} \\ &= \frac{E_0}{2} \cos[(\kappa y - \omega t)] \text{sen } 2\theta \hat{i},\end{aligned}\quad (13.20)$$

válido para  $y > 2a$ . A intensidade da onda que atravessa o sistema é, portanto, máxima para os ângulos  $\theta = 45^\circ$  e  $\theta = 225^\circ$ .

### • exemplo 6

Queremos estudar as características da onda que resulta da superposição de outras duas, cujos campos elétricos obedecem as equações

$$\vec{E}_1 = E_0 \cos[(\kappa y - \omega t)] \hat{k}, \quad (13.21)$$

$$\vec{E}_2 = E_0 \text{sen}[(\kappa y - \omega t)] \hat{i}. \quad (13.22)$$

Estas duas ondas diferem quanto às fases e direções e os campos elétrico e magnético resultantes são

$$\vec{E}_D = E_0 \text{sen}[(\kappa y - \omega t)] \hat{i} + E_0 \cos[(\kappa y - \omega t)] \hat{k} \quad (13.23)$$

$$\vec{B}_D = \frac{E_0}{c} \cos[(\kappa y - \omega t)] \hat{i} - \frac{E_0}{c} \text{sen}[(\kappa y - \omega t)] \hat{k}. \quad (13.24)$$

Os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  têm módulos constantes dados, respectivamente, por  $E = E_0$  e  $B = E_0/c$ .

Esta onda é plana, monocromática e sua polarização é *circular*. O vetor campo elétrico  $\vec{E}$ , em uma dada posição, gira em sentido horário, e sua ponta “desenha” uma circunferência como ilustra a fig. 13.6(a). O vetor campo elétrico ao longo do eixo  $y$ , em um dado instante, descreve uma hélice, como mostra a Fig. 13.6(b). Esta é uma onda com polarização horária ou direita porque ela “gira” segundo a “regra da mão direita”.

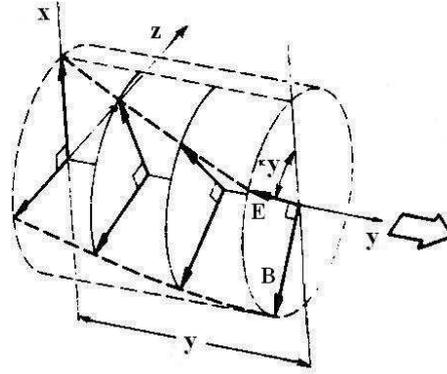


Figura 13.6: (a) O campo elétrico de uma onda circularmente polarizada num dado ponto do espaço, através do tempo.

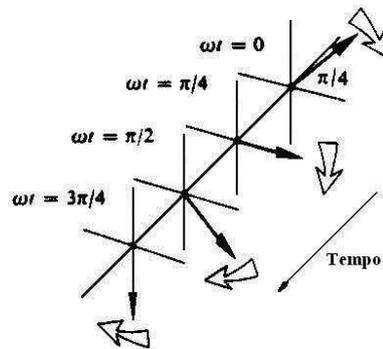


Figura 13.7: (b) O campo elétrico da onda circularmente polarizada num dado instante.

### • exemplo 7

Pode-se contruir uma onda com polarização *anti-horária* ou *esquerda*, por meio da superposição de duas ondas planas. Para tanto, basta inverter o sinal de uma das ondas do exercício anterior. A a superposição dos campos  $\vec{E}_1$  e  $\vec{E}_2$

$$\vec{E}_1 = E_0 \cos[(\kappa y - \omega t)]\hat{k} , \quad (13.25)$$

$$\vec{E}_2 = -E_0 \sin [(\kappa y - \omega t)]\hat{i} , \quad (13.26)$$

corresponde a uma onda com polarização esquerda, cujos campos são dados por

$$\vec{E}_E = -E_0 \sin (\kappa y - \omega t)\hat{i} + E_0 \cos(\kappa y - \omega t)\hat{k} \quad (13.27)$$

$$\vec{B}_E = -\frac{E_0}{c} \cos(\kappa y - \omega t)\hat{i} + \frac{E_0}{c} \sin (\kappa y - \omega t)\hat{k} \quad (13.28)$$

### • a polarização verdadeira

Vimos, nos exemplos 6 e 7, que é sempre possível pensar numa onda circularmente polarizada, seja à esquerda ou à direita, como uma superposição de duas ondas com

polarizações planas, de amplitudes iguais e defasadas de  $\pi/2$ . O contrário também é verdadeiro, ou seja, é sempre possível obter uma onda com polarização plana a partir de duas ondas circularmente polarizadas. Por exemplo, as ondas  $\vec{E}_D$  e  $\vec{E}_E$ , dadas pelas eqs. (13.23) e (13.27) são circularmente polarizadas, para a direita e esquerda. A partir delas, podemos obter duas ondas com polarizações planas, pela soma e subtração delas dadas por

$$\vec{E}_z = 2E_D \cos(\kappa y - \omega t) \hat{k}, \quad (13.29)$$

$$\vec{E}_x = 2E_D \cos(\kappa y - \omega t) \hat{i}. \quad (13.30)$$

Esse exemplo simples evidencia um aspecto muito interessante das ondas: elas não têm essência. Com isso, queremos dizer que as ondas com polarizações planas não são mais fundamentais que as circulares ou vice-versa. Todos esses tipos de descrição são equivalentes. A escolha de uma abordagem ou outra é motivada apenas por uma questão de conveniência.

### • exemplo 8

Até agora, consideramos apenas os efeitos da superposição de ondas que se propagam com direções e sentidos iguais. Por isso consideramos, neste exemplo, estudamos o caso de ondas que se propagam na mesma direção, mas com sentidos *opostos*. Os campos elétricos de duas ondas desse tipo são dados por

$$\vec{E}_1 = E_0 \cos[(\kappa y - \omega t)] \hat{k}, \quad (13.31)$$

$$\vec{E}_2 = E_0 \cos[(\kappa y + \omega t)] \hat{k}. \quad (13.32)$$

Neste caso, a onda 1 propaga-se para a direita e a onda 2, para a esquerda. O campo elétrico resultante é dado por

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_0 \{ \cos[(\kappa y - \omega t)] + \cos[(\kappa y + \omega t)] \} \hat{k} \\ &= 2E_0 \cos(\kappa y) \cos(\omega t) \hat{k} \end{aligned} \quad (13.33)$$

Este resultado corresponde a um campo elétrico sem a dependência em  $y$  e  $t$  característica de ondas que se propagam. De fato, ele representa uma *onda estacionária*. Num ponto do espaço, caracterizado pela coordenada  $y_0$ , o campo oscila, com a passagem do tempo, com uma amplitude  $2E_0 \cos(\kappa y_0)$ . Isso significa que nos pontos para os quais vale a relação  $y_0 = (2n + 1)\pi/2\kappa$ , com  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , a amplitude é nula em todos os instantes  $t$ . Estes pontos são chamados *nós* da onda estacionária e por eles não flui energia, uma vez que o vetor de Poynting é nulo. A energia eletromagnética fica confinada entre os nós, daí o nome de onda estacionária. Para os pontos  $y_0 = n\pi/\kappa$ , com  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , a amplitude do campo elétrico tem valor máximo  $E = 2E_0$ . Estes pontos são chamados *ventres* da onda estacionária.

Os campos magnéticos das ondas 1 e 2 são dados por

$$\vec{B}_1 = \frac{\hat{j} \times \vec{E}_1}{c} = \frac{E_0}{c} \cos[(\kappa y - \omega t)] \hat{i} \quad (13.34)$$

$$\vec{B}_2 = \frac{-\hat{j} \times \vec{E}_2}{c} = -\frac{E_0}{c} \cos[(\kappa y - \omega t)] \hat{i} \quad (13.35)$$

e, pelo princípio da superposição, o campo resultante tem a função

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{2E_0}{c} \text{sen}(\kappa y) \text{sen}(\omega t) \hat{i}. \quad (13.36)$$

Portanto, o campo magnético, assim como o campo elétrico, têm nós e ventres. Entretanto, há defasagens espaciais e temporais, entre os nós e ventres de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ .

É importante notar que, para a onda estacionária, *não* vale a relação

$$\vec{B} = \frac{\hat{u} \times \vec{E}}{c}, \quad (13.37)$$

onde  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são os campos resultantes e  $\hat{u}$  é o versor da direção e sentido da propagação da onda. Na verdade, o versor  $\hat{u}$  não é definido, pois a onda resultante não se propaga. Relações do tipo da eq.(13.37) valem, entretanto, para as ondas 1 e 2, individualmente.

Os campos elétrico e magnético de uma onda estacionária, em diferentes instantes, estão ilustrados na Fig. 13.9.

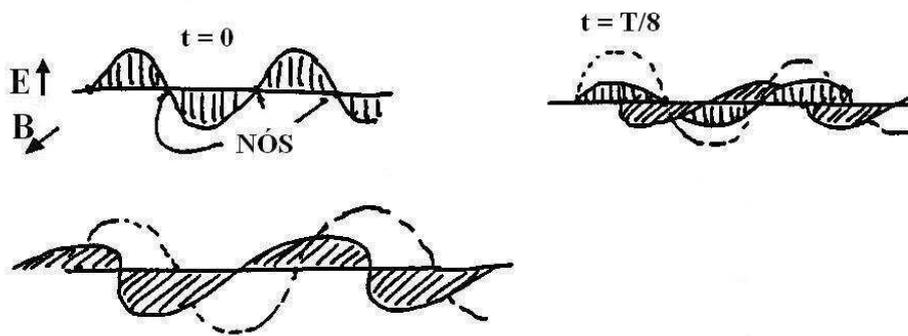


Figura 13.8: Os campos elétrico e magnético de uma onda estacionária em diferentes instantes.

• **exercícios**

1. Qual a vantagem de se usarem filtros polarizadores para se fazer óculos “escuros”?
2. Determine os campos elétrico e magnético de um feixe de luz circularmente polarizada, cujo campo elétrico é dado pela eq.(13.23), depois que ela atravessa um polarizador plano, situado no plano  $y = 0$  e com eixo de polarização fazendo  $30^\circ$  com o eixo  $x$ . Qual a razão entre as intensidades da radiação incidente e emergente?
3. Determine o campo elétrico da onda resultante da superposição de duas ondas cujos campos elétricos são dados por  $\vec{E}_1 = E_0 \cos[(\kappa y - \omega t)] \hat{k}$ , e  $\vec{E}_2 = 2E_0 \sin[(\kappa y - \omega t)] \hat{i}$ . Interprete a polarização da onda resultante.

• **respostas**

$$2. \vec{E} = E_0 \sin[\kappa(y - ct) + \pi/6] \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{i} + \frac{1}{2} \hat{k} \right]$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \sin[\kappa(y - ct) + \pi/6] \left[ \frac{1}{2} \hat{i} - \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{k} \right]$$

$$T = \sin^2[-\kappa ct + \pi/6]$$

3.  $\vec{E} = E_0 [2 \sin(\kappa y - \omega t) \hat{i} + \cos(\kappa y - \omega t)] \hat{k}$ . Se as ondas com polarizações planas tiverem a mesma fase mas amplitudes diferentes, a onda resultante será elípticamente polarizada. Neste exercício, a polarização é para a direita.



# Capítulo 14

## interferência

Uma onda eletromagnética é uma configuração de campos. Como não existe interação entre campos eletromagnéticos, vale o princípio da superposição, que afirma que, se numa região do espaço existirem campos de origens diferentes, então o efeito resultante é dado pela soma vetorial desses campos. Esta ideia é o ponto de partida para compreender o que acontece quando duas ondas eletromagnéticas coexistem numa dada região. Na aula anterior, consideramos várias situações nas quais duas ondas eletromagnéticas se superpunham e se propagavam na mesma direção. Nesta aula, estudamos o que acontece quando duas ondas superpoem em uma mesma região do espaço e se propagam em direções diferentes.

### • frentes de onda

Em muitas situações, é conveniente representar, por meio de desenhos, o comportamento das ondas. Por exemplo, consideremos o caso de uma onda eletromagnética, cujo campo elétrico é dado por

$$\vec{E} = E_0 \cos[\kappa y - \omega t] \hat{k} . \quad (14.1)$$

Esse campo elétrico pode ser representado de várias maneiras diferentes. Uma delas é pela figura 14.1(a), que representa um corte da onda, paralelo ao plano  $yz$ , num certo instante. Como esta onda é plana, todos os pontos com o mesmo valor de  $y$  têm a mesma fase. Cada conjunto de pontos de mesma fase define uma *frente de onda* e, na figura, as frentes de onda são planos ortogonais ao eixo  $y$ . O uso de frentes de onda permite uma representação alternativa da onda, como se a “olhássemos” de cima, tal como acontece quando atiramos pedras numa superfície de água parada e contemplamos as circunferências que se expandem. No caso da onda eletromagnética, o olhar de cima corresponde à fig. 14.1(b), onde as linhas cheias representam as intersecções de planos onde o campo é dado por  $\vec{E} = +E_0 \hat{k}$  ou  $\vec{E} = -E_0 \hat{k}$  com o plano  $xy$ , indicadas por (+) e (-). Já as linhas pontilhadas correspondem a planos onde  $\vec{E} = 0$ . À medida que o tempo passa, tanto a cossenóide quanto as frentes de onda deslocam-se para a direita, com velocidade  $c$ .

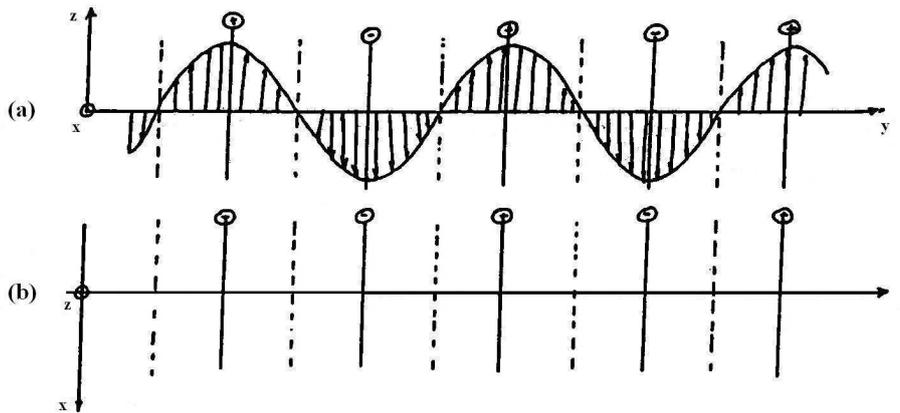


Figura 14.1: Duas representações geométricas para a onda plana linearmente polarizada que se propaga no sentido do eixo  $y$  positivo; (a) o campo elétrico da onda; (b) as frentes de onda.

### • superfícies nodais

Os fenômenos associados à interferência de ondas que se propagam em direções diferentes são muito ricos em informações e foram fundamentais no desenvolvimento da óptica. O mais perceptível deles é o aparecimento de linhas claras e escuras em superfícies que interceptam as ondas. Estes efeitos decorrem da possibilidade de o campo elétrico de uma das ondas anular o campo elétrico da outra, ao longo algumas regiões bidimensionais do espaço, conhecidas como *superfícies nodais*. A palavra *nodal* é o adjetivo derivado de *nó*.

Para discutir a origem das superfícies nodais em problemas de interferência, estudamos o que acontece quando, numa região do espaço, coexistem duas ondas eletromagnéticas cujos campos elétricos são dados por

$$\vec{E}_1 = E_0 \cos[\kappa y - \omega t] \hat{k}, \quad (14.2)$$

$$\vec{E}_2 = E_0 \cos[\kappa y - \omega t] \hat{k}. \quad (14.3)$$

Estas duas ondas têm a mesma amplitude, comprimento de onda, frequência e polarização, mas propagam-se em direções diferentes. Para compreender o resultado dessa superposição, é conveniente representá-las por meio de um corte paralelo ao plano  $xy$ . Na fig. 14.2, válida para um instante fixo, a onda 1 se propaga para baixo e a onda 2, para a direita. As linhas cheias horizontais representam os planos nos quais  $\vec{E}_1 = +E_0 \hat{k}$  ou  $\vec{E}_1 = -E_0 \hat{k}$ , enquanto que as linhas tracejadas horizontais indicam os planos nos quais  $\vec{E}_1 = 0$ . Analogamente, as linhas cheias verticais indicam  $\vec{E}_2 = +E_0 \hat{k}$  ou  $\vec{E}_2 = -E_0 \hat{k}$  e as tracejadas,  $\vec{E}_2 = 0$ . Como as duas ondas têm a mesma amplitude, cada cruzamento de duas linhas cheias do tipo (+) e (+) corresponde a um ponto onde o campo elétrico tem valor  $2E_0 \hat{k}$ , enquanto que nos cruzamentos de duas linhas cheias do tipo (-) e (-), o valor do campo é  $-2E_0 \hat{k}$ . Por outro lado, o campo resultante é nulo tanto nos cruzamentos de duas linhas do tipo (+) e (-) como no de duas linhas tracejadas. Além desses pontos

especiais, o campo resultante também é nulo ao longo de todas as diagonais indicadas por linhas pontilhadas na fig. 14.2. Este padrão vale para um instante  $t$  fixo. Se deixarmos o tempo correr, as ondas 1 e 2 propagam-se independentemente e a configuração devida à superposição se move numa direção que forma  $45^\circ$  com os eixos  $x$  e  $y$ , paralelamente ao versor  $\hat{u} = (\hat{i} + \hat{j})/\sqrt{2}$ . Neste processo, os planos onde o campo é nulo e que são paralelos a  $\vec{u}$  permanecem sempre iguais e, por isso, são chamados de *planos nodais*.

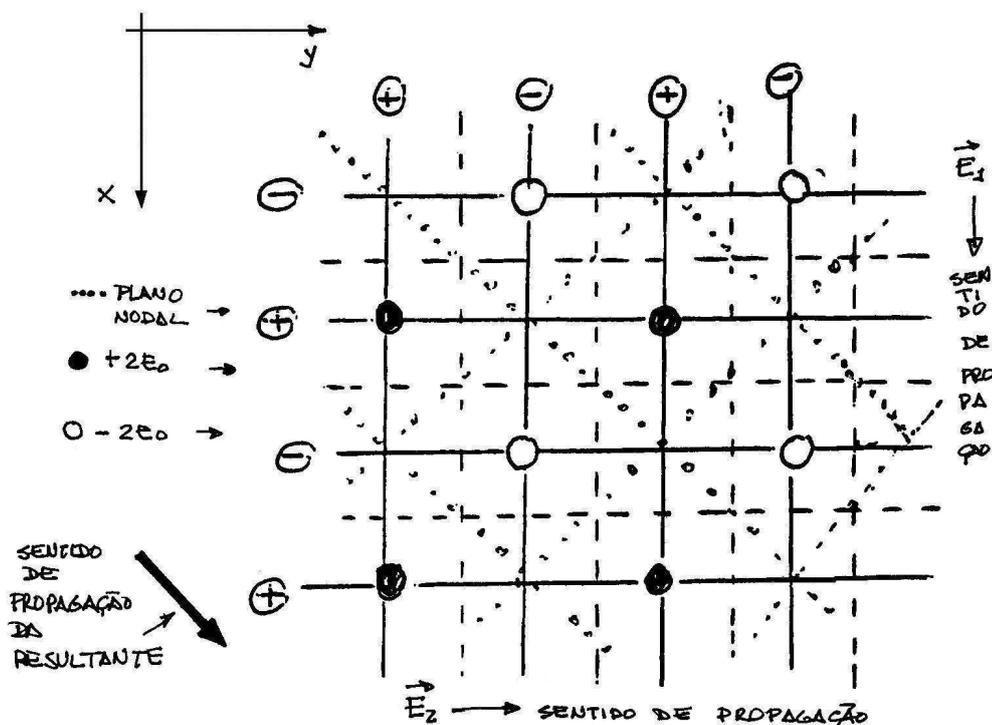


Figura 14.2: Representação geométrica de duas ondas planas, linearmente polarizadas, com mesmo comprimento de onda, que se propagam em direções perpendiculares, e a onda resultante.

### • franjas de interferência

As superfícies nodais constituem as marcas mais características da interferência entre ondas. E, felizmente, elas podem ser observadas por meio de experimentos.

No caso das ondas com campos elétricos dados pelas eqs.(14.2) e (14.3), que resultaram na fig. 14.2, a existência dos planos nodais pode ser observada por meio de uma tela branca, colocada de modo a interceptar perpendicularmente o caminho da onda resultante. Ou seja, ortogonalmente à bissetriz do ângulo formado pelos eixos  $x$  e  $y$ , como mostra o canto superior esquerdo da fig. 14.3.

Nos diversos painéis da fig. 14.3, indicamos o perfil do campo elétrico da onda resultante sobre o anteparo em oito instantes diferentes, separados pelo intervalo  $T/8$ , onde  $T$  é o período da onda.

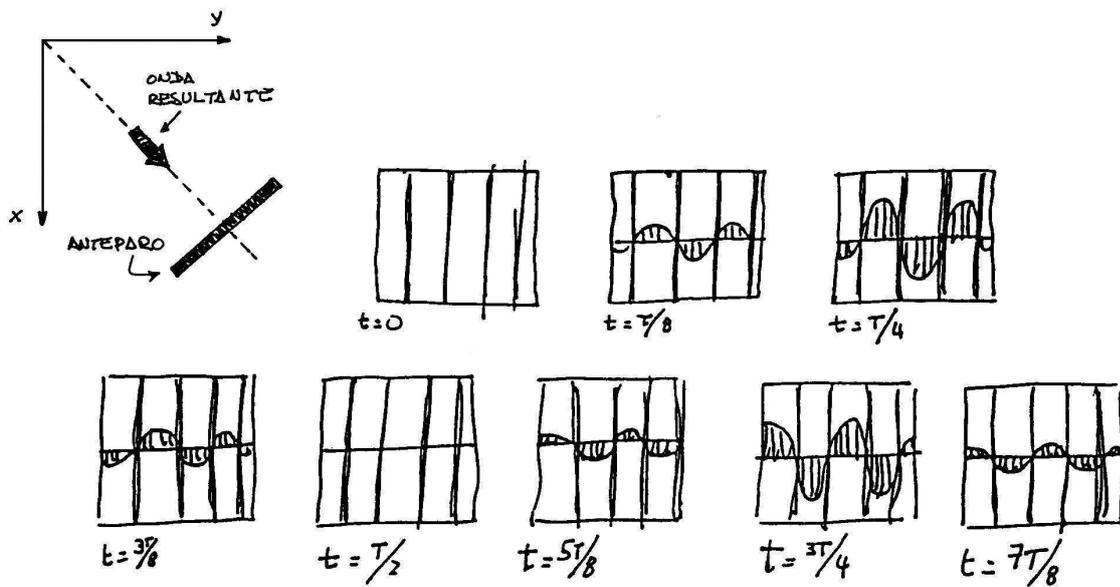


Figura 14.3: O campo elétrico da onda resultante da superposição de duas ondas planas, de mesma amplitude, comprimento de onda e polarização, que se propagam em direções perpendiculares, em diferentes instantes.

O primeiro desenho corresponde ao instante  $t = 0$ , no qual um plano nodal ortogonal à direção de propagação atinge o anteparo. Nesse instante, o campo sobre todo o anteparo é nulo, o mesmo acontecendo com a intensidade da onda, que é proporcional ao quadrado do campo. No instante  $t = T/8$ , começa a aparecer campo em algumas regiões do anteparo, enquanto que em outras, correspondentes aos planos nodais perpendiculares ao anteparo, o campo continua a ser nulo. O anteparo mostra, portanto, uma sucessão de linhas escuras verticais, que separam regiões iluminadas. A iluminação dessas regiões é pulsante, mas essa pulsação é tão rápida, da ordem de  $10^{14}$  Hz, que tanto os nossos olhos como a maioria dos instrumentos de medida percebem a iluminação como se ela fosse uma média contínua. Por outro lado, o que acontece na intersecção dos planos nodais com a tela não varia com o tempo. Em qualquer instante existem planos nodais interceptando perpendicularmente o anteparo, indicando a ausência contínua de campo elétrico nessas regiões.

A situação na qual duas ondas planas se movem em direções ortogonais pode ocorrer na natureza, mas não é a mais interessante para estudar os efeitos de superposição em laboratório. Nós a consideramos aqui apenas por ser particularmente simples, do ponto de vista conceitual. Situações mais realísticas serão apresentadas nas duas aulas seguintes.

### • aspectos geométricos, ondulatórios e eletromagnéticos

Muitos dos fenômenos da luz puderam ser descritos em bases puramente geométricas, bem antes da teoria de Maxwell. Parte deste conhecimento ainda hoje é conhecido como *óptica geométrica*, cujo principal instrumento é a ideia de *raio de luz*, que indica a direção de propagação da onda. Entre os fenômenos bem descritos pela óptica geométrica, estão

a propagação da luz num meio homogêneo, sua reflexão e transmissão ao encontrar um meio homogêneo diferente (refração) e a formação de imagens em espelhos e em lentes. Na descrição geométrica, o ganho em simplicidade compensa algumas fragilidades do método, e ela tem-se mostrado adequada quando o comprimento de onda da radiação é tanto muito pequeno comparado com as dimensões do meio onde ela se propaga, como muito grande em relação às estruturas atômico-moleculares desse meio.

Há fenômenos, entretanto, que não podem ser entendidos somente com base na descrição geométrica, como é o caso das interferências ondulatórias mostradas na fig. 14.2. Nesses casos, aparecem padrões de interferência, nos quais a radiação em algumas regiões do espaço tem intensidades altas e, em outras, intensidades baixas ou nulas. Estes padrões de interferência são como a impressão digital que identifica um fenômeno ondulatório, e ocorrem com todos os tipos de ondas. Sua descrição, pode ser feita de modo relativamente simples, com o uso de frentes de onda. Essas frentes de onda são superfícies perpendiculares aos raios, que se sucedem no tempo e, nas quais a intensidade da onda é uniforme. A ideia básica desta abordagem é o princípio de Huygens, que discutimos a seguir.

Para completar esta discussão, é importante ressaltar que existem muitas situações nas quais métodos aproximados, baseados apenas em raios de luz ou em frentes de onda, não são suficientes para descrever os fenômenos e tratamentos baseados diretamente nas equações de Maxwell são necessários. Este é o caso, por exemplo, de explicações dos efeitos de polarização, da cor azul do céu e da transparência ou opacidade de materiais.

## • princípio de Huygens

Na teoria de Maxwell, as ondas eletromagnéticas são descritas pelos campos elétricos  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  e magnéticos  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ , que contêm informação acerca da direção de propagação da onda.

De modo geral, se conhecermos a direção de propagação da onda, podemos construir as frentes de onda em cada instante. Um método de construção das frentes de onda foi proposto inicialmente por Huygens, em 1690 e, por isso, é conhecido como *princípio de Huygens*. Um possível enunciado para este princípio é o seguinte: *cada ponto de uma frente de onda num dado instante funciona como uma fonte secundária de onda esférica, de forma que a nova frente de onda, num instante posterior, é a envoltória das frentes de ondas esféricas provenientes dos vários pontos.*

A fig. 14.4(a) ilustra a propagação de uma onda esférica com base no princípio de Huygens. A propagação de cada frente de onda pode, segundo este princípio, ser entendida como proveniente da soma de inúmeras pequenas ondas, também esféricas. Na fig. 14.4(b) é mostrada a propagação de uma onda genérica, com base no mesmo princípio.

Segundo Huygens, uma vez perturbado, cada ponto do meio se comporta como uma fonte puntiforme. Essa fonte puntiforme emite ondas em todas as direções e, no vácuo, ou em meio homogêneo não dissipativo, a propagação se dá em todas as direções com

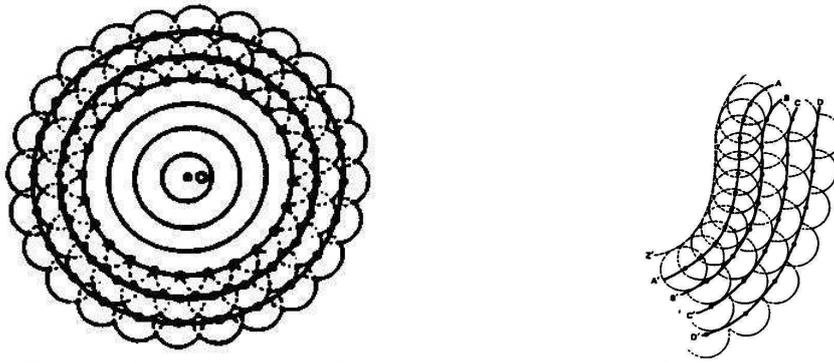


Figura 14.4: (a) Representação geométrica das frentes de uma onda esférica; (b) uma onda qualquer.

a mesma velocidade. Assim, a fonte puntiforme gera uma *onda esférica*. Os raios da onda esférica têm a direção radial, com origem na fonte, representada por um ponto, e as frentes de onda são superfícies esféricas concêntricas com a fonte.

Na representação gráfica das frentes de uma onda monocromática, é costume relacionar a distância entre as frentes de onda com seu comprimento de onda. Assim, na representação de uma onda com comprimento de onda  $\lambda$  e, de outra com  $2\lambda$ , a distância entre as superfícies que representam a frente de onda da primeira é metade da distância entre as frentes de onda da segunda.

Há dois pontos cruciais implícitos no uso do princípio de Huygens: o primeiro deles é que as ondas têm a mesma frequência que aquela que as gerou, independentemente do meio onde ela se propaga. O outro ponto é que, se a onda tem uma certa velocidade num meio, as ondas secundárias se propagam naquele meio com a mesma velocidade. Como consequência, se o meio em que a luz se propaga é homogêneo, os raios seriam linhas retas infinitas.

Alguns casos particulares de frentes de onda, além das esféricas, são importantes. Por exemplo, feixes de luz emitidos por fontes distantes, como o Sol, são representados por *ondas planas*. As ondas planas têm raios que são linhas paralelas entre si e infinitas, e as frentes de onda são superfícies planas, perpendiculares aos raios. Neste caso, a intensidade da onda que se propaga no vácuo é a mesma em todas as frentes de onda, para haver conservação da energia em sua propagação. Por isto a amplitude do campo elétrico da onda plana monocromática é constante.

Uma fonte de onda linear gera, segundo o princípio de Huygens, ondas cujos raios são radiais em relação à fonte e as frentes de onda são superfícies cilíndricas coaxiais com a fonte. Por esta razão estas ondas são chamadas de *cilíndricas*.

### • exemplo

Uma onda incide sobre um anteparo plano, contendo duas ranhuras verticais longas, muito estreitas e paralelas, como mostra a figura 14.5(a). Pelo princípio de Huygens, cada uma das fendas passa a se comportar como uma fonte de ondas cilíndricas. Se a onda incidir normalmente ao anteparo, as ondas emitidas pelas duas fendas estarão em fase e suas frentes de onda terão, num dado instante a configuração mostrada na fig. 14.5(b). Na região à direita do anteparo com fendas, temos algo análogo ao descrito na fig. 14.2, e aparecem superfícies nodais. Quando interceptadas por um outro anteparo, estas superfícies nodais se manifestam como uma sucessão de linhas que permanecem sempre escuras e, entre elas, existem regiões iluminadas.

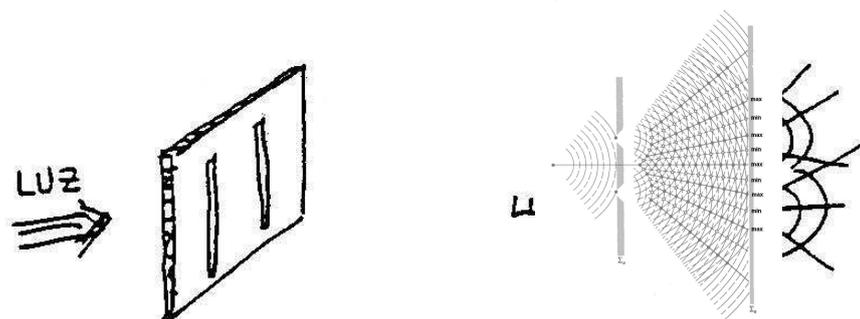


Figura 14.5: (a) Onda incidindo em um anteparo plano, com duas ranhuras verticais; (b) interferência entre as ondas provenientes das duas fendas, vista de cima.

### • exercício

1. Convença-se que, na figura 14.2, o campo elétrico é nulo ao longo de todas as diagonais indicadas por linhas pontilhadas.
2. As situações mostradas nas figs. 14.2 e 14.5(b) são semelhantes, na medida que, em ambas, existe uma região do espaço na qual ondas de mesmo comprimento de onda se propagam em direções diferentes. No caso da fig. 14.5(b), suponha que o comprimento de onda da luz seja  $\lambda$  e que  $d_1$  e  $d_2$  sejam as distâncias entre cada uma das fendas do anteparo ao *mesmo* ponto  $P$  da tela. Determine a diferença entre  $d_1$  e  $d_2$  para que o ponto  $P$  esteja sobre uma linha escura.

### • resposta

2. Há muitas soluções, dadas por  $d_1 - d_2 = \pm \frac{(2n+1)}{2} \lambda$ , onde  $n$  é um número inteiro.



# Capítulo 15

## interferência por duas fendas estreitas

- um tipo de experimento clássico

Experimentos de difração de luz por fendas, realizados por volta dos 1.800, foram muito importantes para estabelecer a sua natureza ondulatória. Neles, ondas monocromáticas incidem sobre anteparos com fendas, estudam-se os padrões de interferência que aparecem num segundo anteparo, normalmente branco, colocado a uma certa distância do primeiro, como mostra a figura 15.1.

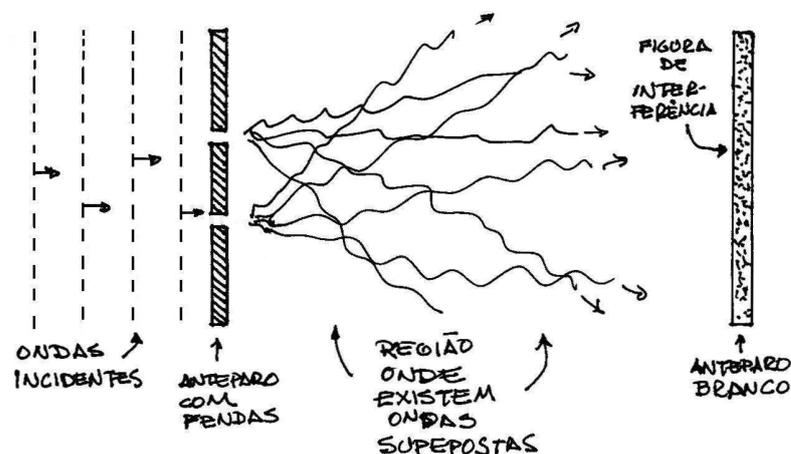


Figura 15.1: Esquema de arranjo experimental que permite a observação de padrões de interferência ondulatória.

Se as fendas forem estreitas, o princípio de Huygens permite que cada uma delas possa ser considerada como uma fonte independente. E, na região entre os dois anteparos, coexistem e estão superpostas as ondas provenientes das duas fendas. Para que o padrão de interferência dessas ondas possa ser observado sobre o anteparo branco, as larguras

das fendas devem ser pequenas quando comparadas com a distância entre os anteparos e ter a mesma ordem de grandeza do comprimento de onda  $\lambda$  da luz incidente.

Como a figura 15.1 sugere, a luz se propaga em várias direções diferentes depois de passar pelas fendas, e o mesmo acontece com a energia que ela carrega. Se, no primeiro anteparo, existir um pequeno orifício circular, ele pode ser considerado como uma fonte de ondas esféricas, que se propagam em todas as direções. No vácuo, ou em meio homogêneo não dissipativo, essa propagação se dá com a mesma velocidade. Assim, a fonte gera uma *onda esférica*, cujos raios têm origem na fenda, e cujas frentes de onda são superfícies esféricas concêntricas com ela. Se a fonte emite com potência constante, a energia média sobre qualquer frente de onda é sempre a mesma, independentemente do seu raio. Por isso, a conservação de energia exige que a intensidade (energia média por unidade de tempo e de área) da onda varie com o inverso do quadrado da distância à fonte. Se chamarmos de  $\vec{E}_0$  a amplitude do campo elétrico *na região da fenda*, a intensidade da onda naquela região será proporcional ao quadrado do campo e, portanto, a  $|\vec{E}_0|^2$ . Como, no caso da onda esférica, a intensidade da onda a uma distância  $r$  da fenda é proporcional a  $1/r^2$ , a amplitude do campo elétrico a essa distância vale  $\vec{E}_0/r$ .

No caso de emissores de ondas eletromagnéticas que têm outras simetrias que não a esférica, o princípio de Huygens prevê que as frentes das ondas geradas têm as mesmas simetrias que as fontes. Assim, uma ranhura retilínea e longa num anteparo, que pode ser considerada como uma fonte de onda linear, gera ondas que se propagam ao longo de linhas radiais em relação a ela, com frentes de onda na forma de superfícies cilíndricas, coaxiais com a fonte. Por esta razão estas ondas são chamadas de *cilíndricas*. Na propagação de ondas cilíndricas no vácuo, a conservação da energia faz com que a intensidade deva ser inversamente proporcional à distância da frente de onda à fonte, uma vez que a área de uma frente de onda é proporcional à sua distância ao eixo. Nestas ondas, a amplitude do campo elétrico à distância  $r$  da ranhura é dada por  $\vec{E}_0/\sqrt{r}$ .

### • o campo elétrico

Quando uma onda plana e monocromática incide sobre um anteparo contendo duas ranhuras estreitas, retilíneas e paralelas, cada uma das fendas passa a se comportar como uma fonte de ondas cilíndricas, cujas amplitudes em um ponto distando  $r$  da ranhura decrescem com  $1/\sqrt{r}$ . Se a onda incide normalmente ao anteparo, as ondas emitidas pelas duas fendas estão em fase. Analogamente ao caso das duas ondas planas estudadas na aula 14, as duas ondas cilíndricas que partem das fendas também se superpõem, gerando um padrão de máximos, mínimos e superfícies nodais. Sobre essas superfícies nodais, os campos se anulam e, por isso, no segundo anteparo podemos observar uma sucessão de listas verticais, claras e escuras.

As posições dessas linhas poderiam ser obtidas geometricamente, a partir do princípio de Huygens, como visto na aula 14. Entretanto, esse método não é o mais conveniente para um estudo detalhado da interferência que ocorre neste problema e, aqui, o abordamos

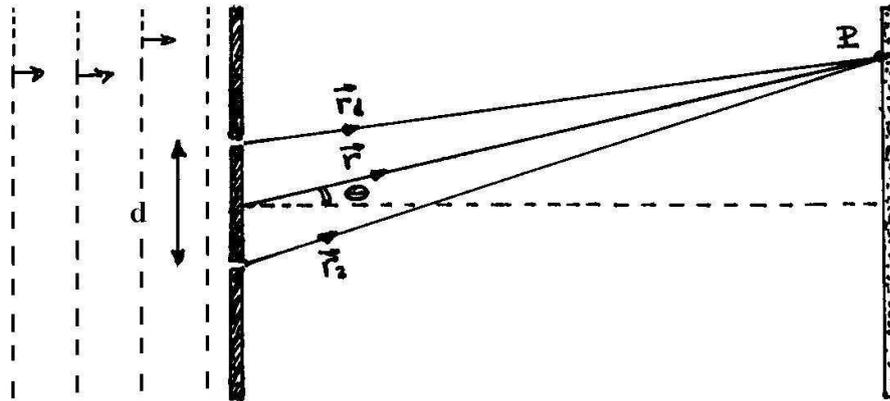


Figura 15.2: Esquema dos raios de luz que saem das fendas 1 e 2.

com base nas equações dos campos elétricos. Consideremos a situação mostrada na fig. 15.2, onde uma onda plana que se propaga ao longo do eixo  $y$  incide sobre um anteparo situado sobre o plano  $y = 0$ , com duas fendas compridas e estreitas, paralelas ao eixo  $z$ , que funcionam como fontes de ondas cilíndricas. Essas ondas superpostas se propagam e incidem sobre uma tela, paralela ao anteparo. Nosso problema consiste em determinar o que ocorre em um ponto genérico  $P$  da tela, que dista  $r_1$  da fenda 1 e  $r_2$  da fenda 2.

Os módulos dos campos elétricos sobre as fendas são iguais, pois eles derivam da mesma onda plana. Supondo que tal onda esteja polarizada paralelamente ao eixo  $z$ , podemos escrever os campos *sobre as fendas* como

$$\vec{E}_1 = E_0 \cos \omega t \hat{k}, \quad (15.1)$$

$$\vec{E}_2 = E_0 \cos \omega t \hat{k}. \quad (15.2)$$

No ponto  $P$ , esses campos passam a ser dados por

$$\vec{E}_1 = \frac{E_0}{\sqrt{r_1}} \cos(\kappa r_1 - \omega t) \hat{k}, \quad (15.3)$$

$$\vec{E}_2 = \frac{E_0}{\sqrt{r_2}} \cos(\kappa r_2 - \omega t) \hat{k}. \quad (15.4)$$

Estas expressões para  $\vec{E}_1$  e  $\vec{E}_2$  contêm dois ingredientes importantes. O primeiro deles é o fator  $1/\sqrt{r}$ , que representa a diminuição do módulo do campo com a distância a uma fonte cilíndrica. O segundo é uma fase relativa ao campo na fenda, dada por  $\vec{\kappa} \cdot \vec{r} = \kappa r$ . O campo resultante no ponto  $P$  do anteparo é dado por

$$\vec{E}_P = \vec{E}_1 + \vec{E}_2. \quad (15.5)$$

Quando a distância da tela ao anteparo for muito maior que a separação entre as fendas, como na figura 15.3, podemos expressar  $r_1$  e  $r_2$  em termos de  $r = (r_1 + r_2)/2$ , a média

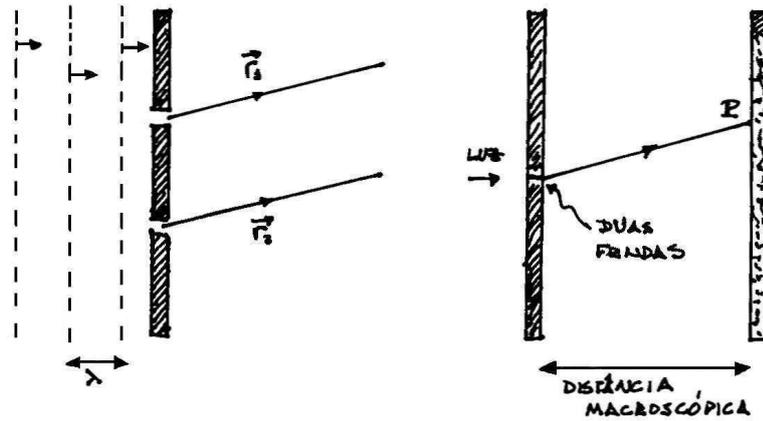


Figura 15.3: A figura (a) foi desenhada na escala do comprimento de onda da luz incidente, que é comparável à separação entre as fendas; no caso da figura (b) a escala do anteparo branco do laboratório foi utilizada e, por isso, é impossível representar adequadamente as frentes de onda de luz incidente e a distância entre as fendas; a existência dessas duas escalas tão diferentes permite que os vetores  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  da figura (a) possam ser considerados como paralelos, ainda que isso não seja estritamente verdade.

dessas distâncias, e de  $\Delta = (r_2 - r_1)/2$ , a metade da diferença entre elas. Assim,

$$r_1 = r - \Delta, \quad (15.6)$$

$$r_2 = r + \Delta, \quad (15.7)$$

sendo  $r \gg \Delta$ . Nesse caso, podemos usar, para as amplitudes, as aproximações  $1/\sqrt{r_1} \sim 1/\sqrt{r_2} \sim 1/\sqrt{r}$  e escrever o módulo de  $\vec{E}_P$  como

$$\begin{aligned} E_P &= \frac{E_0}{\sqrt{r}} [\cos(\kappa r - \omega t - \kappa \Delta) + \cos(\kappa r - \omega t + \kappa \Delta)] \\ &= \frac{2E_0}{\sqrt{r}} [\cos(\kappa \Delta) \cos(\kappa r - \omega t)]. \end{aligned} \quad (15.8)$$

A distância  $\Delta$  pode ser expressa em termos das variáveis  $r$  e  $\theta$  da figura 15.4, como

$$\Delta = \frac{d \operatorname{sen} \theta}{2} \quad (15.9)$$

e o módulo do campo elétrico resultante sobre o anteparo pode ser escrito como

$$E = E_A [\cos(\kappa r - \omega t)], \quad (15.10)$$

onde  $E_A$  é a amplitude, dada por

$$E_A = \frac{2E_0}{\sqrt{r}} \left[ \cos \left( \frac{\pi d \operatorname{sen} \theta}{\lambda} \right) \right], \quad (15.11)$$

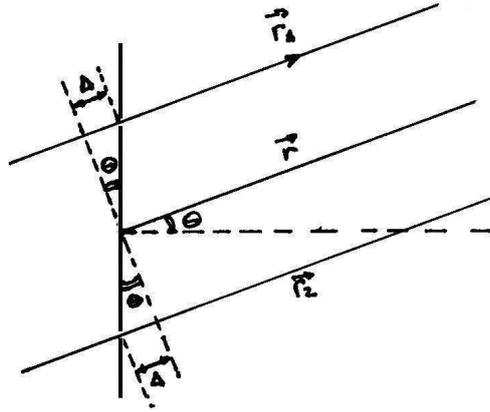


Figura 15.4: Relação geométrica entre as variáveis  $\Delta$ ,  $d$  e  $\theta$ .

usando  $\kappa = 2\pi/\lambda$ . Esta amplitude depende de  $\theta$ , indicando que ela varia ao longo da tela e, também, da razão  $d/\lambda$ . A variável  $d$  representa a separação entre as duas fendas e, por isso, pode ser escolhida segundo o interesse da pessoa que realiza o experimento. Em princípio, respeitadas as limitações tecnológicas, essa pessoa pode construir anteparos com o valor que desejar para  $d$ . A variável  $\lambda$ , por outro lado, depende da frequência da luz usada no experimento e pode, também, ser escolhida à vontade. Deste modo, a pessoa que realiza um experimento de difração pode escolher o valor que quiser para a razão  $d/\lambda$ .

### • as franjas de interferência

A amplitude  $E_A$ , eq. (15.11), é proporcional a um cosseno e oscila. Os seus pontos de máximo e mínimo são determinados, respectivamente, pelas condições

$$\cos\left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}\right) = \pm 1 \rightarrow \frac{d \sin \theta_{max}}{\lambda} = n, \quad (15.12)$$

$$\cos\left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}\right) = 0 \rightarrow \frac{d \sin \theta_{min}}{\lambda} = \frac{2n + 1}{2}, \quad (15.13)$$

sendo  $n$  um número inteiro. Essas condições determinam os valores dos ângulos correspondentes, por meio das equações

$$\sin \theta_{max} = n \frac{\lambda}{d}, \quad (15.14)$$

$$\sin \theta_{min} = \left(\frac{2n + 1}{2}\right) \frac{\lambda}{d}. \quad (15.15)$$

Na tela, os pontos de mínimo correspondem a regiões sempre escuras e os pontos de máximo, a regiões brilhantes. Na região central da tela, para a qual  $\theta = 0$ , existe uma região mais brilhante e o aparecimento de linhas escuras ou de mais linhas claras depende

da relação  $\lambda/d$ . Considere, por exemplo, um experimento onde  $d = \lambda/4$ , para o qual as equações (15.14) e (15.15) seriam  $\sin \theta_{max} = 4n$  e  $\sin \theta_{min} = 4,5n$ , respectivamente. Como  $\sin \theta \leq 1$ , a única solução viável é dada por  $n = 0$  e, neste caso, não existem linhas escuras.

Na tabela abaixo fornecemos os valores dos ângulos correspondentes às linhas escuras para vários valores da razão  $\lambda/d$ .

$n + 1/2$	$d = \lambda/2$		$d = \lambda$		$d = 2\lambda$		$d = 4\lambda$	
	$\sin \theta$	$\theta$	$\sin \theta$	$\theta$	$\sin \theta$	$\theta$	$\sin \theta$	$\theta$
1/2	1	$90^\circ$	1/2	$30^\circ$	1/4	$14^\circ$	1/8	$7^\circ$
3/2	não há		não há		3/4	$48^\circ$	3/8	$22^\circ$
5/2	não há		não há		não há		5/8	$39^\circ$
7/2	não há		não há		não há		7/8	$61^\circ$

Os planos nodais correspondentes ao caso  $d = 4\lambda$  estão mostrados na Fig. 15.5, que dão origem a oito linhas escuras sobre o anteparo. As regiões entre esses planos permanecem iluminadas.

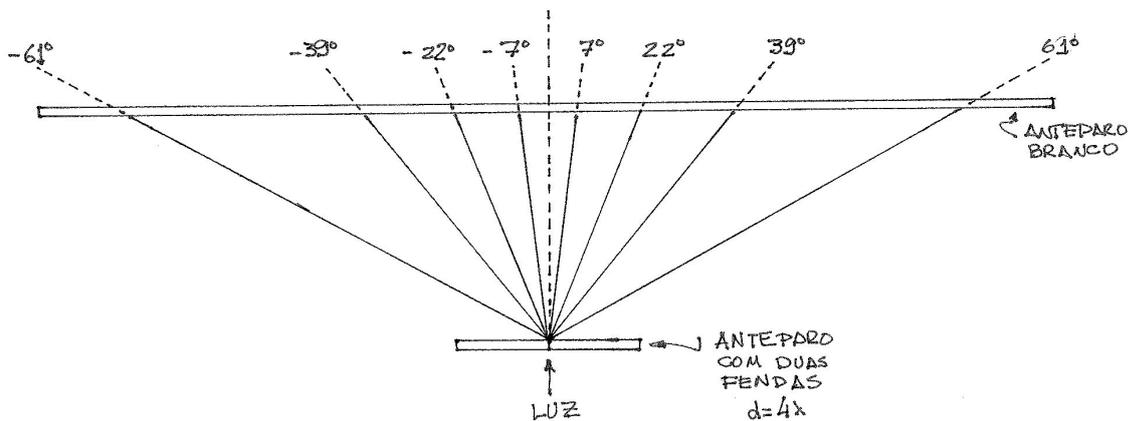


Figura 15.5: Planos nodais para o caso  $d = 4\lambda$ .

### • a energia

O fluxo de energia sobre a tela é determinado pelo vetor de Poynting

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}. \quad (15.16)$$

Como o campo magnético é dado por

$$\vec{B} = \frac{\vec{c} \times \vec{E}}{c^2}, \quad (15.17)$$

o vetor de Poynting é paralelo à velocidade da luz e expresso por

$$\vec{S} = \left( \frac{E^2}{\mu_0 c^2} \right) \vec{c}. \quad (15.18)$$

Assim, a energia que incide sobre a tela por unidade de tempo e unidade de área é dada pelo produto escalar de  $\vec{S}$  pelo versor  $\hat{n}$ , normal à superfície, e vale

$$S_\theta = \vec{S} \cdot \vec{n} = \left( \frac{E^2}{\mu_0 c} \right) \cos \theta. \quad (15.19)$$

A média temporal desta grandeza é

$$\langle S_\theta \rangle = \frac{E_A^2}{2\mu_0 c} \cos \theta, \quad (15.20)$$

usando  $\langle E^2 \rangle = E_A^2/2$ , sendo a amplitude  $E_A$  dada pela eq. (15.11). Assim,

$$\langle S_\theta \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c} \frac{4E_0^2}{r} \left[ \cos^2 \left( \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right) \right] \cos \theta. \quad (15.21)$$

Notando que, se fechássemos uma das fendas, a incidência média de energia seria dada por

$$\langle S_\theta \rangle_0 = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c r} \cos \theta, \quad (15.22)$$

podemos escrever

$$\langle S_\theta \rangle = 4 \left[ \cos^2 \left( \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right) \right] \langle S_\theta \rangle_0. \quad (15.23)$$

O gráfico da intensidade sobre a tela para o caso  $d = 4\lambda$  está esboçado na fig. 15.6.

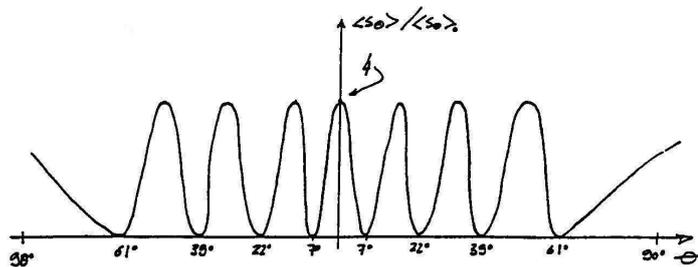


Figura 15.6: Intensidade relativa que chega ao anteparo branco, em função do ângulo  $\theta$ , para o caso  $d = 4\lambda$ .

Para que as faixas brilhantes e escuras possam ser observadas experimentalmente, é preciso que a luz empregada seja monocromática, ou seja, tenha frequência muito bem

definida. Quando isto não acontece, as linhas aparecem borradas e podem não ser observadas. O experimento de interferência por duas fendas estreitas, tal como o discutido esquematicamente nesta aula, foi realizado pela primeira vez por Thomas Young, em 1801. Por isso, quaisquer interferências de duas fendas costumam ser chamadas de experimentos de Young.

### • anteparos cilíndricos

O cálculo da energia das ondas difratadas que incide sobre a tela branca da figura 15.5, por unidade de área e por unidade de tempo, envolve um fator  $\cos \theta$  que, como indica a eq.(15.19), decorre do fato de a incidência da luz sobre a tela ser oblíqua quando  $\theta \neq 0$ . Em um arranjo experimental, este fator pode ser eliminado pelo emprego de uma tela branca cilíndrica, tal como a indicada na figura 15.7. Neste caso, as equações análogas a (15.19)-(15.22) seriam obtidas por meio da substituição  $\cos \theta \rightarrow 1$ .

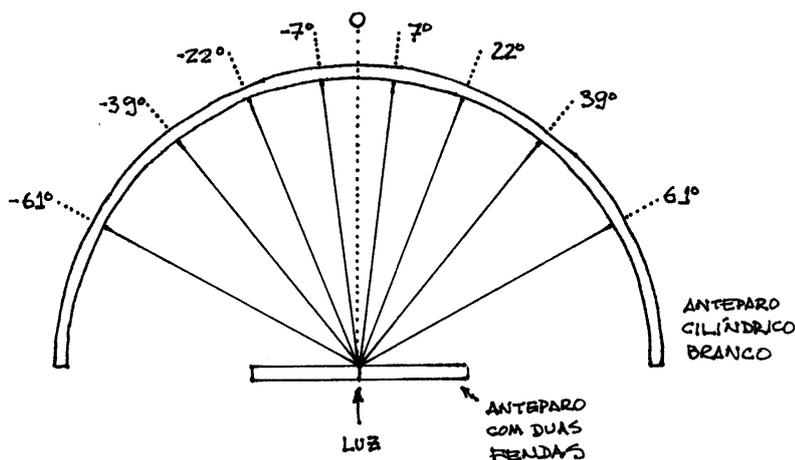


Figura 15.7: Planos nodais para o caso  $d = 4\lambda$ .

### • exercícios

1. Supondo que  $d = 4\lambda$  e que a tela diste  $100d$  do anteparo, esboce gráficos representando os campos  $\vec{E}_1$  e  $\vec{E}_2$  entre as fendas e o primeiro ponto de mínimo.
2. Usando um programa gráfico, estude o comportamento da função  $F(\theta) = \cos \left[ \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right]$ , em função de  $\theta$ , no intervalo  $1/10 \leq d/\lambda \leq 10$ .
3. Por que duas fendas muito juntas não provocam figuras de interferência?
4. Considere o caso da interferência provocada pela passagem de luz em duas fendas estreitas e use diretamente as construções geométricas associadas ao princípio de Huygens

para determinar os ângulos  $\theta$  para os quais aparecem linhas escuras no anteparo branco, no caso  $d = 4\lambda$ .

**• respostas**

3. Porque a onda as percebe como uma única fenda...

# Capítulo 16

## difração em fendas largas

Na difração por duas fendas estreitas vimos que, a luz pode produzir um padrão de linhas claras e escuras numa tela. A interferência observada é devida à diferença de fase entre as ondas emitidas pelas duas fendas, já que as distâncias de cada uma delas a um ponto genérico da tela são diferentes. Naquele caso, o conceito de “distância à fenda” não tinha ambiguidade, porque ela não possuía espessura e podia ser considerada como uma linha. Nesta aula consideramos o caso de fendas com larguras. Quando isto acontece, cada ponto da fenda funciona como uma fonte unidimensional e pode existir uma diferença de fase entre dois raios “vizinhos”, o que dá origem a um padrão de interferência diferente do obtido na aula anterior.

### • uma fenda larga

O estudo dos padrões de interferência produzidos por uma fenda larga é feito considerando um ponto  $P$  genérico de uma tela branca cilíndrica, situado à distância  $r$  do centro da fenda, sendo  $r$  muito maior do que a largura da fenda, como na fig. 15.6.

Quando uma onda plana, polarizada na direção  $\hat{k}$ , incide normalmente sobre um anteparo no qual há uma fenda de largura  $a$ , temos a situação indicada na fig. 16.1, onde todos os pontos sobre o eixo  $x$  têm a mesma fase. As ondas incidente e difratada existem, respectivamente, nas regiões  $y < 0$  e  $y > 0$ . Considerando a fenda sobre o eixo  $x$ , com o seu centro coincidente com a origem do sistema de coordenadas, a diferença de fase entre o raio central e o que parte de um ponto situado à coordenada  $x$  é dada por

$$\delta(x) = \kappa x \sin \theta . \quad (16.1)$$

Assim, o campo elétrico sobre o ponto  $P$  da tela, devido ao raio que emergiu do ponto de coordenada  $x$ , pode ser escrito como

$$\vec{E}(r, x) = \frac{E_0}{\sqrt{r}} \cos[\kappa(r + x \sin \theta) - \omega t] \hat{k} . \quad (16.2)$$

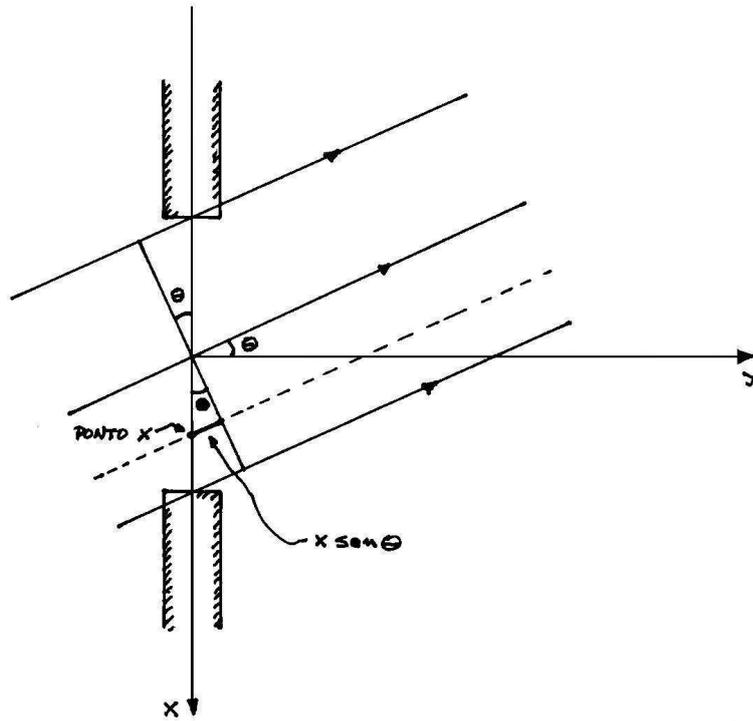


Figura 16.1: Raios da onda difratada pela fenda com largura  $a$ .

O campo observado naquele ponto corresponde a uma média das várias contribuições individuais dada por

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(r) &= \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} dx \vec{E}(r, x) \\
 &= \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} dx \frac{E_0}{\sqrt{r}} \cos[\kappa(r + x \text{ sen } \theta) - \omega t] \hat{k} \\
 &= \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} dx \frac{E_0}{\sqrt{r}} \{ \cos(\kappa r - \omega t) \cos(\kappa x \text{ sen } \theta) - \text{sen}(\kappa r - \omega t) \text{sen}(\kappa x \text{ sen } \theta) \} \hat{k} \\
 &= \frac{E_0}{\sqrt{r}} \frac{2}{\kappa a \text{ sen } \theta} \text{sen} \left( \frac{\kappa a \text{ sen } \theta}{2} \right) \cos(\kappa r - \omega t) \hat{k}. \tag{16.3}
 \end{aligned}$$

Chamando

$$\phi = \frac{\kappa a \text{ sen } \theta}{2} \tag{16.4}$$

temos

$$\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{r}} \frac{\text{sen } \phi}{\phi} \cos(\kappa r - \omega t) \hat{k}. \tag{16.5}$$

Para calcular o fluxo de energia sobre a tela, usamos o vetor de Poynting, que é dado por

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c^2} \vec{c} = \frac{E_0^2}{r \mu_0 c^2} \left[ \frac{\text{sen } \phi}{\phi} \right]^2 \cos^2(\kappa r - \omega t) \vec{c}. \quad (16.6)$$

A sua média temporal vale

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{r \mu_0 c^2} \left[ \frac{\text{sen } \phi}{\phi} \right]^2 \vec{c}. \quad (16.7)$$

No problema presente, a velocidade da luz que sai da fenda é paralela ao vetor  $\vec{r}$  e, portanto, podemos escrever

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{r \mu_0 c} \left[ \frac{\text{sen } \phi}{\phi} \right]^2 \frac{\vec{r}}{r}. \quad (16.8)$$

Assim, a energia que incide sobre a tela por unidade de tempo e unidade de área é dada pelo produto escalar de  $\vec{S}$  com  $\hat{n}$ . Para a tela cilíndrica  $\hat{n} \parallel \vec{r}$  e portanto

$$\langle |\vec{S}| \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{r \mu_0 c} \left[ \frac{\text{sen } \phi}{\phi} \right]^2. \quad (16.9)$$

O valor máximo desta função ocorre para  $\phi = 0$  e vale <sup>1</sup>

$$\langle |\vec{S}| \rangle_{max} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{r \mu_0 c}, \quad (16.10)$$

o que permite escrever

$$\langle |\vec{S}| \rangle = \langle |\vec{S}| \rangle_{max} \left[ \frac{\text{sen } \phi}{\phi} \right]^2. \quad (16.11)$$

A função  $\text{sen } \phi$  pode ser nula sempre que a condição

$$\phi = \frac{\kappa a \text{sen } \theta}{2} = n \pi \quad (16.12)$$

for satisfeita, sendo  $n$  um número inteiro. Como  $\kappa = 2\pi/\lambda$ , existem linhas escuras sempre que

$$\text{sen } \theta_n = \frac{n\lambda}{a}. \quad (16.13)$$

As soluções desta equação dependem da razão  $\lambda/a$ . Por exemplo, se  $a = \lambda/2$ , a eq. (16.14) passa a ser  $\text{sen } \theta = 2n$ , que não tem solução quando  $n$  é um número inteiro. A primeira possibilidade de solução ocorre para  $\lambda = a$ , e alguns exemplos são dados na tabela. A intensidade relativa, para o caso  $a = 3\lambda$ , dado na fig. 16.2, corresponde ao resultado experimental mostrado na fig. 16.3.

<sup>1</sup>Usamos o resultado  $\lim_{\phi \rightarrow 0} (\text{sen } \phi)/\phi = 1$ .

n	$a = \lambda/2$		$a = 1,7 \lambda$		$a = 3 \lambda$		$a = 3,2 \lambda$		$a = 3,8 \lambda$	
	$\text{sen } \theta_n$	$\theta_n$								
1	2	não há	0,59	36,03°	0,33	19,47°	0,31	18,21°	0,26	15,26°
2	4	não há	1,18	não há	0,67	41,81°	0,63	38,68°	0,53	31,76°
3	...	não há	1,76	não há	1,00	90,00°	0,94	69,64°	0,79	52,14°
4	...	...	...	...	1,33	não há	1,25	não há	1,05	não há
5	...	...	...	...	1,67	não há	1,56	não há	1,32	não há

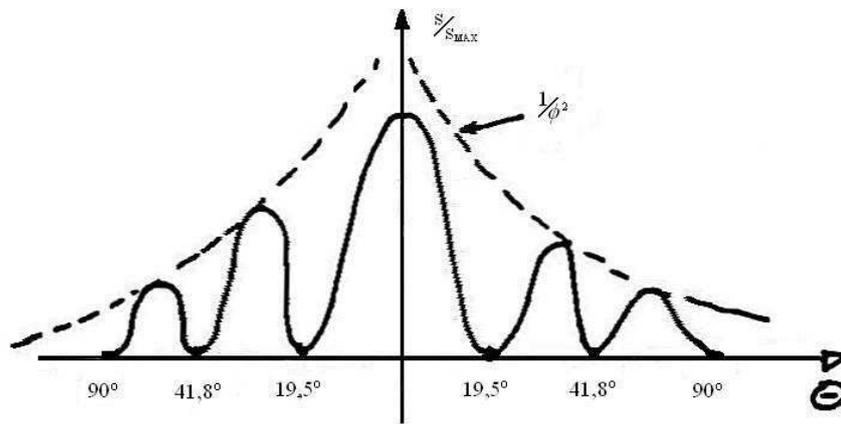


Figura 16.2: Intensidade relativa da luz que chega na tela cilíndrica versus o ângulo  $\theta$ , no caso de uma fenda com largura  $a = 3 \lambda$ .

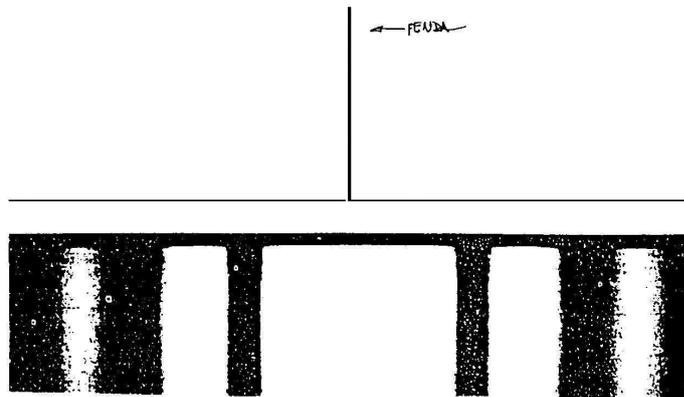


Figura 16.3: O padrão de difração com claros e escuros observados na tela, longe da fenda de largura  $a = 3 \lambda$ .

O comprimento de onda da luz visível é da ordem de  $10^{-7}m$ , e os efeitos da difração podem ser observados para fendas com larguras de magnitude comparável. Quando a largura da fenda é muito maior do que  $\lambda$ , a observação da difração fica difícil. Por exemplo,

sobre uma tela colocada à frente de uma fenda de 1 metro de abertura, comparável a uma porta, existem da ordem de  $10^7$  soluções para a eq.(16.13). Ou seja, da ordem de 10 milhões de linhas escuras, separando regiões claras. Essas linhas estão de tal modo empilhadas umas sobre as outras, que é impossível distingui-las. O que se percebe, então, é apenas uma região clara depois da porta.

### • duas fendas largas

No caso de duas fendas largas como na fig. 16.4, o padrão de interferência é mais complexo. Para cada uma das fendas vale o resultado dado pela eq. (16.5). Assim, escrevemos os campos médios das ondas oriundas das fendas 1 e 2 como

$$\vec{E}_1 = \frac{E_0}{\sqrt{r}} \frac{\text{sen } \phi}{\phi} \cos(\kappa r_1 - \omega t) \hat{k}, \quad (16.14)$$

$$\vec{E}_2 = \frac{E_0}{\sqrt{r}} \frac{\text{sen } \phi}{\phi} \cos(\kappa r_2 - \omega t) \hat{k}, \quad (16.15)$$

com  $\phi = \kappa a \text{sen } \theta/2$ .

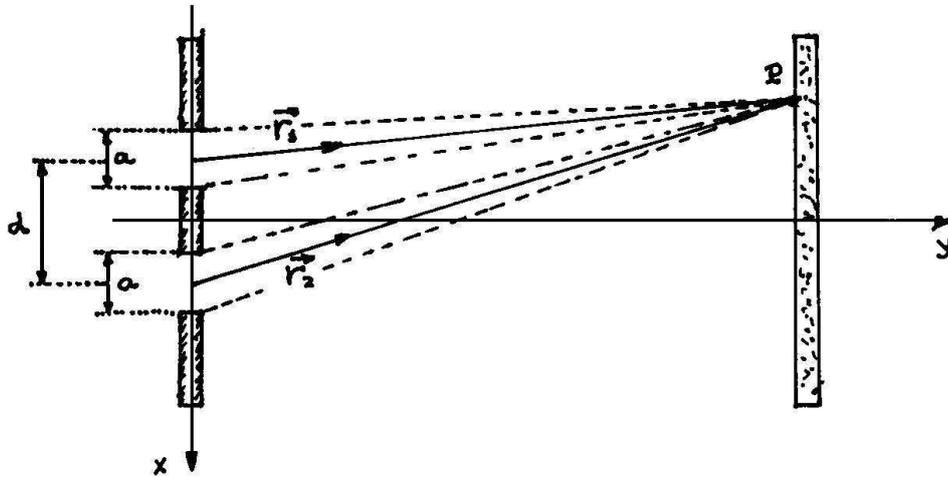


Figura 16.4: Esquema do experimento de duas fendas de largura  $a$  e grande distância da tela às fendas.

Como na aula 15, chamamos

$$\begin{aligned} r_1 &= r - \frac{d}{2} \text{sen } \theta, \\ r_2 &= r + \frac{d}{2} \text{sen } \theta. \end{aligned} \quad (16.16)$$

Assim, o campo resultante no ponto  $P$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{E_0}{\sqrt{r}} \frac{\text{sen } \phi}{\phi} 2 \cos \beta \cos(\kappa r - \omega t) \hat{k}, \\ \beta &= \frac{\kappa d \text{sen } \theta}{2}.\end{aligned}\quad (16.17)$$

A intensidade da radiação incidente sobre a tela cilíndrica é

$$\langle |\vec{S}| \rangle = \frac{\langle E^2 \rangle}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{r\mu_0 c} 4 \cos^2 \beta \left[ \frac{\text{sen } \phi}{\phi} \right]^2, \quad (16.18)$$

e usando a eq. (16.11) escrevemos

$$\langle |\vec{S}| \rangle = 4 \cos^2 \beta \left[ \frac{\text{sen } \phi}{\phi} \right]^2 \langle |\vec{S}| \rangle_{max}. \quad (16.19)$$

A diferença entre este resultado, válido para duas fendas largas, e a eq.(16.11), válida para uma fenda, é o fator  $4 \cos^2 \beta$ , que dá origem a um novo conjunto de superfícies nodais, que ocorrem sempre que

$$\beta = \frac{\kappa d \text{sen } \theta_m}{2} = (2m + 1) \frac{\pi}{2}, \quad (16.20)$$

sendo  $m$  um número inteiro. Usando  $\kappa = 2\pi/\lambda$ , obtemos a condição

$$\text{sen } \theta_m = \frac{2m - 1}{2} \frac{\lambda}{d} \quad (16.21)$$

para os zeros de  $\beta$ .

A intensidade relativa determinada por esse resultado é a mostrada na fig. 16.5. Na fig. 16.6 são mostradas duas fotografias, obtidas por meio de difração por uma e duas fendas largas.

### • exercícios

**1.** Considere a difração de uma luz monocromática cujo comprimento de onda é  $\lambda$  por uma fenda de largura  $a = 4\lambda$ .

a) obtenha os ângulos para os quais a intensidade é nula.

b) esboce um gráfico  $\langle |\vec{S}| \rangle \times \theta$ .

**2.** Uma fenda única produz um espectro de difração sobre uma tela branca, colocada a 80,0 cm à frente dela. Nessa tela, a distância entre os dois mínimos centrais é de 5,2 cm. Sabendo que o comprimento de onda da luz incidente é de  $5,46 \times 10^{-7}$  m, determine a largura da fenda.

**3.** Uma fenda é iluminada por luz constituída pelos comprimentos de onda  $\lambda_a$  e  $\lambda_b$ , escolhidos de forma que o primeiro mínimo de difração de  $\lambda_a$  coincida com o segundo

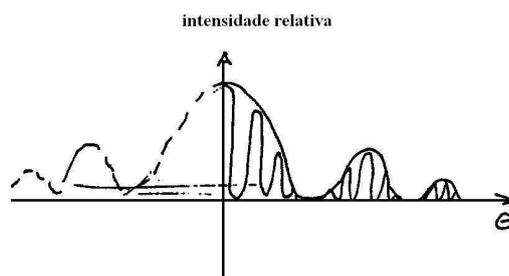


Figura 16.5: A intensidade relativa da onda versus  $\theta$  na tela cilíndrica distante das duas fendas com  $a = 3\lambda$ .

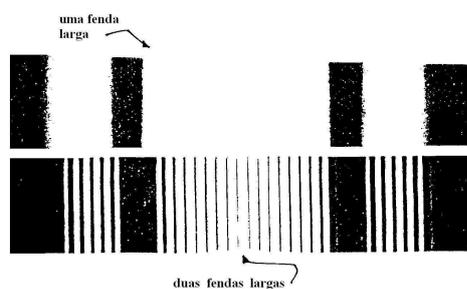


Figura 16.6: Padrões de interferência: (a) difração de uma fenda larga; (b) difração com interferência de duas fendas largas.

mínimo de difração de  $\lambda_b$ .

- Qual a relação entre esses dois comprimentos de onda?
- Haverá coincidências entre outros mínimos deste espectro?

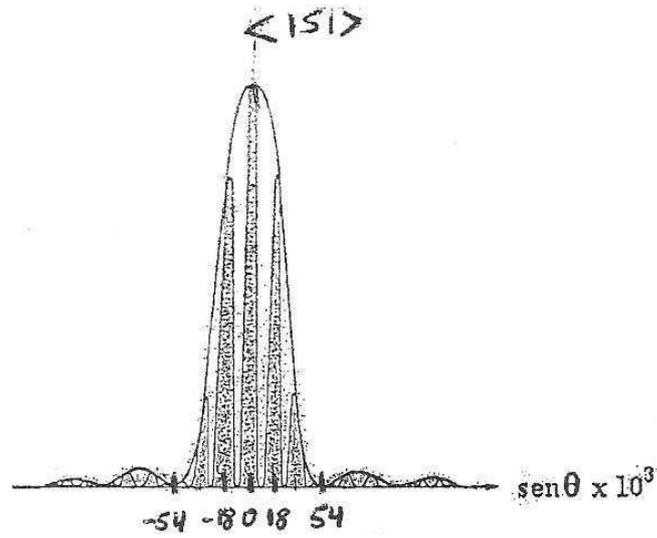
4. Considere um sistema de duas fendas de larguras iguais  $a$  separadas uma da outra pela distância  $d$ .

- Supondo  $d = 3a$ , quantas franjas de interferência haverá dentro da envolvente central de difração?
- Supondo  $d = a$ , qual será o espectro obtido na tela?

5. Uma onda plana e monocromática incide perpendicularmente em um anteparo, onde existem duas fendas longas, retilíneas, paralelas entre si e separadas pela distância  $d$ . A largura de cada uma das fendas é  $a = 10^{-5}\text{m}$ . A figura apresenta, em função do ângulo  $\theta$ , o gráfico da intensidade da radiação incidente sobre uma tela cilíndrica e muito distante.

- determine o comprimento de onda da radiação;
- determine o valor da distância entre as fendas;
- esboçe o gráfico da intensidade da radiação em função de  $\theta$ , quando uma das fendas é fechada.

### • respostas



1. a)  $14,51^\circ$ ;  $30,08^\circ$ ;  $48,75^\circ$ .
2.  $\text{sen } \theta_1 = 2,6/80,0 \rightarrow a = 1,68 \times 10^{-5}\text{m}$ .
3.  $\lambda_a = 2\lambda_b$ .
4. a) 6    b) dado pela eq.(16.10), fazendo  $a \rightarrow 2a$  na eq.(16.5).
5. a)  $\lambda = 5,4 \times 10^{-7}\text{m}$ ;    b)  $d = 1,8 \times 10^{-7}\text{m}$ .

# Capítulo 17

## relatividade: impacto e princípios

A teoria da relatividade restrita foi proposta por Albert Einstein em 1905, no mesmo ano em que ele publicou o seu famoso trabalho sobre o efeito fotoelétrico. As idéias de Einstein tiveram enorme impacto na ciência do século 20, e também importantes implicações filosóficas, epistemológicas e culturais. A visão de mundo subjacente à teoria da relatividade é bastante diferente da proveniente da mecânica clássica e, por isso, levou bastante tempo para ser aceita. Mesmo em 1922, ano em que Einstein foi agraciado com o prêmio Nobel, não havia consenso na comunidade científica acerca da validade da relatividade, tendo o prêmio sido concedido pelo seu trabalho sobre o efeito fotoelétrico.

### • o impacto na ciência

A relatividade mudou tanto *o modo de se trabalhar* em ciência como a percepção de como esse trabalho ocorre. No fim do século 19 e no início do 20, a ciência era vista como uma atividade onde o conhecimento seria produzido por meio de generalizações, feitas a partir de observações. Esquemáticamente, segundo a concepção dominante na época, o conhecimento científico deveria ter início em observações cuidadosas do comportamento da natureza, que mostrariam a existência de regularidades. A percepção dessas regularidades levaria à formulação de leis que, após serem testadas e generalizadas, passariam a fazer parte de corpos maiores, as teorias. Assim, o conhecimento científico cresceria de modo cumulativo, lenta e gradualmente, por indução de verdades mais gerais a partir de outras menos gerais <sup>[1]</sup>. Esta concepção da ciência é conhecida como *indutivismo*.

A relatividade, entretanto, foi gerada de modo completamente antagônico. Ao ser proposta, ela possuía muito pouco ou nenhum suporte empírico, tendo sido produzida a partir de concepções gerais a respeito do universo. Por isso, a proposta desta teoria, por Einstein, modificou muito a visão que tanto cientistas como filósofos tinham a respeito do funcionamento da ciência. Os filósofos Karl Popper<sup>[2]</sup> e Gaston Bachelard<sup>[3]</sup>, nos anos 1930, estão dentre os primeiros a incorporar a postura científica de Einstein na filosofia da ciência. As visões do processo de criação do conhecimento científico, apresentadas

por Popper e Bachelard, representaram rupturas importantes com a dos indutivistas. Posteriormente, outros filósofos aprofundaram a compreensão desta ruptura, culminando com a proposta apresentada em 1962 por Thomas Kuhn, no seu livro “A estrutura das revoluções científicas”<sup>[4]</sup>. Um dos resultados desse processo de revisão das idéias acerca da ciência, motivado pela relatividade é que, atualmente, a questão da existência de um *método científico* é vista como algo sem sentido. Uma apresentação compacta de discussões filosóficas acerca deste tema pode ser encontrada no livro “O que é esta coisa chamada ciência”, de A.F. Chalmers<sup>[5]</sup>.

### • o impacto na física

O impacto da relatividade foi muito forte no interior da física. Seus efeitos não estão restritos a uma teoria, pois ela mudou também o modo de conceber *o universo físico* como um todo. O universo contém muitas coisas e entidades, uma parte das quais constitui o chamado universo físico, que pode ser pensado, em linhas gerais, como contendo três grandes classes de entidades, simbolicamente denominadas *palco*, *dinâmica* e *atores*.

Na versão clássica do universo físico, o palco engloba o tempo e o espaço, a energia e as quantidades de movimento linear e angular. Na física clássica, o tempo e o espaço são concebidos como grandezas independentes. Entretanto, a energia é ligada ao tempo, já que a sua conservação pode ser atribuída à uniformidade com que ele flui. O mesmo tipo de relação existe, também, entre espaço e as quantidades de movimento linear e angular. Os atores, por outro lado, representam os entes materiais, tais como massas e cargas, juntamente com os seus campos, responsáveis pelas interações da matéria. Finalmente, a dinâmica corresponde às leis que relacionam interações e movimentos. O universo físico clássico pode ser representado pelo esquema abaixo.

	o universo clássico	
palco	$\vec{L}$ e $\vec{p}$ $\updownarrow$ $\vec{r}$	E $\updownarrow$ t
dinâmica	$\vec{F} = m\vec{a}$ e as outras leis da dinâmica propostas por Newton	
atores	$m \leftrightarrow \vec{g}$ , $q \leftrightarrow \vec{E}, \vec{B}$	

A relatividade subverteu profundamente este quadro, de várias maneiras. Na física clássica, espaço e tempo são concebidos como grandezas absolutas, já que suas conservações são respectivamente, atribuídas à homogeneidade e isotropia do espaço, que não dependem do observador. Já na relatividade, aparece uma relação entre espaço e tempo, sendo possível que observadores diferentes interpretem de modos diferentes tempo e espaço, em uma dada situação. Na relatividade, espaço e tempo passam a ser facetas diferentes do *espaço-tempo*. Do mesmo modo, a energia e as quantidades de movimento

linear e angular também passam a ser relacionadas entre si. Essas mudanças nas características do palco forçaram a revisão das demais partes do quadro e, em particular, as leis da dinâmica de Newton tiveram de ser modificadas. A versão da relatividade de 1905, conhecida como *relatividade restrita*, contém ainda um outro elemento bastante novo, expresso pela equação  $E = mc^2$ , que relaciona a energia, um elemento do palco, com a massa, um ator. A proposta de universo físico contida na teoria de 1905 pode ser representada pelo quadro abaixo, que agora inclui setas horizontais e também a relação  $mc^2$ .

relatividade (1905)	
palco	$\begin{array}{ccc} \vec{L} \text{ e } \vec{p} & \longleftrightarrow & E \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \vec{r} & \longleftrightarrow & t \end{array}$
dinâmica	“leis de Newton” modificadas
atores	$\begin{array}{l} m \leftrightarrow \vec{g} \\ q \leftrightarrow \vec{E}, \vec{B} \end{array}$

O papel da massa no quadro da relatividade restrita torna-se ambíguo, o que indica que a alternativa à física clássica produzida por esta teoria não é totalmente coerente. Isso motivou a formulação da teoria da relatividade geral, apresentada por Einstein em 1915. Nessa nova versão, Einstein resolve a ambiguidade existente na relatividade restrita, colocando a massa no palco. Agora, ela passa a ser vista como algo capaz de influenciar o próprio comportamento do espaço-tempo. O campo gravitacional, que antes era atribuído a uma aura que existiria em torno das massas, passa a ser devido ao que, em termos técnicos, é chamado de curvatura do espaço-tempo. Esta nova concepção do universo pode ser representada do seguinte modo.

relatividade geral (1915)	
palco	$\begin{array}{ccc} \vec{L} \text{ e } \vec{p} & \longleftrightarrow & E \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \vec{r} & \longleftrightarrow & t \end{array}$
dinâmica	equação de Einstein
atores	$q \leftrightarrow \vec{E}, \vec{B}$

## • o absoluto

O caráter revolucionário da relatividade fez com que ela ficasse bastante conhecida fora do âmbito restrito da ciência e que Einstein se tornasse uma espécie de herói popular. Isso motivou o aparecimento de várias visões estapafúrdias acerca do conteúdo da relatividade. Talvez a mais errada de todas elas seja a que afirma que a relatividade mostra que “tudo é relativo”<sup>[6]</sup>. Ao contrário, o objetivo da teoria é determinar o que é relativo na física, de modo a podermos compreender melhor o que não o é. Os aspectos absolutos do universo físico constituem, de fato, o alvo maior da relatividade.

O jogo entre o relativo e o absoluto está presente em várias partes da física e da matemática. Ele é particularmente importante na geometria. Para fixar as idéias, consideremos um cubo. Com certeza, todos nós sabemos o que é um cubo. Entretanto, como sabemos isto? Onde, dentro de nós, este conhecimento se esconde? Que formas ele pode ter?

Existem várias maneiras de sabermos o que é um cubo. Esse conhecimento pode começar, por exemplo, com o contato sensorial com um cubo material, como ocorre quando uma criança brinca com um dado. Ao fazer isto, ela experimenta o cubo com o tato, com os olhos, com a boca... Manipulando o dado e outros cubos materiais passamos, de algum modo, a conceber um cubo abstrato em nossa mente. Normalmente, nossas experiências com cubos materiais ocorrem em ambientes culturais nos quais o conceito de cubo já está bem estabelecido. Existe até uma palavra para designar esta entidade: CUBO! Este tipo de exercício, envolvendo experimentação e informação cultural acaba fazendo com que, depois de certo tempo, passemos a *saber* o que é um cubo. A idéia de cubo que passamos a ter vai se distanciando dos cubos materiais particulares que conhecemos. Essa idéia, se por um lado se afasta das experiências particulares, por outro, é capaz de apreender todos os cubos de uma só vez. Na nossa mente passa a existir um *cubo-conceito*, passível de ser examinado e conhecido sem intermediações. O conhecimento do cubo pela mente corresponde a um tipo de saber profundo e silencioso. É um tipo de conhecimento que pode ser classificado como gnóstico, onde ocorre uma relação direta entre a mente e o conceito de cubo.

A existência do cubo-conceito na nossa mente leva a uma outra classe de problemas, associada às suas representações. Elas podem ser feitas de vários modos diferentes. Podemos representá-lo oralmente, *falando* a palavra cubo. Alternativamente, podemos recorrer a um código um pouco mais visual, e *escrever* a palavra cubo. É interessante notar que, em português, um cubo pode ser denotado por uma única palavra, o que indica uma proximidade com o sentido absoluto do cubo.

Alternativamente, podemos representar um cubo por meio de desenhos, como os mostrados na figura 17.1.

Neste caso, a relação da representação com o caráter absoluto do cubo torna-se ambígua. Por um lado, os cubos representados voltam a ficar um pouco parecidos com os cubos reais.

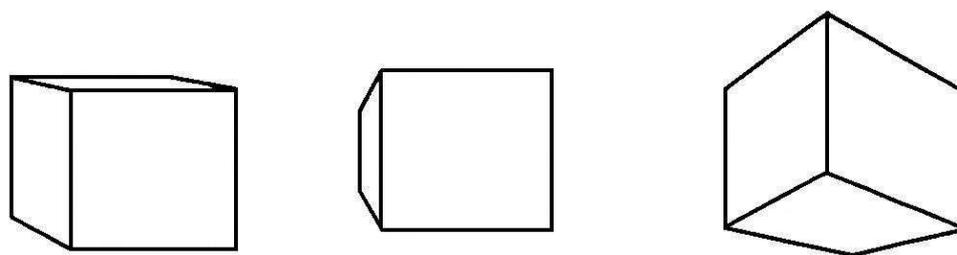


Figura 17.1: Representação de cubos em diversos pontos de vista.

Por outro, ao desenhar o cubo, não conseguimos mais representá-lo em sua inteireza, e somos obrigados a nos contentar com apenas algumas das suas facetas. Em cada desenho, apenas uma, dentre as suas infinitas caras. O desenho permite apenas representações parciais do conceito, e a unidade do objeto somente pode ser recuperada postulando-se a equivalência destas várias representações parciais. Esse caráter parcial das representações baseadas em desenhos ocorre porque eles incorporam, necessariamente, a perspectiva do observador, que é sempre particular. De fato, cada desenho não representa o cubo em sua totalidade, mas uma das possíveis maneiras de alguém se relacionar com ele.

No contexto da geometria um cubo pode, também, ser representado de várias maneiras diferentes. Por exemplo, na geometria dos sólidos, que estuda as propriedades e características das figuras no espaço euclidiano em três dimensões, o cubo é pensado como sendo um sólido fechado com seis faces quadradas iguais. Neste caso, temos uma conceituação absoluta, independente de observadores e referenciais. De modo alternativo, na geometria analítica, o cubo pode ser descrito por meio de expressões quantitativas. Por exemplo, o cubo de lado  $L$  mostrado na fig. 17.2, pode ser representado como sendo o corpo sólido delimitado pelos planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x = L$ ,  $y = L$  e  $z = L$ .

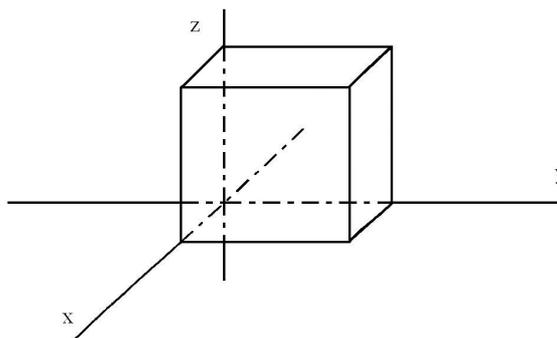


Figura 17.2: Um cubo e um sistema de referência.

Este segundo tipo de representação tem duas características muito interessantes. A primeira delas é que, para representar o cubo, é preciso especificar o comprimento de sua aresta. Por isso, o cubo representado já é um pouco particular. Além disso, no caso da representação analítica, é necessário o uso de um referencial associado ao sistema de

eixos, que incorpora, obrigatoriamente, um “ponto de vista” *externo* ao objeto representado. Podemos perceber isso notando que o *mesmo* cubo também pode ser representado como sendo o sólido delimitado pelos planos  $x = a$ ,  $y = b$ ,  $z = c$ ,  $x = L + a$ ,  $y = L + b$  e  $z = L + c$ , onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são variáveis que podem assumir quaisquer valores. Essas novas descrições correspondem a deslocamentos da origem do sistema de coordenadas. Assim, a forma da descrição analítica do cubo também depende fortemente do sistema de eixos adotado. Mudando o referencial, a descrição do cubo muda, ainda que o cubo não mude. Neste caso, pode-se perceber de modo claro, a relação dialética entre o caráter absoluto do objeto e a relatividade da sua representação.

Imaginemos, agora, que tenhamos nascido em um mundo onde existissem objetos sólidos, mas no qual não pudéssemos ter acesso direto a eles, a não ser por meio de suas descrições analíticas. Neste mundo, cada um descreveria o cubo através de uma perspectiva particular, usando convenções diferentes, equações diferentes... Seria muito difícil recuperar o conceito de cubo no meio de todo este caos aparente. Seria necessário alguém muito inteligente para perceber a existência de um cubo, ou seja, de que existe algo em comum entre as várias descrições particulares, com características estáveis e bem definidas. Como buscar esta estabilidade no meio do caos? Em primeiro lugar, é preciso acreditar que tal estabilidade exista. Em seguida, alguém dotado de espírito matemático poderia pensar em inventar uma teoria que unificasse todas as observações e descrições particulares, de modo que, conhecida uma delas, todas as demais pudessem ser obtidas. Usando tal teoria, ele seria capaz de separar, por meio de mudanças matemáticas de referencial, as características relativas das absolutas existentes em uma dada descrição. Um nome bom para uma teoria como essa seria “teoria de relatividade”.

O caso da teoria da relatividade de Einstein é muito parecido com o do cubo na geometria analítica, já que o seu propósito é encontrar, por trás das aparências dos fenômenos, as leis absolutas que os determinam. O que muda, é o fato de ela unificar, não só as observações de pessoas que estão paradas em posições diferentes, olhando um único objeto mas, também, as observações de pessoas em movimento relativo.

## • teorias

A *relatividade restrita* é uma teoria e, como tal, ela é portadora de uma visão de mundo. Alguns dos significados da palavra teoria, encontrados no dicionário do Aurélio:

“teoria. [Do gr. *theoria*, ‘ação de contemplar, examinar’; ‘estudo’; ‘deputação solene que as cidades gregas mandavam às festas dos deuses’; ‘festa solene, pompa, procissão’, pelo lat. *theoria*.] S.f. 1. Conhecimento especulativo, meramente racional. 2. Conjunto de princípios fundamentais duma arte ou duma ciência. (...) 8. Na Grécia antiga, embaixada sagrada que um Estado enviava para o representar nos grandes jogos esportivos, consultar um oráculo, levar oferendas, etc. (...).”

Na física, uma teoria é, normalmente, uma estrutura onde conceitos e leis empíricas são articulados por meio de relações matemáticas. O fato de elas serem fortemente apoiadas

no formalismo matemático lhes confere certa racionalidade e uma certa impessoalidade. Entretanto, isto não significa que elas sejam totalmente objetivas, isentas de aspectos subjetivos. As teorias dão margem a interpretações, elas apontam para aspectos escondidos da realidade. A teoria faz o papel do dedo no provérbio chinês: “o dedo serve para apontar a lua; o sábio olha para a lua, o ignorante para o dedo”.

## • o dedo e a lua

A preocupação em separar o absoluto do aparente aproxima Einstein da tradição mística dos judeus, a cabala. Por exemplo, apresentamos a seguir um trecho de uma obra clássica, o “Zohar”, escrito pelo cabalista espanhol Moisés de Leon, entre 1280 e 1286, onde ele descreve alegoricamente a relação com o absoluto que está por trás das aparências <sup>[7]</sup>. No caso, este autor refere-se à Torá, o livro que encerra a lei mosaica.

*“Na verdade, a Torá deixa escapar uma palavra, e emerge um pouco de seu invólucro e depois torna a esconder-se. Mas procede assim somente com os que a conhecem e lhe obedecem. Pois a Torá se parece com uma bela e formosa donzela, escondida numa câmara reclusa de seu palácio, e que tem um namorado secreto, desconhecido de todos. Por amor à donzela, ele vive passando à porta da casa dela, olhando para cá e para lá, à procura dela. Ela sabe que o bem-amado ronda o portão da sua casa. O que é que ela faz? Abre a porta da sua câmara reclusa, um pouquinho só, e por um momento revela o rosto ao bem-amado, porém logo o esconde de novo. Estivesse alguém com o amado, nada veria e nada perceberia. Só ele a vê e ele é atraído por ela com o coração e a alma e todo o seu ser, e ele sabe que por amor a ele, ela se lhe mostrou por um instante, ardendo de paixão por ele. Assim acontece com a palavra da Torá, que se revela somente aos que a amam. A Torá sabe que o místico (... o sábio de coração) ronda o portão de sua casa. O que é que ela faz? Do interior de seu palácio oculto desvela o semblante, acena-lhe e retorna logo ao palácio onde se esconde. Os que lá se encontram nada vêem e nada sabem, somente ele, e ele é atraído para ela com todo o coração e toda a alma e todo o seu ser. Assim a Torá se desvela e se esconde, e emerge em amor pelo seu amado e desperta o amor nele. Venha e veja: este é o caminho da Torá. De início, quando deseja revelar-se a um homem, faz-lhe um rápido sinal. Se ele entende, muito que bem; se não, manda-o vir e chama-o de simplório. Ao mensageiro que ela envia, a Torá diz: diga ao simplório que venha até aqui para que eu possa conversar com ele. [...] Quando ele vem para junto dela, ela começa falar-lhe por detrás de uma cortina, palavras à altura da sua compreensão, até que, lentamente, ele começa a entender [...]. Depois ela fala, através de um véu, palavras alegóricas [...]. Só então, depois que ele se familiariza com ela, esta se lhe revela, face a face, e fala-lhe de todos os seus segredos escondidos e seus caminhos obscuros que desde o começo estiverem em seu coração. Um tal homem, então, é chamado de perfeito, um “mestre”, ou seja, “um noivo da Torá”, no sentido mais estrito, o dono da casa, a quem ela desvenda todos os segredos, nada escondendo. Ela lhe diz: Está vendo agora, quantos segredos havia naquele sinal que lhe fiz no primeiro dia, e qual seu verdadeiro sentido? E ele entende, então, que àquelas palavras nada se lhes pode acrescentar e delas nada se pode tirar. E pela primeira vez, então, compreende o verdadeiro significado das palavras da Torá, tal como elas aí se encontram, aquelas palavras às quais nenhuma sílaba ou*

*letra pode ser acrescentada e das quais nenhuma pode ser tirada. E, por isso, os homens deveriam tomar o cuidado de perseguir a Torá (isto é, estudá-la com grande exatidão), a fim de se tornarem o seu bem amado, do modo como foi relatado”.*

Substituindo neste texto a palavra Torá, que corresponde ao livro da lei mosaica, por natureza, talvez tenhamos uma boa alegoria da postura de Einstein frente à relatividade.

### • o princípio da relatividade

A discussão moderna da relatividade teve seu princípio com o famoso artigo *Sobre a Eletrodinâmica de Corpos em Movimento*<sup>[8]</sup>, publicado por Einstein em 1905. Neste artigo muito fecundo, ideias revolucionárias foram apresentadas de modo simples, como pode ser percebido na reprodução dos seus dois primeiros parágrafos, apresentada a seguir.

*É bem sabido que a eletrodinâmica de Maxwell - como usualmente entendida no presente - quando aplicada a corpos em movimento, leva a assimetrias que não parecem ser inerentes aos fenômenos. Tome, por exemplo, a ação recíproca de um ímã e um condutor. Os fenômenos observáveis aqui dependem apenas do movimento relativo do condutor e do ímã, enquanto que a visão costumeira traça uma distinção nítida entre os dois casos nos quais ou um ou outro desses corpos está em movimento. Pois, se o ímã está em movimento e o condutor em repouso, aparece na vizinhança do ímã um campo elétrico com uma certa energia definida, produzindo uma corrente nos lugares onde partes do condutor estão situadas. Mas se o ímã está estacionário e o condutor em movimento, não aparece campo elétrico na vizinhança do ímã. No condutor, entretanto, encontramos uma força eletromotriz, à qual não há energia correspondente, mas que dá origem - supondo a igualdade do movimento relativo nos dois casos discutidos - a correntes elétricas de mesmo caminho e intensidade daquelas produzidas pelas forças elétricas no primeiro caso.*

*Exemplos deste tipo, juntamente com as tentativas frustradas de descobrir qualquer movimento da Terra relativamente ao “meio luminoso”, sugerem que os fenômenos da eletrodinâmica, assim como os da mecânica, não possuem propriedades correspondentes à ideia de repouso absoluto. Elas sugerem, em vez disto, como já foi mostrado em primeira ordem em quantidades pequenas, que as mesmas leis da eletrodinâmica e da óptica serão válidas em todos os sistemas de referência para os quais as equações da mecânica se aplicam. Nós elevaremos esta conjectura (o teor da qual será daqui em diante chamado de “Princípio de Relatividade”) ao status de um postulado, e introduzimos também um outro postulado, que é apenas aparentemente irreconciliável com o primeiro, qual seja, que a luz sempre se propaga no espaço vazio com uma velocidade definida  $c$  que é independente do estado de movimento do corpo emissor. Estes dois postulados bastam para a obtenção de uma teoria simples e consistente da eletrodinâmica de corpos em movimento baseada na teoria de Maxwell para corpos estacionários. A introdução de um “éter luminífero” mostrar-se-á supérflua, na medida que a visão a ser desenvolvida aqui não vai requerer um “espaço absoluto estacionário” provido de propriedades especiais, nem atribuir um vetor velocidade a um ponto do espaço vazio no qual acontecem processos eletromagnéticos.*

## • os princípios da teoria da relatividade restrita

A teoria da relatividade restrita é baseada nos dois postulados mencionados na citação anterior. Ao longo do tempo, eles foram reformulados de várias maneiras, e várias versões diferentes podem ser encontradas na literatura. Uma delas<sup>[9]</sup> afirma:

1. As leis físicas têm a mesma forma em todos os sistemas inerciais.
2. Em qualquer sistema inercial, a velocidade da luz  $c$  é a mesma, tanto se a luz for emitida por um corpo em repouso, como por um corpo em movimento uniforme.

É interessante notar que Einstein não menciona *referenciais inerciais* na sua formulação original. Esta multiplicidade de formulações sugere que as palavras que descrevem os postulados são bem menos importantes do que os seus significados silenciosos. Como se pode notar, o primeiro postulado representa a fé em uma equivalência profunda entre todos os referenciais inerciais, na não existência de referenciais privilegiados. Já o segundo é mais específico, conferindo ao *módulo* da velocidade da luz o status de grandeza absoluta, independente do referencial inercial. Por isso, ele parece chocante quando olhado a partir da intuição desenvolvida no estudo da mecânica clássica.

## • covariância

Ainda que o primeiro princípio decorra de uma intuição profunda acerca do universo material, ele tem implicações matemáticas bastante claras e precisas. Em particular, ele regula o tipo de objetos matemáticos que podem ser empregados para expressar as leis físicas, que devem ser *covariantes*. O significado dessas palavras, que podem parecer um pouco assustadoras, é bastante simples e corresponde a uma idéia já incorporada, tacitamente, na prática de trabalho de qualquer estudante de física.

Sabemos que é errado escrever uma lei física usando uma equação do tipo

$$\vec{A} = b, \quad (17.1)$$

onde  $\vec{A}$  é um vetor e  $b$ , um escalar. Entretanto, porque isso é errado? Qual seria o problema de escrevermos a equação que representa a aceleração da gravidade nas proximidades da Terra como

$$\vec{g} = 10 \text{ m/s}^2? \quad (17.2)$$

A grandeza  $\vec{g}$  é um vetor e, como tal, um objeto matemático que possui, simultaneamente, três características distintas: módulo, direção e sentido. No caso de  $\vec{g}$ , em particular a direção é a da vertical no ponto e o sentido pode ser caracterizado como sendo “para baixo”, “apontando para a Terra”, ou algo equivalente. Por isso, a eq.(17.2) não tem sentido, já que o seu lado esquerdo envolve três informações e o lado direito, apenas uma.

Já a equação

$$\vec{P} = m \vec{g}, \quad (17.3)$$

que permite calcular o peso de um corpo de massa  $m$  nas proximidades da Terra, tem sentido matemático, pois ela informa que:

- o módulo do peso é igual ao módulo da aceleração da gravidade multiplicado por  $m$ ;
- a direção do peso é igual à direção da aceleração da gravidade;
- o sentido do peso é igual ao sentido da aceleração da gravidade.

Assim, de fato, a expressão (17.3) corresponde a um feixe de três equações. Essa característica fica mais evidente se a reescrevermos em termos de componentes cartesianas. Para tanto, é necessário adotar um sistema de eixos, o que incorpora, necessariamente, escolhas arbitrárias. Por exemplo, num dado problema, pode ser interessante adotar um sistema de eixos apoiado na encosta de uma montanha, como o indicado na fig. 17.3.

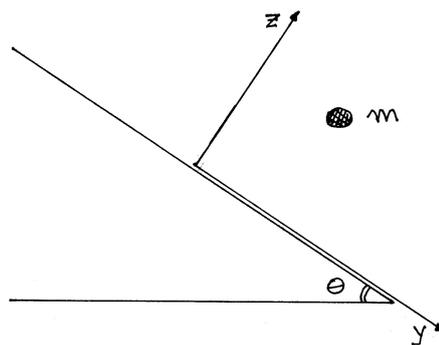


Figura 17.3: Um sistema de eixos e a aceleração da gravidade.

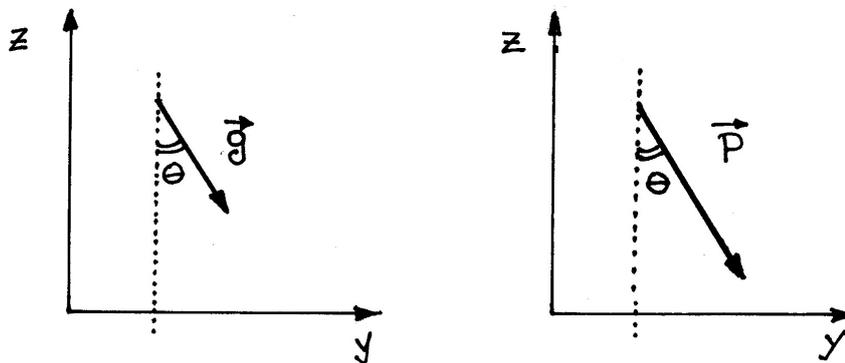


Figura 17.4: (a) A aceleração  $\vec{g}$ ; (b) a força peso no sistema de eixos da fig. 17.3.

Nesse caso, o feixe de equações determinado pela expressão (17.3) é dado explicitamente

por

$$P_x = m g_x, \quad (17.4)$$

$$P_y = m g_y, \quad (17.5)$$

$$P_z = m g_z. \quad (17.6)$$

As componentes de  $\vec{g}$  podem ser obtidas a partir da fig. 17.4(a) e valem

$$g_x = 0, \quad g_y = g \sin \theta, \quad g_z = g \cos \theta. \quad (17.7)$$

A presença do ângulo  $\theta$  nesses resultados indicam claramente que eles dependem da escolha dos eixos de referência e, portanto, das convenções adotadas. Para calcular  $\vec{P}$ , substituímos (17.7) nas eqs. (17.4-17.6), e obtemos

$$P_x = 0, \quad P_y = mg \sin \theta, \quad P_z = mg \cos \theta. \quad (17.8)$$

Os valores dessas componentes também dependem de  $\theta$  e, conseqüentemente, de convenções.

Se esta discussão fosse apresentada a um ser extraterrestre, que não tivesse vivenciado a noção de peso, ela poderia sugerir que o nosso modo de descrever o mundo material é sempre contaminado por ideias dependentes de convenções. Para se convencer que esse não é o caso, poderíamos convidá-lo a inspecionar a fig. 17.4(b), construída a partir dos resultados (17.8). Ela mostra que  $\vec{P}$  é paralelo a  $\vec{g}$ . Se escolhermos outro valor para  $\theta$ , refizermos os desenhos, as representações de  $\vec{g}$  e de  $\vec{P}$  mudam, mas o paralelismo entre eles, não. É esse paralelismo, independente de convenções, que a física trata como uma relação constitutiva da natureza.

Este exemplo ilustra uma versão simples da noção de *covariância*. A eq. (17.3), escrita na forma

$$(P_x, P_y, P_z) = (mg_x, mg_y, mg_z) \quad (17.9)$$

é dita *covariante* porque se, por um lado, os valores das componentes dos dois lados dependem de convenções, por outro, a igualdade se mantém se essas convenções forem alteradas. Neste exemplo, isso acontece porque rotações alteram os dois lados da equação do mesmo modo. Ou seja, eles *co*-variam, onde o prefixo *co* indica algo que se faz junto, como em colaboração ou comemoração.

No caso da relatividade, a ideia incorporada no primeiro princípio, de que as leis físicas devem ter a mesma forma em qualquer referencial inercial corresponde a dizer que as equações que as descrevem devem ser covariantes por mudanças de referencial. Na aula 23 deste curso será discutida explicitamente a covariância das equações de Maxwell.

## • referências

[1] no Aurélio: “Indução. [Do lat. *inductione*] S.f. 1. Ato ou efeito de induzir. 2. Lóg. Operação mental que consiste em se estabelecer uma verdade universal ou uma proposição

geral com base no conhecimento de certo número de dados singulares ou de proposições de menor generalidade. [...] ”.

[2] Karl Popper

[3] Gaston Bachelard

[4] Thomas Kuhn

[5] A.F. Chalmers

[6] Na página 1-16 do jornal “Folha de São Paulo” de 18 de abril de 1995 encontra-se um artigo, assinado por Cássio Leite Vieira, onde pode-se ler: “*Há 40 anos, morria em Princeton (EUA) o físico alemão Albert Einstein (1879-1955), idealizador da teoria da relatividade. Hoje, Einstein é sinônimo de “Tudo é relativo”, forma fácil de sintetizar uma compreensão rasa de dois de seus trabalhos: a teoria da relatividade restrita, de 1905, e a da relatividade geral, de 1915.*”

[7] G.G. Scholem, A cabala e o seu simbolismo, ed. Perspectiva, 1978.

[8] Albert Einstein.

[9] Esta versão dos postulados é a apresentada por A. Pais em “Subtle is the Lord...”, Oxford University Press, 1982, p.141; a tradução brasileira tem o título “Sutil é o Senhor...” ed. Nova Fronteira.

[10] Citado em A. Pais, op.cit., p.141.

# Capítulo 18

## dilatação do tempo

### • referenciais, personagens e notação

A física trata da observação e da descrição de fenômenos que ocorrem no mundo natural e, de modo geral, esse tipo de conhecimento depende do referencial no qual o observador se encontra. O objetivo da teoria da relatividade restrita é relacionar os resultados das observações e descrições de *um mesmo* conjunto de fenômenos, quando eles são feitos a partir de referenciais diferentes, que se movem com velocidades constantes, uns em relação aos outros. Um dos seus postulados básicos diz respeito à completa equivalência das leis físicas em todos os referenciais deste tipo. A incorporação integral dessa equivalência entre referenciais em movimento relativo envolve tanto aspectos racionais como intuitivos. Quando viajamos em um ônibus que trafega com velocidade constante por um trecho retilíneo de estrada, é mais fácil admitirmos racionalmente que a estrada e a paisagem se movem com velocidade constante em relação a nós, do que sentirmos isso. A nossa intuição profunda é muito mais apegada a alguns referenciais do que outros. Por esta razão evitamos, neste texto, representar os vários referenciais por  $S$ ,  $S'$ ,  $S''$ , etc, uma vez que este tipo de notação parece sugerir algum tipo de hierarquia entre eles. Como alternativa, introduzimos dois personagens, João e Maria, que participam das várias situações, e os observáveis correspondentes são rotulados com as suas iniciais. Assim, por exemplo,  $\Delta t_J$  e  $\Delta t_M$  podem representar intervalos de tempo observados por João e Maria, respectivamente. É *muito* importante notar que, em física, referenciais são instrumentos de pensamento e, portanto, entidades abstratas, não materiais. No nosso caso, eles serão sempre sistemas de eixos triortogonais  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , matemáticos, acompanhados de um relógio, também matemático, que indica o tempo  $t$ . Por isso, não devemos confundir referenciais com coisas ou pessoas.

Por exemplo, na situação idealizada indicada na figura 18.1, na qual um carro se desloca com velocidade  $\vec{v}$ , constante, ao longo de uma estrada retilínea, pode ser conveniente descrever fenômenos físicos tanto no referencial  $S_A$ , fixo em uma pedra do pavimento da estrada, como em um referencial  $S_B$ , com velocidade  $\vec{v}$  relativa a  $S_A$ , no qual o carro

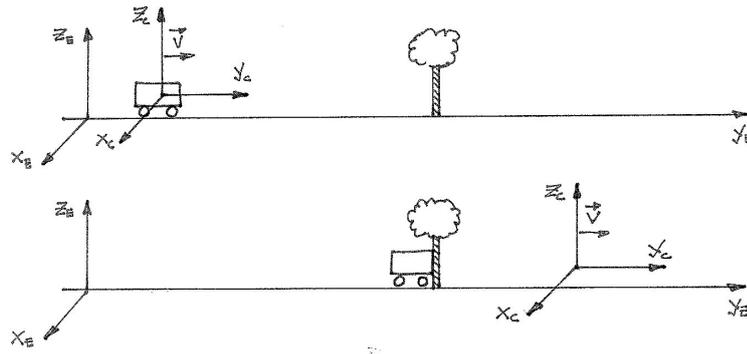


Figura 18.1: Referenciais  $S_A$  e  $S_B$ .

está parado. Entretanto, se o carro bater em algo e parar, a coincidência entre ele e o referencial  $S_B$  deixa de existir. O carro passa a estar parado no referencial  $S_A$ , enquanto que  $S_B$  continua o seu movimento matemático com velocidade constante  $\vec{v}$ . Assim, quando falamos em referenciais  $S_J$ , de João, e  $S_M$ , de Maria, queremos dizer os referenciais que coincidem com esses personagens enquanto os seus estados de movimento não são alterados. João e Maria *não são* referenciais, mas *estão* em referenciais.

Apenas com a finalidade de facilitar os desenhos, adotamos a velocidade relativa entre os referenciais como sendo paralela ao eixo  $y$ , e temos as situações mostradas na figura 18.2.

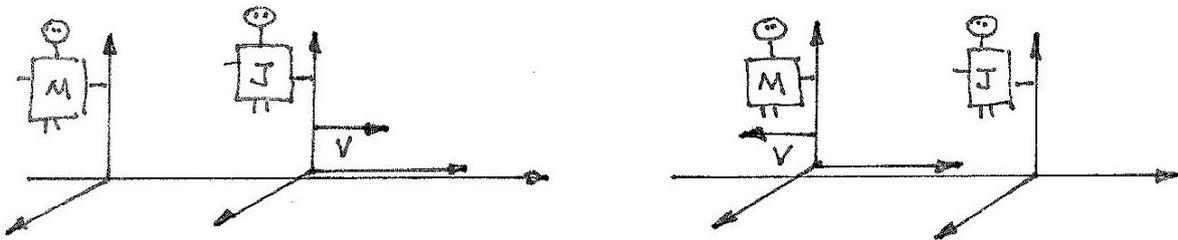


Figura 18.2: (a) João move-se com velocidade  $v\vec{j}$  em relação a  $S_M$ ; (b) Maria move-se com velocidade  $-v\vec{j}$  em relação a  $S_J$ .

### • trens ou foguetes?

Na época em que a relatividade foi proposta, o meio de transporte mais rápido era o trem e os exemplos pedagógicos costumavam envolver observadores fixos no solo e em trens em movimento. A partir da década de 1960, apareceram os foguetes tripulados e muitos exemplos passaram a ser formulados em termos de observadores em foguetes. Na prática, tanto trens como foguetes têm velocidades em relação à Terra que são muito pequenas em comparação à da luz e, portanto, em ambos os casos os exemplos são artificiais. Neste texto, ficamos com os trens. Por nostalgia, talvez...

## • sobre os efeitos da relatividade

A relatividade restrita foi proposta em 1905 e, inicialmente, eram poucos os experimentos que davam suporte à teoria. Entretanto, nos anos 1930, com o desenvolvimento da física nuclear, ela passou a ser essencial para a compreensão dos fenômenos, principalmente os envolvendo transformações de massa em energia. A partir daí, a teoria foi testada em muitas outras situações, em experimentos muito precisos, que podem ser tomados como evidências da teoria. Na física de partículas, por exemplo, *todos* os problemas são tratados por meio da relatividade, tanto para descrever como os corpos se deslocam de um ponto a outro do espaço com velocidades altas, como para quantificar as energias envolvidas nas várias transformações que ocorrem. Já efeitos associados à relatividade geral dependem da existência de massas grandes e, por isso, são mais perceptíveis em cosmologia.

A relatividade teve, também, grande penetração junto a pessoas que não trabalham com ciência e, mesmo, que não se interessam por ela. Neste processo de ampliação, os conceitos foram perdendo nitidez e a precisão, como no caso da famosa equação  $E = mc^2$ , que todos conhecem, mas pouca gente sabe o que significa. Numa situação intermediária, ficam as noções de *dilatação do tempo* e *contração do espaço*, que correspondem a fenômenos físicos importantes, passíveis de serem observados experimentalmente. Entretanto, eles também foram explorados de forma solta e imprecisa, em livros e filmes de ficção, o que gerou percepções incorretas dos seus significados. Por isso, antes de iniciarmos a discussão da relatividade restrita neste curso, deixamos uma advertência: é incorreto pensar que, segundo esta teoria, o tempo *sempre* se dilata e o espaço *sempre* se contrai. Essas afirmações gerais são imprecisas, destituídas de significado e, apenas em algumas situações bastante específicas, os resultados podem ser enquadrados nesses casos. Para compreender isso é preciso um pouco de maturidade em relatividade e é preciso esperar algumas aulas...

## • os relógios e o tempo, as réguas e o espaço

A teoria da relatividade restrita foi apresentada por Einstein em um trabalho intitulado “*Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento*”. Numa das suas seções, são discutidos os comportamentos de réguas<sup>1</sup> e de relógios em movimento, sem qualquer menção a contração do espaço e dilatação do tempo. Tal escolha não foi feita por acaso. Réguas e relógios são objetos concretos, enquanto que espaço e tempo são conceitos abstratos. De um lado, coisas e, do outro, ideias.

Será que relógios são máquinas que marcam a passagem do tempo? Ou, alternativamente, será que a nossa noção de tempo corresponde a algo inventado a partir do funcionamento dos relógios? Algo associado a um coletivo de relógios? No seu tratamento da relatividade, Einstein prefere adotar o segundo modo de pensar, e parte do concreto, dos relógios, dos instrumentos de medida. Afinal de contas, há sempre o risco

---

<sup>1</sup>Por uma questão de simplicidade, nós usamos a palavra *régua* em lugar de *corpo rígido*, empregada no texto original.

de o conceito de tempo ser uma invenção humana e não, parte do universo material... O mesmo se aplica à relação entre réguas e espaço.

Esse tipo de questão pode parecer algo distante à prática da física. Entretanto, este não é o caso. Se, nas várias situações físicas, pensamos mais nas medidas e nos instrumentos envolvidos nelas, a compreensão da teoria da relatividade fica mais fácil.

### • relógios

Relógios são instrumentos que permitem a medição de intervalos de tempo. Na relatividade, o funcionamento de um relógio depende do seu estado de movimento. Suponha que Maria esteja num referencial fixo em uma estação de trem e João esteja em um fixo no interior de um trem, que passa com velocidade constante pela estação. Se Maria possui um relógio em seu pulso, o funcionamento desse relógio é percebido de modos diferentes por ela mesma e por João. Essa ideia contraria frontalmente a concepção newtoniana do tempo, segundo a qual os relógios funcionam sempre do mesmo modo, independentemente do observador.

Existem relógios de muitos tipos. Em tempos remotos, tem-se notícia de relógios baseados no fluxo de azeite, água ou areia, como nas ampulhetas. Diz a história, por exemplo, que Galileu teria utilizado a medida do próprio pulso para determinar o período de oscilação de um pêndulo. Durante vários séculos, houve a hegemonia dos relógios mecânicos, geralmente dotados de rodas dentadas, movidas por pêndulos ou molas, e de mostradores com ponteiros. Atualmente existem relógios digitais eletrônicos e, até, atômicos. Entretanto, apesar das diferenças entre todos estes tipos de relógio, eles possuem uma característica comum, que os unifica: eles medem intervalos de tempo, com base em fenômenos periódicos.

O elemento básico da construção de um relógio é um movimento ou acontecimento que se repete a intervalos de tempo idênticos e bem definidos, um fato cíclico, com período determinado. Basta, então, definir uma unidade de tempo, dividindo este período em quantas partes se desejar, e avaliar a duração de outros fenômenos com base nesta unidade de tempo.

### • o relógio de luz

Para começar a estudar o comportamento dos intervalos de tempo na relatividade, é conveniente usarmos um outro relógio, diferente de todos os outros, mas ainda baseado na noção de periodicidade. Esse relógio é apenas uma construção terórica, e não existe na prática. Entretanto, ele é muito útil, pois captura a essência do problema. Ele é constituído por dois espelhos paralelos, separados pela distância  $L$ , e um contador. Um pulso de luz está confinado entre os dois espelhos, sendo refletido continuamente de um para outro, como mostra a figura 18.3. Este é o nosso fato cíclico. Quando a luz bate no espelho inferior, “ouve-se” um TIC; quando ela volta e bate no superior, “ouve-se” um TAC e o contador é acionado, avançando uma unidade, como nesta figura.

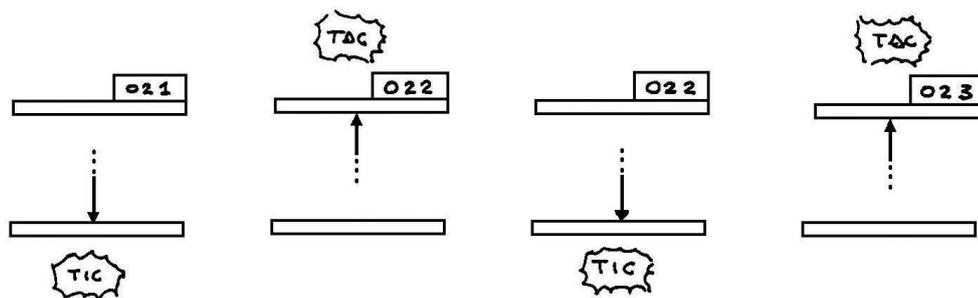


Figura 18.3: O relógio de luz, em instantes sucessivos; observe o contador.

Escolhemos este relógio apenas porque ele simplifica o trabalho a ser feito em seguida. Entretanto, é preciso deixar claro que o relógio de luz é um relógio como um outro qualquer, e todas as conclusões baseadas no seu funcionamento valem, também, para os demais. O intervalo de *tempo* é o que importa, não o instrumento usado para medi-lo.

### • intervalos de tempo clássico e relativístico

Nesta seção, comparamos as previsões para o funcionamento de relógios de luz, feitas na mecânica newtoniana e na relatividade. Os intervalos de tempo nessas duas teorias são representados, respectivamente, por  $\Delta T$  e  $\Delta t$ .

Inicialmente, consideramos, a situação na qual João, parado em  $S_J$ , possui um relógio de luz pintado de branco, em repouso em relação a ele, cujos espelhos são separados pela distância  $L$ . No seu referencial, qual o intervalo de tempo que decorre entre dois TACs sucessivos deste relógio?

No contexto da *mecânica newtoniana*, este intervalo, denotado por  $\Delta T_J$ , é obtido através de um cálculo cinemático simples: sendo  $D_J^b = 2L$  a distância percorrida pela luz no referencial de João durante uma oscilação, temos

$$\Delta T_J^b = \frac{D_J^b}{c} = \frac{2L}{c}, \quad (18.1)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz e os índices  $b$  e  $J$  correspondem a: relógio branco, observado em  $S_J$ .

No contexto da *mecânica relativística*, o cálculo é totalmente análogo. Antes de efetuá-lo, entretanto, convém notar que, na relatividade, costuma-se qualificar com o adjetivo *próprio* as grandezas que representam o comportamento de um sistema descrito por um observador no qual ele está em repouso e, também, representá-las por letras gregas. Por isso, escrevemos o intervalo de *tempo próprio* entre dois TACs, no referencial  $S_J$ , como

$$\Delta t_J^b = \Delta \tau_J^b = \frac{d_J^b}{c} = \frac{2L}{c}, \quad (18.2)$$

sendo  $d_J^b$  a distância percorrida pela luz. Estes dois cálculos mostram que  $\Delta T_J^b = \Delta \tau_J^b$ , ou seja, que no referencial  $S_J$  os intervalos de tempo são os mesmos, tanto na mecânica

clássica como na relativística. Este resultado não é surpreendente, já que as novidades associadas à relatividade ocorrem quando efetuamos mudanças de referencial.

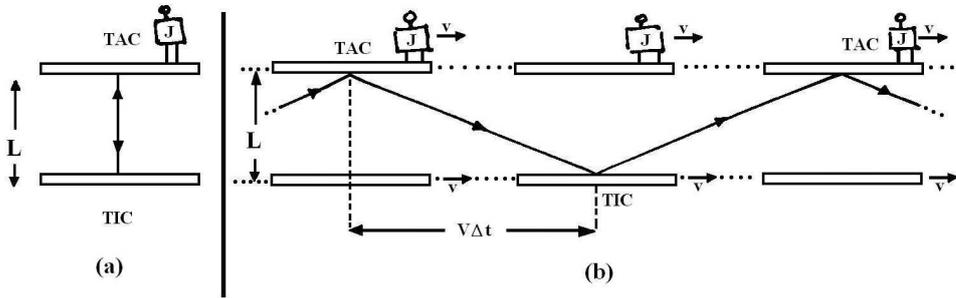


Figura 18.4: Relógio branco, visto em  $S_J$  (a) e em  $S_M$  (b).

Maria, parada numa estação de trem, fixa em  $S_M$ , possui relógios idênticos ao de João, pintados de preto. Cálculos totalmente análogos aos anteriores permitem-nos concluir que, nos contextos newtoniano e relativísticos, temos

$$\Delta T_M^p = \frac{2L}{c} \quad (18.3)$$

$$\Delta \tau_M^p = \frac{2L}{c}, \quad (18.4)$$

onde os índices  $p$  e  $M$  correspondem a: relógio preto, observado em  $S_M$ .

Suponhamos, agora, que João, carregando o seu relógio branco, esteja num trem que se move para a direita com velocidade  $v$ , em relação a  $S_M$ . A partir do seu referencial, Maria pode observar e realizar medições acerca do funcionamento do relógio branco e comparar os resultados com os mostrados pelo seus próprios relógios pretos. Em particular, ela pode observar o intervalo de tempo decorrido entre dois TACs sucessivos do relógio branco, por meio de máquinas fotográficas, filmadoras, ou outros instrumentos.

No referencial  $S_M$ , em relação ao qual João se move com velocidade  $v$ , o caminho que a luz percorre no interior do relógio branco, torna-se maior, como mostra a fig. 18.4(b). No *contexto clássico*, a distância  $D_M^b$ , percorrida pela luz entre dois TACs sucessivos do relógio branco, é dada por

$$D_M^b = 2 \sqrt{L^2 + \left( \frac{v \Delta T_M^b}{2} \right)^2} \quad (18.5)$$

onde  $\Delta T_M^b$  é o intervalo de tempo decorrido entre dois TACs. Esse intervalo de tempo vale

$$\Delta T_M^b = \frac{D_M^b}{C_M}, \quad (18.6)$$

onde  $C_M$  é o módulo da velocidade do raio de luz em relação a  $S_M$ . Na mecânica clássica, este valor é obtido a partir da soma vetorial de  $\vec{c}$  e  $\vec{v}$ , mostrada na Fig. 18.5a, e corresponde

a

$$C_M = \sqrt{c^2 + v^2} . \quad (18.7)$$

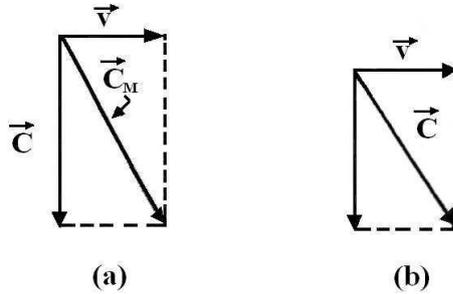


Figura 18.5: O arrastamento da luz na mecânica clássica (a) e na relatividade (b).

Temos, portanto,

$$\Delta T_M^b = \frac{2\sqrt{L^2 + (v \Delta T_M^b/2)^2}}{\sqrt{c^2 + v^2}} . \quad (18.8)$$

Elevando os dois membros ao quadrado e isolando  $\Delta T_M^b$ , obtemos

$$\Delta T_M^b = \frac{2L}{c} . \quad (18.9)$$

Comparando este resultado com a eq.(18.1), concluímos que

$$\Delta T_M^b = \Delta T_J^b . \quad (18.10)$$

Deste modo, “provamos” que, *na mecânica clássica*, os intervalos de tempo entre dois TACs sucessivos do relógio branco são idênticos em  $S_M$  e  $S_J$ . Isso indica que o tempo passa “com a mesma velocidade”, tanto para João, parado em relação ao relógio branco, como para Maria, para quem o relógio branco se move com velocidade  $v$ . No contexto da mecânica clássica este resultado não poderia ser diferente já que o tempo, sendo absoluto, passa do mesmo modo para qualquer observador. Até aqui, nada de muito novo.

Entretanto, as coisas mudam quando passamos para a *teoria da relatividade*. A distância percorrida pela luz entre dois TACs é dada por

$$d_M^b = 2\sqrt{L^2 + \left(\frac{v \Delta T_M^b}{2}\right)^2} . \quad (18.11)$$

A diferença com o caso clássico é que, agora, de acordo com o segundo princípio, o módulo da velocidade do raio de luz deve ser igual a  $c$  para qualquer observador e não

$\sqrt{c^2 + v^2}$ , como na eq. (18.7). O intervalo de tempo passa, então, a ser dado por

$$\Delta t_M^b = \frac{2 \sqrt{L^2 + (v \Delta t_M^b/2)^2}}{c}, \quad (18.12)$$

que corresponde a

$$\Delta t_M^b = \frac{2L}{c \sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (18.13)$$

Comparando com a eq.(18.4), podemos escrever

$$\Delta t_M^b = \frac{\Delta \tau_M^p}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (18.14)$$

Este resultado indica que, na relatividade, os intervalos de tempo marcados pelos relógios não são mais absolutos. Maria observa que os seus próprios relógios pretos e o relógio branco de João funcionam de modos diferentes, apesar de eles serem idênticos quando colocados parados lado a lado. Essa diferença de funcionamento se deve ao movimento relativo entre o relógio branco e os pretos. Assim, no contexto da relatividade, a “velocidade” com que um relógio funciona depende da sua velocidade em relação ao referencial.

Não é demais enfatizar que os intervalos  $\Delta t_M^b$  e  $\Delta \tau_M^p$  referem-se aos funcionamentos de dois relógios observados em  $S_M$ , um deles, branco e em movimento, e o outro, preto e parado. Eles diferem entre si pelo fator  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Na relatividade a velocidade relativa  $v$  entre dois referenciais deve ser sempre menor que  $c$  e, conseqüentemente,

$$0 \leq \frac{v^2}{c^2} < 1 \rightarrow \gamma \geq 1. \quad (18.15)$$

Assim  $\gamma$ , que representa um fator de escala, é sempre maior ou igual a 1 e, por isso,  $\Delta t_M^b$  será sempre maior ou igual a  $\Delta \tau_M^p$ .

## • interpretação dos resultados

O resultado (18.14) permite, também, comparar as observações de um mesmo relógio em  $S_M$  e  $S_J$ . Para isso, usamos as eqs. (18.2) e (18.4), e escrevemos

$$\Delta \tau_J^b = \Delta \tau_M^p. \quad (18.16)$$

Este resultado corresponde à ideia que todos os relógios são iguais por construção e permite reexpressar a eq. (18.14) como

$$\Delta t_M^b = \gamma \Delta \tau_J^b. \quad (18.17)$$

Assim, João, para quem o relógio branco está parado, mede um intervalo de tempo  $\Delta \tau_J^b$  entre dois TACs sucessivos; qualquer outro observador, em relação ao qual esse relógio esteja em movimento com velocidade  $v$ , medirá um intervalo dado por  $\Delta t_M^b$  entre os

mesmos dois TACs sucessivos do relógio branco, que será sempre *maior* do que  $\Delta\tau_J^b$ . Por isso, quem carrega o relógio observa sempre o *menor* intervalo de tempo possível entre dois TACs sucessivos deste relógio.

Por exemplo, se a velocidade relativa entre João e Maria for  $v = \sqrt{3}c/2$ , teremos  $\gamma = 2$  e a eq. (18.14) fornece  $\Delta t_M^b = 2\Delta\tau_M^p$ . Assim, Maria “ouvirá”:

TIC TAC TIC TAC TIC TAC TIC ... , nos relógios pretos e  
 TIC TAC TIC TAC ... , no relógio branco.

Isso indica que o *período* do relógio branco, quando observado por Maria, é duas vezes maior que o *período* dos relógios pretos que ela possui. Todos os ritmos da vida de João são coerentes com os períodos do seu próprio relógio: as batidas do seu coração, a jornada de trabalho, a quantidade de sono, a duração de uma música... Por isso, quando Maria observa o relógio branco andar duas vezes mais devagar que o seu, ela também observa o mesmo acontecer com todos os ritmos de João. Em outras palavras, Maria observa *tudo* acontecer mais devagar no referencial de João do que no seu próprio referencial. É isso que queremos dizer quando falamos que o *tempo* de João manifesta-se *dilatado* no referencial de Maria. Este tipo de comportamento dos relógios pode, à primeira vista, parecer estranho, já que viola a nossa intuição cotidiana, educada na tradição newtoniana, na qual a passagem do tempo parece independer do observador. Convém lembrar, entretanto, que essa intuição é baseada na nossa vivência em um mundo onde as velocidades relativas são pequenas quando comparadas à da luz. Por exemplo, a velocidade de um jato comercial é cerca de 1.000 km/h, o que corresponde a pouco menos de 300 m/s. Usando esse dado na equação (18.13), juntamente com  $c \cong 3 \times 10^8$  m/s, obtemos  $\gamma = 1,000\,000\,000\,000\,5$ .

Um aspecto muito importante do fenômeno discutido aqui, que envolve a dilatação dos ritmos dos relógios, é que ele é *real!* É algo que acontece mesmo, e não corresponde a uma ilusão ou uma falha dos sentidos. Ele pode ser comprovado por meio de experimentos, como veremos adiante.

## • relatividade e bagunça

Quando iniciamos o estudo da relatividade, é comum que tenhamos muitas dúvidas, em geral acompanhadas por uma sensação de insegurança. A relatividade parece virar tudo de pernas para o ar. Se isto estiver acontecendo com você, não se preocupe, é normal. Para melhorar um pouco este tipo de sensação desagradável, convém lembrar que a relatividade é uma teoria que trata do comportamento do mundo físico quando ocorrem mudanças de referencial. Por isso, muito do que você conhece e aprendeu sobre a natureza, na escola e nas suas experiências diárias, continua valendo quando você permanece num único referencial.

Em particular, no exemplo do relógio de luz, é impossível que João sinta o seu *próprio* tempo passar mais devagar, só porque Maria passa correndo em frente a ele. João não se sente em movimento. Para ele, quem se move é Maria. Pense em você mesmo: é possível que o seu relógio comece a andar mais devagar só porque um avião passou no céu, sobre a sua cabeça? Evidentemente, isto não faz qualquer sentido.

### • a simetria da dilatação

No exemplo apresentado anteriormente, mostramos que os intervalos de tempo do relógio branco, carregado por João, aparecem dilatados em  $S_M$ . Será que isso significa que os intervalos de tempo do relógio de Maria vão aparecer *contraídos* em  $S_J$ ? A resposta é *não!* Para compreender isto, consideramos a situação inversa, ou seja, como João vê um relógio preto, estacionário em  $S_M$ . Dizer que João se move para a direita em relação a  $S_M$  é equivalente a dizer que Maria se move com velocidade  $-v$ , para a esquerda em relação a  $S_J$ , como indica a fig. 18.6.

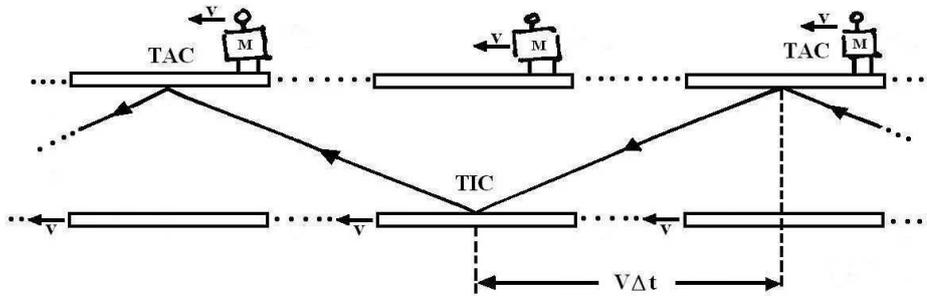


Figura 18.6: O relógio preto de Maria, visto em  $S_J$ .

Neste caso, a distância  $d_J^p$ , que a luz no interior do relógio preto estacionário em relação a de Maria tem de percorrer, no referencial de João, vale

$$d_J^p = 2\sqrt{L^2 + \left(\frac{v \Delta t_J^p}{2}\right)^2} \quad (18.18)$$

e o intervalo de tempo  $\Delta t_J^p = d_J^p/c$  é dado por

$$\Delta t_J^p = \frac{2L}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta \tau_J^b}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (18.19)$$

Ou seja, o resultado é o mesmo que o dado na eq.(18.14), com  $M \leftrightarrow J$  e  $b \leftrightarrow p$ .

Juntando esta conclusão com a expressa pela eq.(18.14), podemos afirmar que Maria percebe os intervalos de tempo do relógio branco dilatados e João percebe os intervalos de tempo do relógio preto dilatados. Como é que isso é possível? Para entender melhor a solução deste *aparente* paradoxo, é preciso esperar um pouco, até que você adquira mais experiência em problemas de relatividade. No momento, tudo o que podemos fazer é notar que deve haver algum tipo de simetria entre as observações feitas por João e Maria. Afinal de contas, o primeiro princípio da relatividade precisa ser satisfeito.

Por outro lado, deve também haver algum tipo de assimetria entre as observações de João e Maria, nos dois exemplos apresentados. Uma sugestão sobre a origem desta assimetria pode ser encontrada na notação que empregamos. Nas eqs.(18.14) e (18.17),  $\Delta\tau$  e  $\Delta t$  representam medições diferentes. Qual o significado de cada um desses intervalos? Esta é uma questão difícil e sutil, mas é importante que você deixe isto bem claro antes de prosseguir.

### • exercícios

1. Você está estudando numa sala de aulas. A sala é um referencial ou está num referencial? O que é um referencial? Onde ele está “preso”?
2. Supondo que dois observadores, em referenciais inerciais diferentes, com velocidade relativa muito alta, mas menor do que  $c$ , possam se comunicar por meio de telefone, fax, ondas de rádio, e-mail, televisão, cartas enviadas pelo correio, etc, tente imaginar um experimento que permita comprovar a dilatação do tempo prevista pela relatividade.
3. Qual deve ser a velocidade de João relativamente a Maria, para que ela observe que relógio de João ande 10 vezes mais devagar do que o seu próprio? E 100 vezes? E 1.000 vezes?
4. João possui um relógio de luz em que esta se move verticalmente, como na figura 18.4a. Ele se desloca para a direita em relação a Maria, com uma velocidade  $v = 3c/5$ , carregando o seu relógio. Qual o valor da componente vertical da velocidade da luz em relação a Maria, nos contextos da mecânica clássica e da relatividade? Sugestão: estude a Fig. 18.5.

### • respostas

3.  $\sqrt{0.99} c$ ;  $\sqrt{0.9999} c$ ;  $\sqrt{0.999999} c$
4. Mecânica clássica:  $c$ ; relatividade:  $4c/5$ .



# Capítulo 19

## contração do espaço e quebra da simultaneidade

### • contração do espaço

Na aula anterior, ao aplicarmos o segundo princípio da relatividade ao caso do relógio de espelhos paralelos, chegamos à conclusão de que o seu funcionamento é observado de modos diferentes por pessoas em referenciais com movimentos relativos. Qualquer velocidade, inclusive a da luz, é sempre a razão entre uma distância e um intervalo de tempo. Como, na relatividade, a velocidade da luz é invariante, se as características do tempo dependem do referencial, o mesmo deve acontecer com as do espaço. A contração do espaço é, de certo modo, complementar à dilatação dos intervalos de tempo.

Para perceber a complementaridade da dilatação dos intervalos de tempo e da contração das distâncias consideremos, por exemplo, o deslocamento de João, em  $S_J$ , relativamente a Maria, em  $S_M$ , com velocidade  $v$ . Para medir esta velocidade, João combina com Maria que ela deve fixar, no seu referencial  $S_M$ , uma régua de comprimento  $\lambda_M$ , paralela à velocidade relativa. Ambos se comprometem a medir os intervalos de tempo entre as passagens de João pelas duas extremidades da régua usando o relógio branco e, a partir desses dados, calcular a velocidade do outro.

Em  $S_M$ ,  $\lambda_M$  é o *comprimento próprio* da régua, já que aí ela está em repouso. Na relatividade, uma distância entre dois pontos é chamada de *própria* quando estes dois pontos e o observador estão todos em repouso em um único referencial. Por isso, o *comprimento próprio* de uma régua é o seu comprimento medido por um observador em repouso em relação a ela. Em geral, representamos comprimentos próprios por letras gregas.

Na figura 19.1, mostramos, do lado esquerdo, a medição da velocidade de João, feita no referencial  $S_M$ . Maria observa o deslocamento do relógio branco, carregado por João,

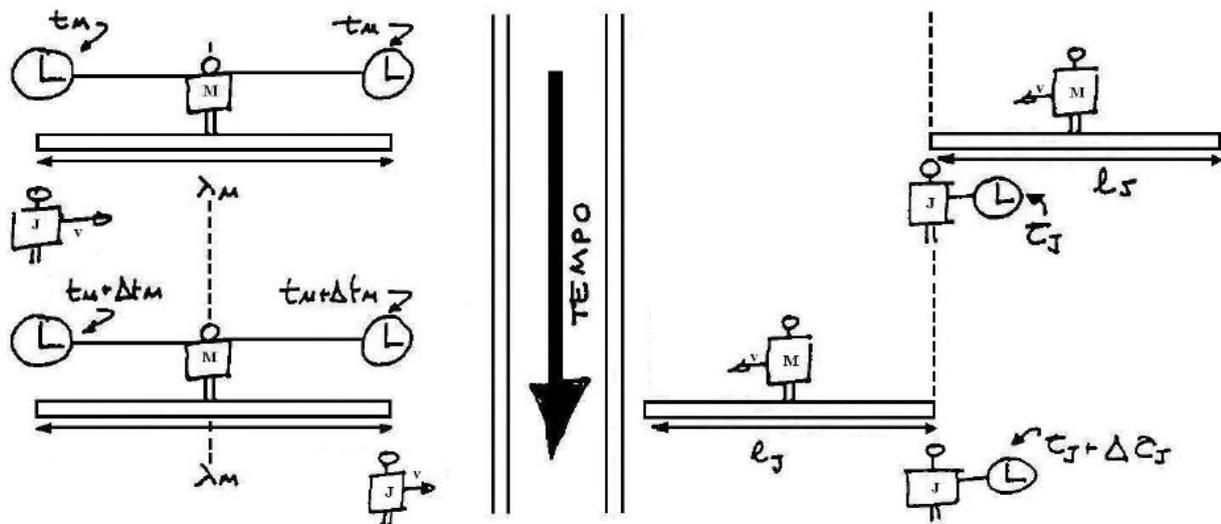


Figura 19.1: As medições da velocidade nos referenciais  $S_M$  (esquerda) e  $S_J$  (direita).

e a velocidade é dada por

$$v_M = \frac{\lambda_M}{\Delta t_M^b}, \quad (19.1)$$

onde  $\lambda_M$  é o comprimento da régua de Maria e  $\Delta t_M^b$  é o intervalo de tempo decorrido entre as passagens de João pelos seus dois extremos, medido em  $S_M$ .

No referencial  $S_J$ , temos a situação descrita do lado direito da Fig. 19.1, e a medida da velocidade é dada por

$$v_J = \frac{\ell_J}{\Delta \tau_J^b}, \quad (19.2)$$

onde  $\ell_J$  é o comprimento da régua visto por ele e  $\Delta \tau_J^b$  é o intervalo de tempo decorrido entre as passagens dos dois extremos da régua por ele. Como João utiliza um único relógio branco, em repouso em relação a ele, esse é um intervalo de tempo próprio.

A simetria entre os dois referenciais, implícita no primeiro princípio da relatividade, nos diz que o módulo da velocidade de João em relação a Maria deve ser igual ao da velocidade de Maria em relação a João. Ou seja,  $v_J = v_M$ , o que nos permite escrever

$$\frac{\lambda_M}{\Delta t_M^b} = \frac{\ell_J}{\Delta \tau_J^b}. \quad (19.3)$$

Os intervalos de tempo estão relacionados pela eq. (18.17), que corresponde a

$$\Delta t_M^b = \frac{\Delta \tau_J^b}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (19.4)$$

Assim, concluímos que

$$\ell_J = \sqrt{1 - v^2/c^2} \lambda_M . \quad (19.5)$$

Como o fator em frente a  $\lambda_M$  é menor que 1, o comprimento da régua, que está em repouso em  $S_M$ , é visto por João como contraído, já que  $\ell_J \leq \lambda_M$ . Na relatividade, tanto os intervalos de tempo como os de espaço deixam de ser absolutos.

A complementaridade entre dilatação do tempo e contração do espaço manifesta-se, neste exemplo, pelo fato de Maria observar o relógio de João funcionar mais lentamente que o seu, enquanto que João observa que a régua de Maria fica contraída. Do ponto de vista matemático isso está expresso na eq.(19.3), que envolve uma grandeza própria para cada observador:  $\lambda_M$  no lado esquerdo e  $\Delta\tau_J^b$  no lado direito. Para compreender porque isso ocorre, analise com cuidado a Fig. 19.1.

### • a contração do espaço e o segundo princípio

Para mostrar de modo mais direto a relação entre a invariância da velocidade da luz e a contração das distâncias, retomamos os relógio de luz da aula anterior. Entretanto, agora, supomos que João ao passar por Maria carregue *dois* relógios brancos idênticos, um deles com espelhos horizontais e o outro, com espelhos verticais, indicados pelos rótulos  $bh$  e  $bv$ , respectivamente. No referencial  $S_J$ , os dois relógios estão em repouso, como mostra a figura 19.2 e, por serem idênticos, os seus TICs e TACs coincidem. Ou sejam, eles medem intervalos de tempo próprio, que são idênticos entre si e dados por

$$\Delta\tau_J^{bh} = \Delta\tau_J^{bv} = \frac{2L}{c} . \quad (19.6)$$

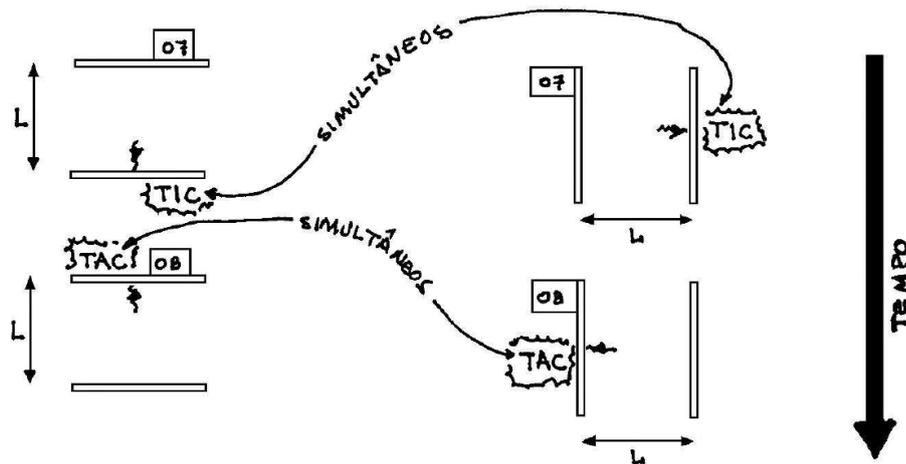


Figura 19.2: Os dois relógios de João, em dois instantes diferentes.

Consideramos, agora, o caso em que João, carregando o relógio branco de espelhos verticais, passa por Maria com velocidade  $v$ , para a direita, mostrado na Fig. 19.3 e, para

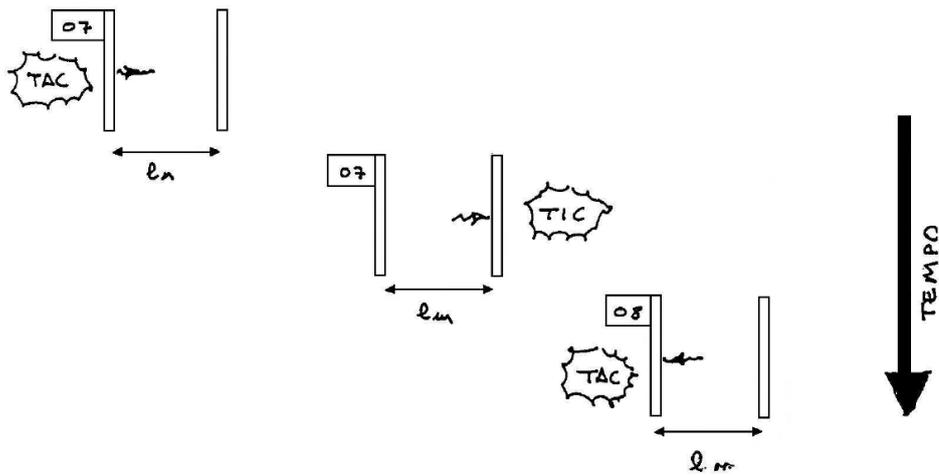


Figura 19.3: O relógio branco visto em  $S_M$ , em três instantes diferentes.

explicitar o papel da distância entre os espelhos, calculamos o intervalo de tempo entre dois TACs sucessivos desse relógio.

Inicialmente, respondemos esta questão no contexto da mecânica clássica. Para tanto, dividimos o intervalo  $\Delta T_M$ , entre dois TACs sucessivos, em duas partes: o intervalo entre o primeiro TAC e o TIC, que chamamos de  $\Delta T_{M1}$ , e entre o TIC e o segundo TAC, representado por  $\Delta T_{M2}$ . Sendo  $L_M$  a distância entre os dois espelhos verticais no referencial  $S_M$ , notamos que, no intervalo de tempo  $\Delta T_{M1}$ , a luz tem de percorrer uma distância maior do que  $L_M$  já que, enquanto ela anda, o espelho da direita também o faz, fugindo do pulso luminoso. Na mecânica clássica, a velocidade deste pulso de luz em relação a Maria é dada por  $C_{M1} = c + v$ , o que nos permite escrever

$$\Delta T_{M1}^{bv} = \frac{L_M^{bv} + v \Delta T_{M1}^{bv}}{c + v}, \quad (19.7)$$

de onde obtemos

$$\Delta T_{M1}^{bv} = \frac{L_M^{bv}}{c}. \quad (19.8)$$

Durante o intervalo de tempo  $\Delta T_{M2}$ , entre o TIC e o segundo TAC, o pulso de luz vai de encontro ao espelho da esquerda e, em relação a Maria, a sua velocidade seria  $C_{M2} = c - v$ . Portanto, no contexto da mecânica clássica, temos

$$\Delta T_{M2}^{bv} = \frac{L_M^{bv} - v \Delta T_{M2}^{bv}}{c - v}, \quad (19.9)$$

o que corresponde a

$$\Delta T_{M2}^{bv} = \frac{L_M^{bv}}{c}. \quad (19.10)$$

O intervalo entre dois TACs sucessivos é, então,

$$\Delta T_M^{bv} = \Delta T_{M1}^{bv} + \Delta T_{M2}^{bv} = \frac{2L_M^{bv}}{c}. \quad (19.11)$$

Como este intervalo de tempo não pode depender das orientações dos espelhos, ele deve ser igual ao dado pela eq. (18.9),  $\Delta T_M^b = 2L/c$ . Assim, concluímos que  $L_M^{bv} = L$ , ou seja que, na mecânica clássica, as distâncias entre os espelhos independem do referencial.

Repetimos, a seguir, este cálculo no contexto da relatividade, onde também consideramos dois intervalos de tempo,  $\Delta t_{M1}^{bv}$  e  $\Delta t_{M2}^{bv}$ . O intervalo relativístico  $\Delta t_{M1}$ , entre o primeiro TAC e o TIC é calculado do mesmo modo que o intervalo clássico. Entretanto, agora, o módulo da velocidade da luz em relação a Maria também é  $c$ , e não mais  $C_{M1} = c + v$ . Assim, o análogo relativístico da eq. (19.8) é:

$$\Delta t_{M1}^{bv} = \frac{\ell_M^{bv} + v \Delta t_{M1}^{bv}}{c}, \quad (19.12)$$

e, portanto,

$$\Delta t_{M1}^{bv} = \frac{\ell_M^{bv}}{c - v}. \quad (19.13)$$

Já o intervalo  $\Delta t_{M2}$ , entre o TIC e o segundo TAC, é dado por

$$\Delta t_{M2}^{bv} = \frac{\ell_M^{bv} - v \Delta t_{M2}^{bv}}{c}, \quad (19.14)$$

que corresponde a

$$\Delta t_{M2}^{bv} = \frac{\ell_M^{bv}}{c + v}. \quad (19.15)$$

No contexto da relatividade, portanto, o intervalo entre dois TACs sucessivos é dado por

$$\Delta t_M^{bv} = \Delta t_{M1}^{bv} + \Delta t_{M2}^{bv} = \frac{2 \ell_M^{bv}}{c(1 - v^2/c^2)}. \quad (19.16)$$

Para interpretar esse resultado, é preciso invocar a idéia de que a relação entre os intervalos de tempo observados em  $S_J$  e  $S_M$  não podem depender da orientação dos relógios envolvidos. O caso do relógio de espelhos horizontais foi estudado na aula anterior, onde vimos que o intervalo de tempo decorrido entre dois TACs sucessivos no relógio branco, medido em  $S_M$ , é dado pela eq. (18.13), que tem a forma

$$\Delta t_M^{bh} = \frac{2L}{c \sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (19.17)$$

Este resultado foi obtido para relógios de luz, mas é válido para quaisquer tipos de relógios, eletrônicos, mecânicos ou outros. O que importa é a relação entre os períodos nos dois referenciais e não, os instrumentos usados para medi-los. Caso Maria tivesse observado

o relógio branco de espelhos verticais ou qualquer outro, fixo no referencial  $S_J$ , ela teria obtido exatamente o mesmo resultado. Assim,  $\Delta t_M^{bv} = \Delta t_M^{bh}$ . Impondo esta condição, concluímos que

$$\ell_M^{bv} = \sqrt{1 - v^2/c^2} L. \quad (19.18)$$

O fato de a raiz ser menor que 1 para  $v \neq 0$  significa que a distância entre os dois espelhos verticais, observada por Maria, é menor do que a distância própria  $\lambda_J^{bv} = L$ , medida por João:  $\ell_M^{bv} \leq \lambda_J^{bv}$ . Este resultado indica que a distância entre os espelhos verticais se contrai para o observador que vê o relógio em movimento. Este resultado reflete uma propriedade do espaço e não, de objetos físicos particulares. É por isso que as eqs. (19.5) e (19.19) são idênticas.

No caso dos relógios de luz, supusemos, tacitamente, que a contração do espaço somente ocorre na direção paralela à velocidade relativa e que, nas direções transversais, nada acontece. Este aspecto da relatividade será mais bem discutido nas aulas seguintes.

### • a realidade da dilatação do tempo e da contração do espaço

Ao estudar relatividade, podemos ser tentados a pensar que os efeitos de dilatação do tempo e contração do espaço correspondem a impressões falsas, ou a enganos dos sentidos. Isso, entretanto, não é verdade, já que esses efeitos ocorrem realmente e podem, em muitos casos, ser comprovados experimentalmente. Em 1911, Einstein afirmou: <sup>1</sup>“*A questão se a contração de Lorentz existe ou não, é confusa. Ela “realmente” não existe, na medida que não existe para um observador que se move [com a barra]; ela “realmente” existe, entretanto, no sentido em que pode, em princípio, ser demonstrada por um observador em repouso*”.

Ou seja, um observador em relação ao qual a régua está parada não pode perceber a sua contração, mas alguém que observa a régua em movimento, pode. Por exemplo, para documentar a contração do espaço, poderíamos pensar em fotografias. Tirar uma foto de um objeto que se move com velocidade muito alta não é trivial, pois ocorrem distorções devidas ao tempo de propagação da luz até a câmara. Apesar disto, neste curso vamos supor que estas distorções possam ser minimizadas por meio de um sistema eletrônico de reconstrução de imagens, ou por meio de câmaras, nas quais o registro das imagens é feito por meio de feixes contendo um número muito grande de fibras ópticas, colocadas muito próximas do objeto a ser registrado.

Se colocássemos, lado a lado, um auto retrato de João e a foto tirada dele por Maria, com uma câmara em que as distorções houvessem sido corrigidas, e se a velocidade relativa fosse  $v = 3c/5$ , na direção horizontal, teríamos a situação mostrada na figura 19.4. Fotos são coisas concretas e palpáveis que poderiam, em princípio, registrar a contração do espaço, indicando que ela é real. Se, por outro lado, fosse João quem tirasse a foto de Maria, ela apareceria contraída na direção do movimento, como na figura 19.5. O efeito

---

<sup>1</sup>Citado em A. Pais, op.cit., p144.

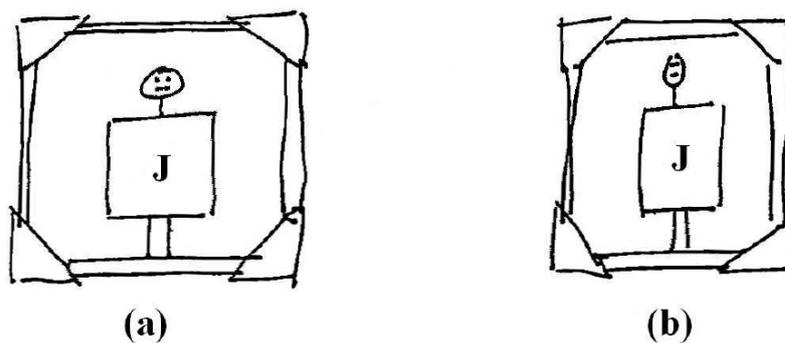


Figura 19.4: As duas fotos de João: a) tirada por ele mesmo; b) tirada por Maria.

da contração do espaço também é simétrico. Uma vez obtidas, as fotos poderiam ser trocadas entre os seus autores, por meio de mensagens eletrônicas, e tendo João como Maria poderiam ver, em uma única página, as quatro fotos mostradas nas figs. 19.4 e 19.5.

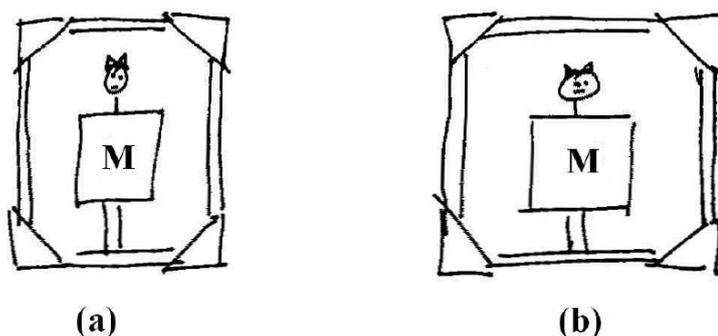


Figura 19.5: As duas fotos de Maria: a) tirada por João; b) tirada por ela mesma.

Este tipo de situação ilustra bem os efeitos da relatividade, mas não é viável na prática, pois não existem condições tecnológicas para que pessoas se movam com velocidades relativas iguais a  $v = 3c/5$ . Em geral, é muito difícil dotar corpos macroscópicos de velocidades relativas muito altas, pois as energias necessárias ao processo de aceleração são muito grandes. Já no caso de partículas microscópicas, isso é relativamente fácil.

### • simultaneidade

Nesta aula e na anterior, vimos que os intervalos de tempo e de espaço na relatividade não são absolutos e que, tanto a dilatação do tempo como a contração do espaço, são efeitos reais, posto que mensuráveis. Como discutimos a seguir, no contexto desta teoria a noção clássica de simultaneidade entre eventos é também alterada, passando a depender do observador.

Para mostrar como isso ocorre, comparamos os comportamentos dos dois relógios bran-

cos, com espelhos verticais e horizontais, discutidos anteriormente. João, que segura os dois, “ouve” ambos fazerem o TIC e o TAC simultaneamente, já que eles estão em repouso no seu referencial e, por isso, marcam o tempo da mesma maneira, como sugere a figura 19.6.

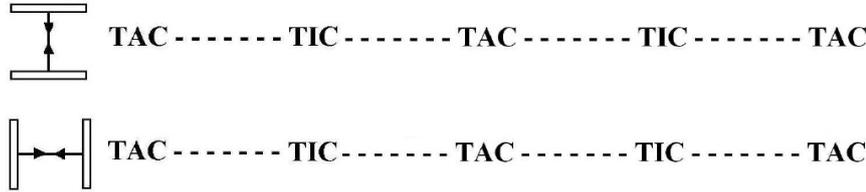


Figura 19.6: Os relógios brancos no referencial  $S_J$ .

O problema, agora, consiste em saber como Maria “ouve” os TICs e TACs dos dois relógios brancos. No caso do relógio de espelhos *horizontais*, os cálculos feitos anteriormente permitem-nos concluir que o intervalo  $\Delta t_{M1}^{bh}$  entre o TIC e o TAC é igual ao intervalo  $\Delta t_{M2}^{bh}$  entre o TAC e o TIC, sendo ambos dados por

$$\Delta t_{M1}^{bh} = \Delta t_{M2}^{bh} = \frac{L}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (19.19)$$

No relógio de espelhos *verticais*, por outro lado, isso não acontece. Segundo as eqs. (19.13),(19.15) e (19.18), temos

$$\Delta t_{M1}^{bv} = \frac{\ell_M^{bv}}{c - v} = \frac{L\sqrt{1 - v^2/c^2}}{c - v} = \frac{L}{c} \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}, \quad (19.20)$$

$$\Delta t_{M2}^{bv} = \frac{\ell_M^{bv}}{c + v} = \frac{L\sqrt{1 - v^2/c^2}}{c + v} = \frac{L}{c} \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}. \quad (19.21)$$

Deste modo os três intervalos de tempo,  $\Delta t_{M1}^{bh} = \Delta t_{M2}^{bh}$ ,  $\Delta t_{M1}^{bv}$  e  $\Delta t_{M2}^{bv}$  são todos diferentes entre si. Para Maria, os TACs dos dois relógios brancos são simultâneos, mas isso não acontece com os TICs, como ilustra a figura 19.7.

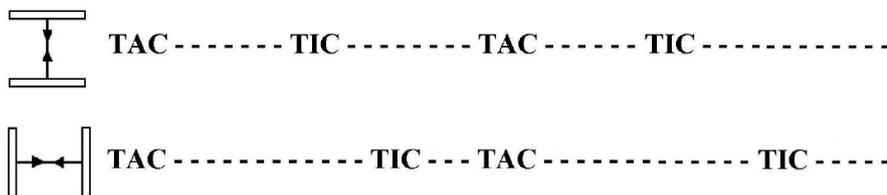


Figura 19.7: Os relógios brancos no referencial  $S_M$ .

Se o intervalo entre um TIC-TAC dos relógios brancos no referencial  $S_J$  fosse de 1 segundo, e a velocidade relativa fosse  $3c/5$ , teríamos os resultados mostrados na tabela abaixo.

	referencial	TAC-TIC	TIC-TAC	TAC-TAC
relógio de espelhos horizontais	$S_J$	1,00 s	1,00 s	2,00 s
	$S_M$	1,25 s	1,25 s	2,50 s
relógio de espelhos verticais	$S_J$	1,00 s	1,00 s	2,00 s
	$S_M$	2,00 s	0,50 s	2,50 s

A relatividade, ao mudar os conceitos de espaço e tempo, muda também o de simultaneidade. No âmbito do senso comum, dois eventos são ditos simultâneos quando ocorrem ao mesmo tempo. Na relatividade, esta definição de simultaneidade não é suficientemente clara, e é preciso ampliá-la. Neste novo contexto, é preciso esclarecer também: em qual referencial!

Suponhamos que, em  $S_M$ , ocorram dois eventos quaisquer,  $A$  e  $B$ , em posições diferentes,  $P_A$  e  $P_B$ . Por exemplo, o evento  $A$  pode ser o piscar de um olho e o evento  $B$ , a batida de um martelo contra um prego. Suponhamos, ainda, que Maria esteja num ponto  $P_M$ , equidistante dos pontos  $P_A$  e  $P_B$ , e que ela esteja em condições de ver os dois eventos. Na relatividade, os eventos  $A$  e  $B$  são considerados simultâneos, em  $S_M$ , se Maria os vê ao mesmo tempo. Nesta teoria, de modo geral, dizemos que dois eventos são simultâneos *em um referencial* quando as luzes por eles emitidas chegam juntas a um ponto equidistante deles. No caso do exemplo, Maria está equidistante do olho que pisca e do prego que recebe a martelada. Sabendo disso, ela pode concluir que, se ela vê as informações luminosas provenientes desses dois eventos ao mesmo tempo, então eles de fato ocorrem ao mesmo tempo. Neste caso, os eventos  $A$  e  $B$  são simultâneos no referencial  $S_M$ . Para completar esta discussão, convém lembrar que os eventos  $A$  e  $B$  são simultâneos *entre si*, mas ambos *anteriores* à percepção de Maria.

Onde falha a ideia de simultaneidade do senso comum não-relativístico? Na relatividade, a conceituação de simultaneidade envolve tanto o tempo como o espaço, enquanto que a do senso comum envolve apenas o tempo e incorpora, tacitamente, a noção clássica de tempo absoluto. Como vimos no caso dos relógios brancos e, também, discutimos a seguir, eventos simultâneos em um referencial não são, necessariamente, simultâneos em um outro.

### • a noção de simultaneidade é relativa

A noção relativística de simultaneidade parece bastante estranha, à primeira vista, pois é diferente da nossa experiência diária. Para ganhar um pouco de familiaridade com ela, consideremos a situação mostrada na figura 19.8. Maria está parada numa estação de trem, à noite, com todas as luzes desligadas. Na plataforma existem, de cada um dos seus lados, dois flashes, ambos à distância  $L$  dela. A esses flashes estão ligados fios de mesmo comprimento, conectados a um interruptor único, de modo que eles podem ser acionados

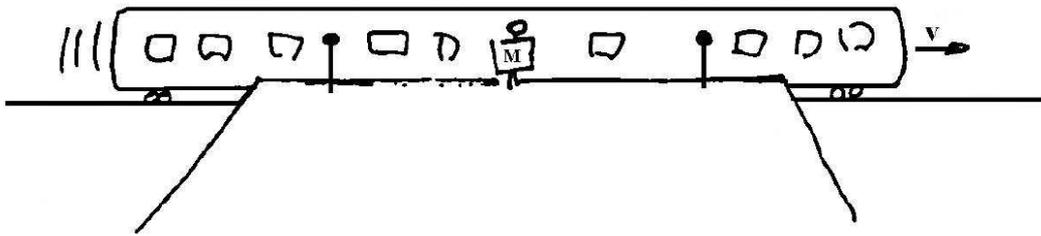


Figura 19.8: Maria e os dois flashes, no referencial da estação.

de uma só vez por Maria. Este arranjo permite que sejam iluminadas pessoas que viajam num trem, que passa pela plataforma com velocidade  $v$ . Nesta discussão, vamos supor que os flashes estejam muito próximos das pessoas do trem, de modo que elas sejam iluminadas no mesmo instante em que são acionados. Essa hipótese não influencia em nada as conclusões principais a serem obtidas, mas simplifica muito a discussão.

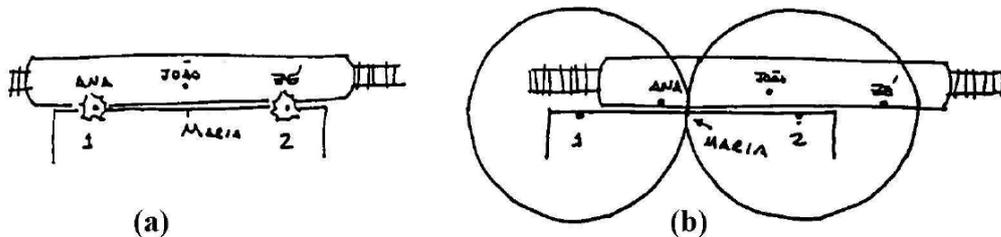


Figura 19.9: Eventos no referencial  $S_M$ : (a) emissão das luzes; (b) frentes de onda chegando a Maria.

Quando Maria aciona o interruptor, os dois flashes iluminam duas pessoas no trem. Ana é iluminada pelo flash da esquerda e Zé, pelo da direita, como mostra a figura 19.9(a). Ao serem acionados, cada um dos flashes emite uma frente de onda, que se propaga esféricamente, com velocidade  $c$ . Assim, no referencial da estação, após o intervalo de tempo  $\Delta t_M = L/c$ , temos a situação mostrada na fig. 19.9(b) e Maria vê, simultaneamente, Ana e Zé. Para ela, as iluminações de Ana e Zé são simultâneas, pois ela recebe, ao mesmo tempo, os pulsos provenientes dos dois flashes, que ela sabe estarem equidistantes dela.

No contexto da relatividade, Ana e Zé não podem ter sido iluminados simultaneamente no referencial  $S_J$  de João, que viaja no trem e, está equidistante de Ana e Zé. Como o trem se move à medida que as ondas luminosas se propagam, as duas frentes de onda levam tempos diferentes para chegar até ele. Assim, por exemplo, na situação ilustrada na fig. 19.9(b), a frente de onda que iluminou Zé já passou por João, mas isso ainda não aconteceu com a frente de onda que iluminou Ana. Por isso, João já viu Zé, mas ainda não viu Ana. Na relatividade, as velocidades das luzes emitidas pelos dois flashes são iguais a  $c$ , nos referenciais  $S_M$  e  $S_J$ . Por isso, a diferença de tempo entre as chegadas das imagens de Zé e Ana até João constitui, para ele, uma clara indicação que as duas pessoas foram iluminadas em instantes diferentes. Como João recebe primeiro a luz proveniente de Zé, no referencial do trem, este foi, de fato, iluminado antes do que Ana.

• **exercícios**

1. O fator  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  regula a dilatação do tempo e a contração do espaço. Para ter uma idéia das ordens de grandeza envolvidas, complete a tabela abaixo, usando  $c = 3 \times 10^8$  m/s:

...v....	...v/c....	.... $\gamma$ ....
1 m/s		
1 km/h		
100 km/h		
	0,01	
	0,1	
	0,5	
		2
		5
		10
		100

2. Os funcionários de uma estação medem os comprimentos da plataforma e de um trem que passa com velocidade  $v$ , para a direita e obtêm, em ambos os casos, o valor  $L$ .

- Desenhe a “visão do trem” e a “visão da plataforma” do problema.
- Determine os valores dos comprimentos do trem e da plataforma medidos pelos passageiros do trem.

3. Ana possui um relógio de espelhos verticais e ela se move para a esquerda, em relação a Pedro. Desenhe, em escala, o TIC-TAC do relógio de Ana quando “ouvido” por ela mesma e por Pedro, no caso  $v = \sqrt{3}c/2$ . O que mudaria se Ana invertesse o sentido da sua velocidade relativamente a Pedro?

4. Um trem se move com velocidade  $v$ , para a direita, relativamente à plataforma de uma estação. Um sinal luminoso, emitido no centro do trem, ilumina simultaneamente as suas duas extremidades. O que observam os funcionários da estação?

• **respostas**

2. b)  $L/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  e  $L\sqrt{1 - v^2/c^2}$

4. A extremidade traseira do trem é iluminada antes da extremidade dianteira.



# Capítulo 20

## transformações de Lorentz

### • eventos

A apresentação da relatividade feita até aqui explorou a invariância da velocidade da luz e teve o intuito de desenvolver uma intuição sobre o assunto, motivando a construção de significados novos para velhas palavras, tais como *tempo* e *espaço*. Nesta aula e nas seguintes, passamos a estudar uma abordagem mais poderosa para atacar problemas de cinemática relativística, baseada nas *transformações de Lorentz*.

As transformações de Lorentz relacionam *eventos* em referenciais diferentes. Por isso, é conveniente discutirmos um pouco o significado da palavra evento. Este conceito tem importância fundamental na relatividade e corresponde a algo que *realmente* acontece, num ponto do espaço e do tempo. Um evento é considerado como algo real porque, em princípio, ele pode ser observado e registrado. Por isso, dois observadores, em referenciais diferentes não podem discordar quando à *ocorrência* de um dado evento. Por exemplo, você encosta a caneta no papel e coloca um pingo num  $i$ . Daí em diante, o pingo está lá e nenhuma mudança de referencial pode fazer com que ele desapareça. A *colocação* do pingo é um evento, pois é algo que ocorre no espaço e no tempo. Note que o próprio pingo *não* é um evento.

Na linguagem cotidiana, podemos usar a palavra *evento* para descrever um show de música, um jogo de futebol, um encontro entre cientistas ou o choque de um carro contra uma árvore. Na física, por outro lado, a palavra evento é empregada, exclusivamente, para indicar um acontecimento que ocorre em *um único* ponto do espaço e em *um único* instante bem definido. Por isso, na física, qualquer um dos exemplos citados corresponde a um *conjunto* de eventos, pois envolve vários acontecimentos, que ocorrem em muitos pontos do espaço e em muitos instantes diferentes.

Na teoria da relatividade, a descrição de um evento requer sempre quatro coordenadas, três espaciais e uma temporal. Este aspecto do problema foi enfatizado por Minkowski,

em um trabalho<sup>[1]</sup> publicado em 1908, onde ele afirma: “Os objetos da nossa percepção incluem invariavelmente lugares e tempos em combinação. Ninguém jamais percebeu um lugar a não ser em um tempo, ou um tempo a não ser em um lugar. Mas eu ainda respeito o dogma que tanto espaço como tempo têm significados independentes.”

Na relatividade, os eventos são considerados reais pela possibilidade de comprovação experimental e, por isso, dois observadores em referenciais diferentes não podem discordar da sua ocorrência. Eles podem, entretanto, discordar quanto à *descrição* feita desta ocorrência. É por isso que precisamos ter muito cuidado para não confundir um evento com a sua descrição, pois a *ocorrência* de um evento não depende do referencial no qual o observador se encontra. Já a *descrição* desse evento, depende do referencial. Assim, as observações incorporam, necessariamente, uma espécie de *perspectiva*, envolvendo espaço e tempo.

### • perspectivas

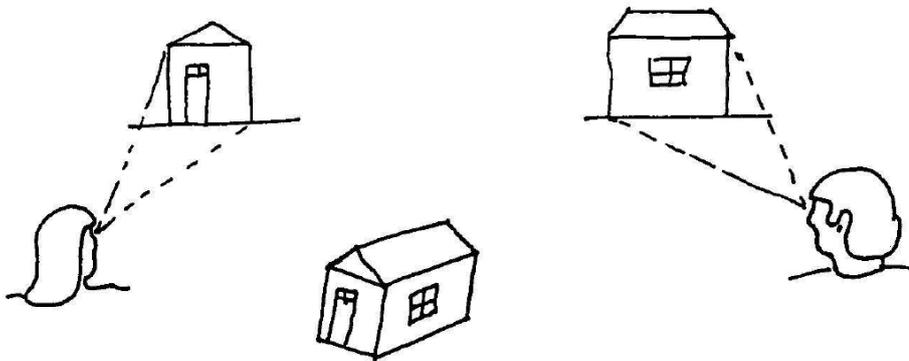


Figura 20.1: Maria e João olham a mesma casa.

Existe uma analogia entre a percepção de eventos na relatividade e o que acontece quando olhamos um objeto qualquer. Tomemos, por exemplo, a casa mostrada na figura 20.1. Maria, de pé em frente a ela, vê o que mostra o lado esquerdo da imagem, enquanto que João, em outra posição, vê o que mostra o lado direito dela. Maria e João vêm a *mesma casa*, mas as suas visões são diferentes. A casa faz, aqui, o papel de *evento*, a entidade que unifica as duas visões. As visões de Maria e João são observações particulares que, claramente, dependem da posição de cada pessoa em relação à casa. Por isso, as descrições baseadas nessas observações podem mudar, se o observador mudar de posição. Analogamente, na relatividade, as *observações* de um mesmo evento são dependentes dos referenciais em que são feitas. É interessante notar, também, que é impossível para qualquer observador ver diretamente a casa como um todo. O máximo que ele consegue é ver, separadamente, várias das facetas da casa e reconstruí-la em sua mente. Se Maria quiser saber como João vê a casa e souber onde ele se encontra, se ela dispuser de uma teoria de mudança de referencial, ela pode reconstruir a visão de João, mesmo sem se mover, sem sair do seu referencial. O mesmo ocorre com um evento, na relatividade.

A teoria da relatividade incorpora a ideia de que cada observador, em cada referen-

cial, descreve um *mesmo* evento  $E$  de forma diferente. Esta ideia pode ser representada esquematicamente escrevendo

$$\text{evento } E \quad \left\{ \begin{array}{l} S_M : (x_M^E, y_M^E, z_M^E; t_M^E) \\ S_J : (x_J^E, y_J^E, z_J^E; t_J^E) \end{array} \right. \quad (20.1)$$

$$(20.2)$$

Ou seja, o *mesmo* evento  $E$  tem *duas* descrições diferentes, em  $S_M$  e  $S_J$ , em termos das coordenadas espaço-temporais de cada referencial. Como o evento  $E$  é o mesmo, estas diferentes descrições guardam relações bem definidas, umas com as outras. Assim, se Maria, no referencial  $S_M$ , souber como descrever o evento  $E$  e souber, também, como o referencial  $S_J$  se move em relação a  $S_M$ , ela pode reconstruir a descrição de João para esse mesmo evento. Em relatividade, as regras que permitem efetuar esta operação, ou seja, encontrar as visões de outros observadores a partir da nossa, são as *transformações de Lorentz*. Elas relacionam as descrições, em referenciais com movimento relativo, de um *mesmo* evento.

## • o segundo princípio

Na relatividade, a noção de perspectiva envolve o tempo e, por isso, é bem menos fácil do que a aplicada apenas ao espaço tridimensional. Para descrever com clareza eventos no referencial  $S_M$ , de Maria, associamos a ele um sistema de três eixos espaciais e um relógio, como na figura 20.2. Analogamente, o referencial  $S_J$ , de João, também possui um sistema de três eixos espaciais e um relógio, como na fig. 20.3. Para tornar a discussão mais concreta, supomos que o sistema  $S_J$  se move com velocidade constante  $v_{\hat{j}}$  em relação a  $S_M$  e, o que é equivalente, que  $S_M$  se move com velocidade  $-v_{\hat{j}}$  em relação a  $S_J$ .

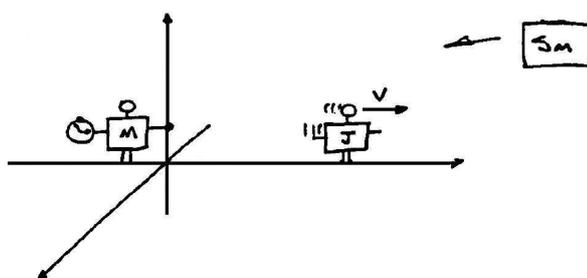


Figura 20.2: O referencial  $S_M$ , de Maria e o movimento de  $S_J$ , de João.

Imaginemos que Maria tenha, em suas mãos, um aparelho capaz de emitir pulsos de luz. No instante em que João passa em frente a ela, um pulso é emitido. Cria-se, então, uma frente de onda esférica que se propaga, de acordo com o segundo princípio da relatividade, com velocidade  $c$  em qualquer referencial.

A emissão de pulso de luz é um evento, chamado de  $R$ , que ocorre no instante em que as origens de  $S_M$  e  $S_J$  coincidem e é conveniente adotá-lo como origem espaço-temporal para os dois referenciais. Assim, por convenção, ele é descrito do seguinte modo, por

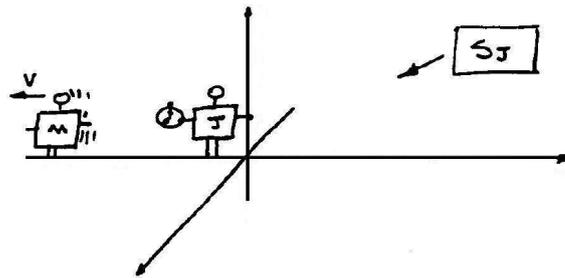


Figura 20.3: O referencial  $S_J$ , de João e o movimento de  $S_M$ , de Maria.

Maria e João:

$$\text{evento } R \quad \begin{cases} S_M : (x_M^R, y_M^R, z_M^R; t_M^R) = (0, 0, 0; 0) & (20.3) \\ S_J : (x_J^R, y_J^R, z_J^R; t_J^R) = (0, 0, 0; 0) & (20.4) \end{cases}$$

À medida que o tempo passa, em cada um dos referenciais o pulso se expande e a luz emitida fica distribuída sobre uma esfera, cujo raio cresce com a velocidade da luz, como mostram as figuras 20.4. De acordo com o segundo princípio, em  $S_M$ , é Maria que está no centro da esfera enquanto que, em  $S_J$ , é João que se encontra nessa posição. Essa situação viola bastante a nossa intuição clássica, já que parece corresponder a uma esfera com dois centros. Podemos nos perguntar se seria possível unificar os dois desenhos em um só, representando simultaneamente as duas visões. A resposta é **não!!!** Tentar fazer isso corresponde à pretensão a uma visão do problema que independe de referenciais particulares, superior e mais poderosa do que as permitidas aos humanos. Seria equivalente, no exemplo da casa, a tentar fazer um desenho mostrando todas as suas faces, as quatro paredes, telhado e piso, de uma só vez.

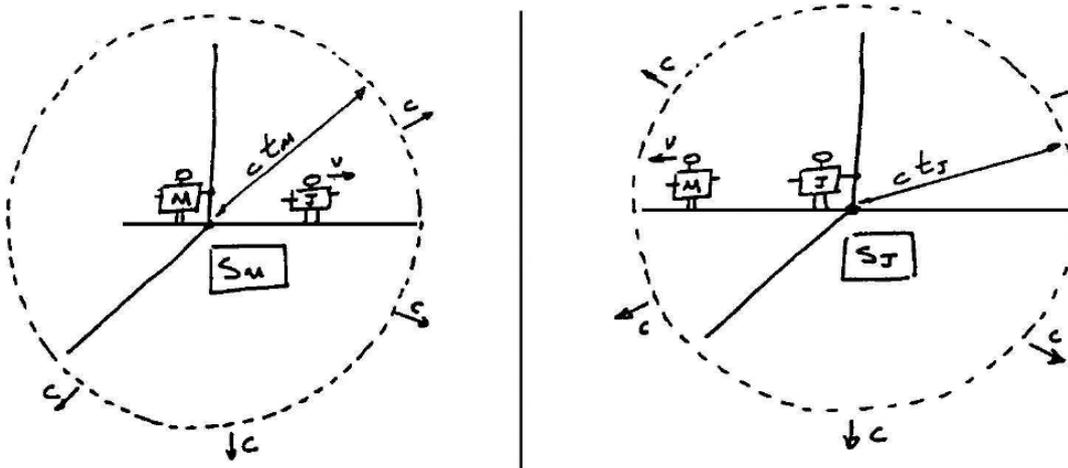


Figura 20.4: A evolução do pulso luminoso nos referenciais  $S_M$  (a) e  $S_J$  (b).

Os seres humanos e os aparelhos empregados em medições estão sempre ligados a referenciais. Por isso, a teoria da relatividade incorpora a ideia de que observações de processos envolvendo espaço e tempo somente podem ser feitas a partir de referenciais específicos. Os nossos sentidos, mesmo estendidos por instrumentos, são prisioneiros dos referenciais. Deste modo, os problemas colocados pelas figuras 20.1 e 20.4 são muito semelhantes. Em ambos os casos, os desenhos envolvem perspectivas particulares e as visões de Maria e João são diferentes entre si. Ainda assim, não há nenhuma incompatibilidade entre elas.

A figura 20.4(a) indica que, depois do instante inicial, em  $S_M$ , uma frente de onda esférica se propaga radialmente. Um ponto genérico dessa frente é caracterizado por quatro coordenadas,  $(x_M, y_M, z_M; t_M)$ , que satisfazem a equação de uma esfera, de raio proporcional à velocidade da luz. Assim

$$x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = c^2 t_M^2. \quad (20.5)$$

Já em  $S_J$ , as coordenadas da frente de onda são  $(x_J, y_J, z_J; t_J)$  e, como mostra a figura 20.4 (b), também satisfazem a equação de uma esfera

$$x_J^2 + y_J^2 + z_J^2 = c^2 t_J^2. \quad (20.6)$$

Consideremos, agora um segundo evento, por exemplo, que um grão de poeira seja iluminado pela passagem da frente de onda. Chamando esse segundo evento de  $P$ , as suas descrições nos dois referenciais são dados por

$$\text{evento } P \quad \left\{ \begin{array}{l} S_M : (x_M^P, y_M^P, z_M^P; t_M^P) \\ S_J : (x_J^P, y_J^P, z_J^P; t_J^P) \end{array} \right. \quad (20.7)$$

$$(20.8)$$

Esses conjuntos de coordenadas, incorporam a perspectiva de cada observador e são diferentes para Maria e para João.

Como o evento  $P$  está localizado sobre a esfera que se expande, suas coordenadas satisfazem as condições (20.5) e (20.6), o que nos permite escrever

$$\left[ (x_M^P)^2 + (y_M^P)^2 + (z_M^P)^2 - (ct_M^P)^2 \right] = \left[ (x_J^P)^2 + (y_J^P)^2 + (z_J^P)^2 - (ct_J^P)^2 \right]. \quad (20.9)$$

## • transformações de Lorentz

Expressões como as (20.7) e (20.8) mostram as descrições de um *mesmo* evento nos referenciais  $S_M$  e  $S_J$ . Entretanto, o fato de o evento ser único indica que deve haver uma relação entre os dois conjuntos de variáveis. Em relatividade, as regras que permitem relacionar as descrições de um *mesmo* evento, em referenciais com movimento relativo, são as *transformações de Lorentz*.

A obtenção das transformações de Lorentz (TL) é baseada numa hipótese muito geral: a de que as transformações de coordenadas sejam lineares. Esta linearidade visa preservar

a *homogeneidade do espaço* e a *uniformidade do tempo* nos dois referenciais, que correspondem às ideias de que as propriedades de um sistema físico não se alteram quando ele é deslocado como um todo, no espaço ou no tempo. Ou, em outras palavras, que a física não pode depender da escolha das origens das coordenadas espaciais e temporais. Ou ainda, intuitivamente, que o espaço é o “mesmo” em qualquer ponto e em qualquer instante, e que o tempo “passa” com a mesma “velocidade” em qualquer ponto e em qualquer instante. Por exemplo, se temos um laboratório com um sistema físico em uma dada cidade, nada muda se ele for transportado para outra cidade ou se fizermos experimentos no ano que vem, ao invés de hoje, desde que mantidas as demais condições.

Em uma transformação linear, as coordenadas em um referencial são combinações lineares das do outro. Um exemplo de transformação linear entre as coordenadas de  $S_M$  e  $S_J$  seria:  $x_J = a x_M + b t_M$ , com  $a$  e  $b$  constantes. Como exemplo de regras de transformação não lineares, temos:  $x_J = x_M^2$ ,  $x_J = A e^{B x_M}$ ,  $x_J = k \ln(B t_M)$ . Transformação não lineares não mantêm a homogeneidade do espaço e a uniformidade do tempo nos dois referenciais.

A hipótese de linearidade das transformações corresponde a escrever as coordenadas de um evento no referencial  $S_J$  em função das suas coordenadas em  $S_M$  como

$$\begin{aligned} x_J &= L_{xx} x_M + L_{xy} y_M + L_{xz} z_M + L_{xt} t_M , \\ y_J &= L_{yx} x_M + L_{yy} y_M + L_{yz} z_M + L_{yt} t_M , \\ z_J &= L_{zx} x_M + L_{zy} y_M + L_{zz} z_M + L_{zt} t_M , \\ t_J &= L_{tx} x_M + L_{ty} y_M + L_{tz} z_M + L_{tt} t_M . \end{aligned} \quad (20.10)$$

Nestas expressões, os coeficientes da transformação são representados por  $L$ , sendo que o primeiro índice corresponde à coordenada em  $S_J$  e o segundo, à coordenada  $S_M$ . O problema de determinar as  $TL$  corresponde a obter os valores dos coeficientes  $L$ , em função da velocidade relativa  $v$ . Na nossa apresentação da relatividade, supomos sempre que os eixos dos sistemas  $S_M$  e  $S_J$  sejam paralelos e que a velocidade relativa entre os dois seja paralela aos eixos  $y$ , como mostram as Figs. 20.2 e 20.3. Essa escolha permite uma grande simplificação nas contas, sem nenhuma perda de conteúdo. Para determinar os coeficientes  $L$ , consideramos os detalhes do evento  $P$ , a iluminação do grão de poeira pela frente de onda, mostrada em perspectivas diferentes nas figs. 20.4.

A consequência mais imediata do paralelismo entre os eixos é que não há misturas de coordenadas entre eixos diferentes e, portanto, que

$$L_{xy} = L_{yx} = L_{xz} = L_{zx} = L_{yz} = L_{zy} = 0. \quad (20.11)$$

Consideremos, agora, o caso das coordenadas  $x$  e  $z$  do evento  $P$ , ortogonais ao movimento relativo. Elas correspondem à projeção do evento sobre os planos  $x_M z_M$ , do referencial  $S_M$ , e  $x_J z_J$ , do referencial  $S_J$ . Como estes planos são paralelos e estão um atrás do outro, como mostra a figura 20.5, devemos ter

$$x_J = x_M , \quad (20.12)$$

$$z_J = z_M , \quad (20.13)$$

o que corresponde a

$$L_{xx} = L_{zz} = 1. \quad (20.14)$$

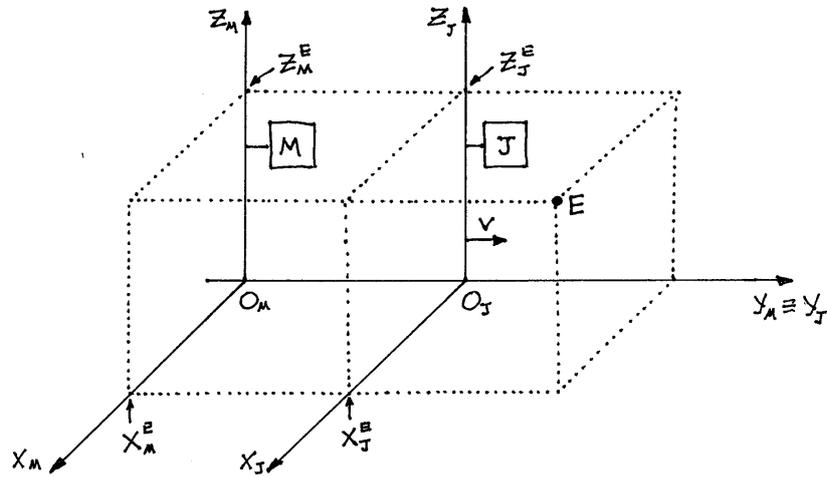


Figura 20.5: Projeção das coordenadas espaciais do evento  $P$ , eq. (20.5), nos planos  $xz$  das referenciais  $S_M$  e  $S_J$ .

Deste modo, o sistema de equações (20.10) fica muito mais simples, passa a ser dado por

$$\begin{aligned} x_J &= x_M, \\ y_J &= L_{yy} y_M + L_{yt} t_M, \\ z_J &= z_M, \\ t_J &= L_{ty} y_M + L_{tt} t_M. \end{aligned} \quad (20.15)$$

e contém apenas quatro incógnitas, que precisam ser obtidas por meio de quatro condições.

A primeira condição é determinada pelas coordenadas espaciais da origem de  $S_J$  em  $S_M$ , que são dadas por  $(x_M, y_M, z_M) = (0, v t_M, 0)$  e por  $(x_J, y_J, z_J) = (0, 0, 0)$ , em  $S_J$ . Usando esta condição em (20.15), encontramos

$$L_{yt} = -v L_{yy} \quad (20.16)$$

Analogamente, a segunda condição é obtida a partir das coordenadas da origem de  $S_M$ , em  $S_J$ , que são dadas por  $(x_M, y_M, z_M) = (0, 0, 0)$  e por  $(x_J, y_J, z_J) = (0, -v t_J, 0)$ , o que fornece

$$L_{yt} = -v L_{tt}, \quad (20.17)$$

e, portanto,

$$L_{tt} = L_{yy} . \quad (20.18)$$

Para obter os valores dos coeficientes  $L_{yy}$  e  $L_{ty}$ , voltamos ao grão de poeira iluminado pela frente de luz descrita nas figs. 20.4. As coordenadas desse evento, nos referenciais  $S_M$  e  $S_J$ , são dadas pelas eqs. (20.7) e (20.8) e estão vinculadas pela condição (20.9). As eqs. (20.12) e (20.13) permitem simplificar este resultado e obtemos

$$(y_J^P)^2 - c^2(t_J^P)^2 = (y_M^P)^2 - c^2(t_M^P)^2 . \quad (20.19)$$

Usando as eqs. (20.15), (20.16) e (20.18), escrevemos

$$\begin{aligned} & (L_{yy}^2 - c^2 L_{ty}^2)(y_M^P)^2 - 2 L_{yy}(v L_{yy} + c^2 L_{ty}) y_M^P t_M^P + L_{yy}^2(v^2 - c^2) (t_M^P)^2 \\ & = (y_M^P)^2 - c^2(t_M^P)^2 . \end{aligned} \quad (20.20)$$

Impondo que essa igualdade valha como um polinômio em  $y_M^P$  e  $t_M^P$ , obtemos:

$$L_{yy}^2 - c^2 L_{ty}^2 = 1 , \quad (20.21)$$

$$v L_{yy} + c^2 L_{ty} = 0 , \quad (20.22)$$

$$L_{yy}^2(v^2 - c^2) = -c^2 . \quad (20.23)$$

Estas condições fornecem

$$L_{yy} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} , \quad (20.24)$$

$$L_{ty} = - \frac{v}{c^2} L_{yy} . \quad (20.25)$$

O último passo consiste em determinar o sinal de  $L_{yy}$ . Isso é feito impondo que  $S_J$  e  $S_M$  coincidam quando  $v = 0$ , o que corresponde a escolher o sinal positivo.

Estes resultados determinam as *transformações de Lorentz* para  $S_M \rightarrow S_J$ . Definindo

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} , \quad (20.26)$$

o sistema (20.15) passa a ser escrito como

$$x_J = x_M , \quad (20.27)$$

$$y_J = \gamma (y_M - v t_M) , \quad (20.28)$$

$$z_J = z_M , \quad (20.29)$$

$$t_J = \gamma \left( t_M - \frac{v}{c^2} y_M \right) . \quad (20.30)$$

Essas equações constituem o instrumento que permite que, conhecendo as coordenadas de um evento em  $S_M$ , possamos encontrar as coordenadas que descrevem o *mesmo* evento em  $S_J$ .

### • a transformação inversa

As transformações de Lorentz, dadas pelas eqs. (20.27) - (20.30), permitem a passagem de  $S_M$  para  $S_J$ . O conjunto de equações que permite voltar de  $S_J$  para  $S_M$  corresponde à *transformação inversa*. Existem diversas maneiras de obter esta transformação. Uma possibilidade seria refazer todo o procedimento anterior, trocando J por M em todas as passagens. Uma alternativa, bastante menos trabalhosa, para chegar ao mesmo resultado consiste em isolar  $x_M, y_M, z_M; t_M$  no lado direito das eqs. (20.27) - (20.30) e expressar essas variáveis em função de  $x_J, y_J, z_J; t_J$ . No caso de  $x_M$  e  $z_M$ , o problema já está resolvido, pois basta escrever

$$x_M = x_J, \quad (20.31)$$

$$z_M = z_J. \quad (20.32)$$

Para obter  $y_M$ , multiplicamos a eq. (20.30) por  $v$ , somamos com a eq. (20.28) e temos

$$y_J + v t_J = \gamma y_M \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \rightarrow y_M = \gamma (y_J + v t_J). \quad (20.33)$$

Analogamente, para obter  $t_M$ , multiplicamos a eq. (20.28) por  $v/c^2$ , somamos com a eq. (20.30), obtendo

$$t_J + \frac{v}{c^2} y_J = \gamma t_M \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \rightarrow \gamma \left(t_J + \frac{v}{c^2} y_J\right). \quad (20.34)$$

Juntando as eqs. (20.31 - 20.34), encontramos as transformações de Lorentz para ir de  $S_J$  a  $S_M$ :

$$x_M = x_J, \quad (20.35)$$

$$y_M = \gamma (y_J + v t_J), \quad (20.36)$$

$$z_M = z_J, \quad (20.37)$$

$$t_M = \gamma \left(t_J + \frac{v}{c^2} y_J\right). \quad (20.38)$$

Observando este resultado, notamos que a única diferença entre a “ida” de  $S_M$  para  $S_J$  e a “volta” de  $S_J$  para  $S_M$  está no sinal da velocidade. De fato, o que determina a passagem de  $S_M$  para  $S_J$  é a velocidade  $v$  de João, em relação a Maria; o que determina a passagem de  $S_J$  para  $S_M$  é a velocidade  $-v$  de Maria, em relação a João. Portanto, o modo mais simples de encontrar a transformação inversa consiste em, simplesmente, intercambiar os índices M e J e trocar o sinal de  $v$  na transformação original.

### • a importância do evento de referência

Uma vez obtidas as transformações de Lorentz, fazemos um resumo do caminho percorrido. Utilizamos o segundo princípio para chegar às eqs. (20.5) e (20.6), nos apoiamos na homogeneidade do espaço e na uniformidade do tempo para argumentar que as transformações deveriam ser lineares e encontramos as suas formas. Este procedimento, embora não muito simples à primeira vista, é claro e a dedução surge dele sem maiores tropeços.

As nossas expressões que representam as transformações de Lorentz, foram obtidas supondo que os referenciais  $S_M$  e  $S_J$  tivessem uma origem espaço-temporal comum. Nossa dedução foi feita com base nesse fato e ele está, portanto, incorporado nas eqs.(20.27) - (20.30) e (20.35) - (20.38).

Deste modo, as coordenadas  $(x, y, z; t)$  que aparecem nestas expressões representam, de fato, as distâncias espaço-temporais entre dois eventos, tais como a emissão do pulso luminoso e a iluminação do grão de poeira da fig. 20.4. Esta é uma característica geral das transformações de Lorentz, pois elas *sempre* relacionam as coordenadas de um evento medidas em relação a um outro, tomado como referência. Por isso, os resultados anteriores também poderiam ser escritos como

$$\Delta x_J = \Delta x_M, \quad (20.39)$$

$$\Delta y_J = \gamma(\Delta y_M - v\Delta t_M), \quad (20.40)$$

$$\Delta z_J = \Delta z_M, \quad (20.41)$$

$$\Delta t_J = \gamma(\Delta t_M - \frac{v}{c^2} \Delta y_M), \quad (20.42)$$

e

$$\Delta x_M = \Delta x_J, \quad (20.43)$$

$$\Delta y_M = \gamma(\Delta y_J + v\Delta t_J), \quad (20.44)$$

$$\Delta z_M = \Delta z_J, \quad (20.45)$$

$$\Delta t_M = \gamma(\Delta t_J + \frac{v}{c^2} \Delta y_J). \quad (20.46)$$

onde os símbolos  $\Delta$  indicam os intervalos entre as coordenadas espaço-temporais de dois eventos. O problema é que estes símbolos tornam a notação pesada.

Por isso, optamos pelas expressões (20.27)-(20.30) e (20.35)-(20.38), que são completamente gerais, mas baseadas na convenção que um dos eventos do problema deve ser tomado como referência para todos os demais e ter coordenadas

$$\text{evento de referência} \left\{ \begin{array}{l} S_M : (0, 0, 0; 0), \\ S_J : (0, 0, 0; 0), \end{array} \right. \quad (20.47)$$

$$(20.48)$$

como nas eqs. (20.3) e (20.4). Esta convenção determina o significado das coordenadas dos demais eventos. A escolha do evento de referência é totalmente arbitrária, não influi nos resultados físicos e costuma ser feita com base em critérios de simplicidades ou conveniência.

### • a escala dos efeitos

O tamanho dos efeitos relativísticos é determinado pelo quociente  $v/c$ . A sua presença no fator  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  é tal que  $\gamma \geq 1$ , a igualdade valendo no caso particular  $v = 0$ . Quando  $v$  for comparável a  $c$ , o fator  $\gamma$  pode tornar-se grande e os efeitos relativísticos tornam-se correspondentemente importantes. Não há limite superior para  $\gamma$  e, portanto,  $1 \leq \gamma < \infty$ .

Quando a velocidade relativa  $v$  é muito menor que a da luz,  $v \ll c$ , o fator de escala  $\gamma$  aproxima-se de 1, e as transformações de Lorentz podem ser escritas como

$$x_J = x_M, \quad (20.49)$$

$$y_J \simeq y_M - v t_M, \quad (20.50)$$

$$z_J = z_M, \quad (20.51)$$

$$t_J \simeq t_M. \quad (20.52)$$

Assim, no limite, de velocidades baixas, os tempos nos dois referenciais tornam-se aproximadamente iguais e as transformações espaciais coincidem com as transformações de Galileu, usadas na mecânica clássica.

É muito importante enfatizar que o fato de as TL ficarem parecidas com as transformações de Galileu no limite  $v \ll c$  não significa que a física clássica seja um caso particular da relatividade. Os significados físicos das duas transformações são diferentes. Na relatividade, as transformações de Galileu são um limite, uma aproximação, enquanto que na mecânica clássica elas são a própria expressão da realidade. Por outro lado, na relatividade, a expressão da realidade está contida em seus dois princípios: a equivalência de todos os referenciais, e a invariância da velocidade da luz em todos eles. Na mecânica clássica, a proposta de realidade assume a forma de espaço e tempo absolutos e totalmente independentes um do outro. Estas diferenças distinguem fundamentalmente uma concepção da outra.

### • referência

[1] H. Minkowski, Space and Time, em “The principle of relativity”, Dover, 1952, pag. 73.

### • exercícios

1. Quais das situações seguintes correspondem a eventos, no âmbito da relatividade: o

pingo de um  $i$ , colocar o pingo num  $i$ , um carro, entrar num carro, a existência de um carro numa garagem?

**2.** Do ponto de vista matemático, porque as transformações não lineares de coordenadas não são compatíveis com a homogeneidade do espaço e a uniformidade do tempo?

**3.** Escreva as transformações de Lorentz que relacionam as coordenadas dos sistemas de Ana e de Pedro, sendo que Pedro se move em relação a Ana com velocidade  $-v$ , segundo o eixo  $z$ .

# Capítulo 21

## transformações de Lorentz: o tempo

### • cinemática relativística

Nesta aula e na próxima, discutimos aplicações das transformações de Lorentz. Apesar das diferenças entre as várias situações abordadas, existe um padrão comum entre todas elas: a comparação das observações, feitas em referenciais diferentes, de um *mesmo* conjunto de eventos.

A nossa educação em mecânica clássica ocorre desde o ensino médio e é bastante forte no ensino superior. Ao longo desse processo, construímos uma intuição acerca da cinemática, baseada em relações entre grandezas espaciais e temporais. Entretanto, algumas delas só valem na mecânica clássica. E, por isso, essa intuição não pode ser transferida para o contexto da relatividade.

Todo problema de relatividade envolve apenas *relações entre eventos* e as suas soluções podem ser obtidas através de um procedimento sistemático com os seguintes passos:

**passo 1.** Identificar e rotular os eventos importantes do problema. Por exemplo, no caso da aula anterior, escrever algo do tipo: evento E, o grão de poeira é iluminado pela frente de onda.

**passo 2.** Escolher um evento qualquer como origem espaço-temporal em todos os referenciais.

**passo 3.** Extrair, a partir das informações fornecidas pelo problema, as 4 coordenadas espaço-temporais de cada evento, em cada um dos referenciais.

Se os referenciais forem  $S_M$  e  $S_J$ , escrevemos

$$\text{evento E} \quad \left\{ \begin{array}{l} S_M : (x_M^E, y_M^E, z_M^E; t_M^E) \\ S_J : (x_J^E, y_J^E, z_J^E; t_J^E) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (21.1) \\ (21.2) \end{array}$$

e existem oito valores a serem determinados. Pelo menos quatro deles precisam ser extraídos da situação física dada e não precisam ser, necessariamente, de um único referencial. Por exemplo, o problema pode ser resolvido se formos capazes de extrair  $x_M^E, y_M^E, z_M^E$  e  $t_M^E$  a partir do enunciado.

**passo 4.** Usar as transformações de Lorentz para obter as quatro coordenadas desconhecidas de um dado evento a partir das quatro coordenadas já conhecidas daquele mesmo evento.

**passo 5.** Repetir esse procedimento para todos os eventos importantes do problema.

**passo 6.** Analisar fisicamente as relações entre os eventos importantes. A partir do conhecimento das coordenadas espaço-temporais de cada evento, em cada um dos referenciais, podemos reconstruir as relações entre eles e as maneiras como os dois observadores percebem os fenômenos. Esta forma de pensar aparece em todos os problemas que discutimos a seguir.

### • exemplo 1: duas bombas

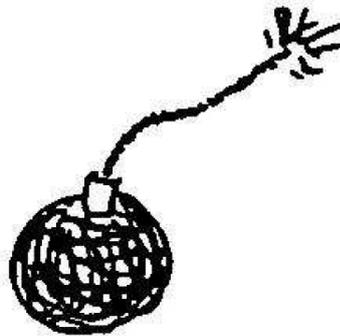


Figura 21.1: Uma bomba...

Existem duas bombas idênticas, com pavios de igual tamanho, que levam um tempo  $\tau$  para explodir quando estão em repouso. Ou seja,  $\tau$  representa o tempo próprio de explosão de cada bomba. Maria, em São Paulo, acende os pavios das duas simultaneamente. No mesmo instante em que as bombas são acesas, João passa de carro, toma a bomba número 2 e a leva, com uma velocidade  $v$  constante, para a uma cidade à direita de São Paulo. O objetivo deste exemplo é determinar as coordenadas espaço-temporais das explosões das duas bombas, observadas nos referenciais  $S_M$  e  $S_J$ .

Inicialmente, listamos os principais eventos, bem como suas *descrições* nos dois referenciais. Adotamos, como origem espaço-temporal dos dois referenciais, o acionamento das duas bombas, que coincide com a passagem de João por Maria, e que o movimento relativo se dê ao longo dos eixos  $y$  dos dois referenciais.

**evento a** - acendimento das duas bombas e passagem de João por Maria, tomando como referência nos dois referenciais:

$$\text{evento a } \left\{ \begin{array}{l} S_M : (0, 0, 0; 0), \\ S_J : (0, 0, 0; 0), \end{array} \right. \quad (21.3)$$

$$S_J : (0, 0, 0; 0), \quad (21.4)$$

**evento b** - explosão da bomba 1, estacionária em relação a Maria:

$$\text{evento b } \left\{ \begin{array}{l} S_M : (0, 0, 0; \tau), \\ S_J : (x_J^b, y_J^b, z_J^b; t_J^b) \end{array} \right. \quad (21.5)$$

$$S_J : (x_J^b, y_J^b, z_J^b; t_J^b) \quad (21.6)$$

**evento c** - explosão da bomba 2, estacionária em relação a João:

$$\text{evento c } \left\{ \begin{array}{l} S_M : (x_M^c, y_M^c, z_M^c; t_M^c), \\ S_J : (0, 0, 0; \tau) \end{array} \right. \quad (21.7)$$

$$S_J : (0, 0, 0; \tau) \quad (21.8)$$

Estas expressões incorporam o fato que os dados do problema permitem-nos conhecer diretamente as coordenadas espaço-temporais das explosões da bomba 1, em relação ao referencial  $S_M$ , e da bomba 2, no referencial  $S_J$  que são dadas pelas eqs (21.5) e (21.8).

Neste ponto, ainda não conhecemos os valores das coordenadas das eqs. (21.6) e (21.7), que serão determinadas com o auxílio das transformações de Lorentz. Para obter as coordenadas do evento  $b$  no referencial  $S_J$ , usamos as transformações  $S_M \rightarrow S_J$ , eqs.(20.24)-(20.27) e, depois das contas, obtemos

$$(x_J^b, y_J^b, z_J^b; t_J^b) = (0, -\gamma v \tau, 0; \gamma \tau). \quad (21.9)$$

Já para obter as coordenadas do evento  $c$  no referencial  $S_J$ , usamos as transformações  $S_J \rightarrow S_M$ , eqs.(20.32)-(20.35), que levam a

$$(x_M^c, y_M^c, z_M^c; t_M^c) = (0, \gamma v \tau, 0; \gamma \tau). \quad (21.10)$$

Incorporando esses resultados nas eqs. (21.6) e (21.7), obtemos as descrições das duas bombas nos dois referenciais, como

**evento b** - explosão da bomba 1, estacionária em relação a Maria:

$$\text{evento b } \left\{ \begin{array}{l} S_M : (0, 0, 0; \tau), \\ S_J : (0, \gamma v \tau, 0; \gamma \tau), \end{array} \right. \quad (21.11)$$

$$S_J : (0, \gamma v \tau, 0; \gamma \tau), \quad (21.12)$$

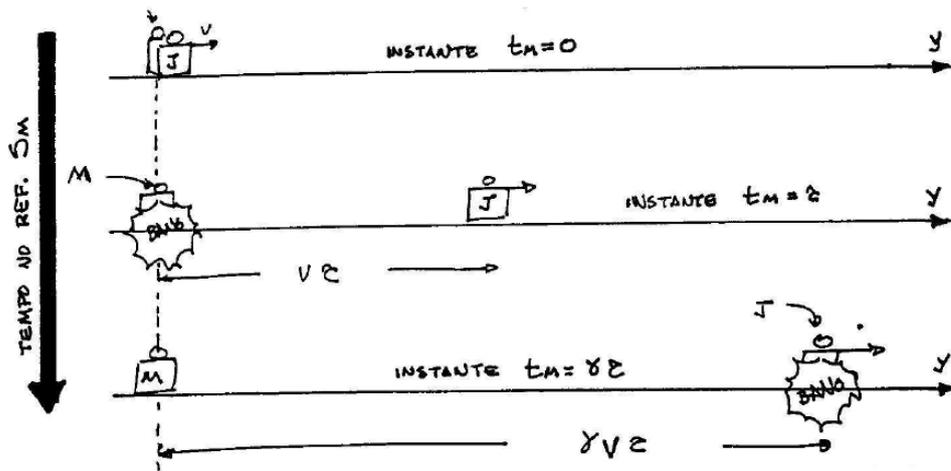


Figura 21.2: A sucessão de eventos no referencial de Maria.

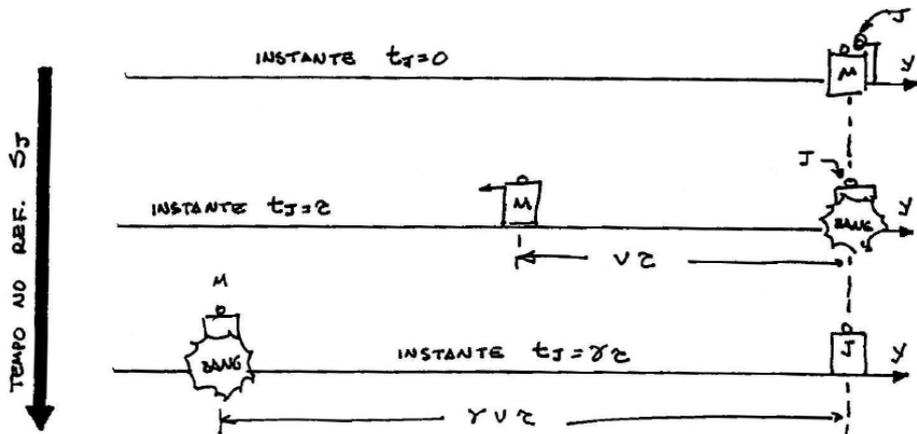


Figura 21.3: A sucessão de eventos no referencial de João.

**evento c** - explosão da bomba 2, estacionária em relação a João:

$$\text{evento c} \begin{cases} S_M : (0, -\gamma v \tau, 0; \gamma \tau), & (21.13) \\ S_J : (0, 0, 0; \tau), & (21.14) \end{cases}$$

Estes resultados permitem-nos reconstituir os acontecimentos nos dois referenciais. Começamos pelo referencial  $S_M$ , mostrado na figura 21.2. A ordem dos eventos neste referencial é determinada pelos valores ds coordenadas  $tm$ . Como  $\gamma > 1$ , temos  $t_M^a < t_M^b < t_M^c$  e, portanto, inicialmente, ocorre o acendimento dos pavios, em  $(0, 0, 0; 0)$ , em seguida, a explosão da bomba de Maria, em  $(0, 0, 0; \tau)$  e, finalmente, a explosão da bomba de João, em  $(0, 0, \gamma v \tau; \gamma t)$ . Assim, no referencial  $S_M$  as duas bombas, apesar de serem idênticas, não explodem simultaneamente. E a bomba 2, em movimento em relação a  $S_M$ , demora mais para explodir do que a que ficou em repouso.

No referencial  $S_J$ , o ordenamento das coordenadas temporais é dado por  $t_J^a < t_J^c < t_J^b$  e as duas bombas não explodem simultaneamente. Além disso, agora, os resultados obtidos a partir das transformações de Lorentz indicam que a bomba 2 explode antes da bomba 1 e os eventos se sucedem como na figura 21.3.

Os resultados que descrevem os eventos  $b$  e  $c$  nos dois referenciais podem dar margem a muitas reflexões, algumas das quais discutimos a seguir.

### • dilatação do tempo

As expressões (21.11)-(21.14) indicam que as descrições das duas explosões, nos dois referenciais, são totalmente equivalentes. A única diferença formal está associada ao sinal da velocidade relativa  $v$ , que é arbitrário. De modo geral, nem sempre as relações entre eventos de um problema podem ser enquadrados como indicando a ocorrência de *dilatação do tempo*. Entretanto, neste exemplo, isso pode ser feito, porque a bomba 2, que se move em relação a  $S_M$ , está em repouso em  $S_J$  e a bomba 1, que se move em relação a  $S_J$ , está em repouso em relação a  $S_M$ . Foi por esse motivo que pudemos falar em *tempo próprio* desde o início do problema. Neste exemplo, em cada um dos referenciais, a bomba que está em repouso explode antes da que se move.

### • a realidade dos efeitos

Os efeitos descritos neste exemplo podem, em princípio, ser observados. A ressalva *em princípio* foi colocada porque, com a tecnologia disponível atualmente, não podemos estudar os efeitos relativísticos em explosões de bombas reais. Ainda assim, a dilatação do tempo é um efeito *real* e não, aparente. Mesmo sem sair do seu referencial, Maria pode constatar isso. Ao explodir, a bomba 2, carregada por João, pode deixar na estrada uma cratera, real e objetiva, cuja posição pode ser medida por Maria. Como ela conhece a velocidade de João, ela pode calcular, facilmente que, em  $S_M$ , a bomba 2 explodiu no instante  $\gamma\tau > \tau$ .

### • a ordem dos eventos

Neste exemplo, aparece um efeito que é muito típico da relatividade e que perturba a nossa intuição clássica: a ordem temporal das explosões depende do referencial. Na relatividade, a ordem de dois eventos pode depender do referencial, desde que não haja *relação causal* entre eles. Ou seja, se a ocorrência de um deles não puder influenciar a ocorrência do outro.

No caso das duas bombas, essa questão corresponde, no referencial  $S_M$ , a determinar se a explosão da bomba 1 pode, ou não, influenciar a explosão da bomba 2. Isso seria possível se, por exemplo, o pavio da bomba 2 pudesse ser cortado por meio de um dispositivo acionado pela luz emitida pela bomba 1, ao explodir. Nesse cenário, a explosão da bomba 1 impediria a explosão da bomba 2.

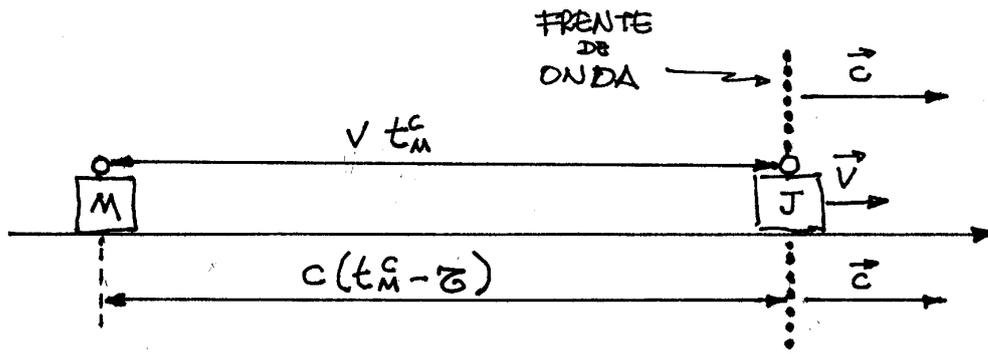


Figura 21.4: A luz produzida pela bomba 1 pode atingir João em  $S_M$ ?

Para estudar se isso é possível, consideramos um quarto evento  $d$ , que corresponde à luz emitida na explosão da bomba 1 atingir João. A figura 21.4 permite-nos expressar as coordenadas desse evento em  $S_M$ , em função de  $t_M^d$ , como

$$S_M : (0, v t_M^d, 0, t_M^d) \quad (21.15)$$

O instante  $t_M^d$  é obtido a partir da condição de encontro entre João e a frente de luz e é dado por

$$t_M^d = \frac{1}{1 - v/c} \tau. \quad (21.16)$$

Para determinar a possibilidade de relação causal entre os eventos  $b$  e  $c$ , comparamos os instantes  $t_M^c$  e  $t_M^d$ . Usando as eqs. (21.13) e (21.16), escrevemos

$$\frac{t_M^b}{t_M^d} = \frac{\gamma}{1/(1 - v/c)} = \frac{\sqrt{1 - v/c}}{\sqrt{1 + v/c}} < 1. \quad (21.17)$$

Esse resultado indica que a explosão da bomba 2 ocorre, necessariamente, antes que o sinal luminoso proveniente da bomba 1 chegue até João. Ou seja, a explosão da bomba 1 não pode alterar o destino da bomba 2 e, portanto, não pode haver relação causal entre esses dois eventos.

### • exemplo 2: fotos de um relógio em movimento

João viaja num trem, referencial  $S_J$ , que se desloca para a direita, ao longo do eixo  $y$ , com velocidade  $v = 3c/5$  em relação ao solo, e carrega um relógio branco. O trem passa por uma estação, referencial  $S_M$ , onde Maria posicionou quatro máquinas fotográficas e, em frente a cada uma delas, um relógio preto, idêntico ao de João. Esses relógios são digitais, têm forma de lâmina, e dois mostradores verticais, localizados em faces opostas, como se pode ver na figura 21.5. Eles foram construídos deste modo para que duas pessoas, uma em frente à outra, possam observar sua marcação simultaneamente.

As máquinas fotográficas de Maria estão separadas umas das outras, por uma distância  $L$ . Neste problema vamos supor que  $L = 108 \times 10^8 \text{m}$ , ou seja,  $L = 10,8$  milhões de km.

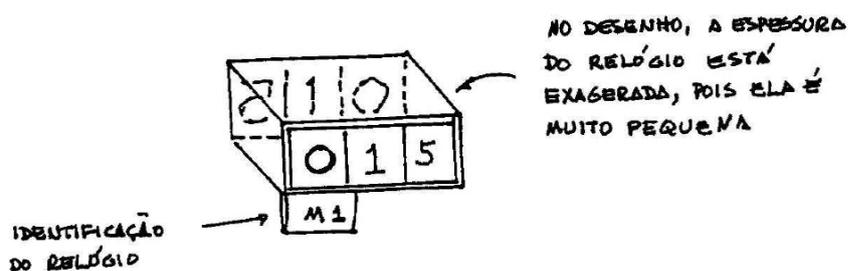


Figura 21.5: Um relógio digital com duas faces.

Esta não é uma distância fácil de imaginar, mas é o preço a ser pago para que possamos obter efeitos “observáveis” na escala de tempo de nossa vida diária, em segundos ou minutos.

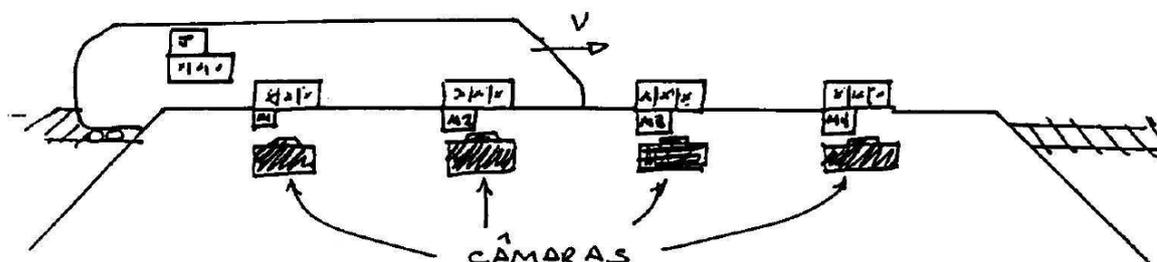


Figura 21.6: O arranjo experimental, no referencial  $S_M$ .

No referencial  $S_M$ , os relógios estão sincronizados, marcando os quatro exatamente a mesma hora. Cada máquina fotográfica é acionada independentemente, pela passagem de João e, no momento em que ele passa em frente a uma dada máquina, ela fotografa conjuntamente o relógio branco do trem e aquele na estação que está em frente a ela. Assim, relógio branco de João é sucessivamente fotografado por cada uma das quatro máquinas, mostradas na figura 21.6, juntamente com os relógios pretos p1, p2, p3 e p4.

O objetivo deste exemplo é determinar o que mostram as quatro fotografias. Por isso, inicialmente, explicitamos os quatro eventos importantes a considerar: a - foto dos relógios branco e preto 1; b - foto dos relógios branco e preto 2; c - foto dos relógios branco e preto 3; d - foto dos relógios branco e preto 4.

Em seguida, escolhemos um desses eventos como o de referência. Como o único critério a ser seguido é o da conviniência, escolhemos o evento *a* como referência. Neste caso, podemos representar os vários eventos importantes como

**evento a** - foto dos relógios: branco e preto 1, adotado como referência

$$\text{evento a} \left\{ \begin{array}{l} S_M : (0, 0, 0; 0), \\ S_J : (0, 0, 0; 0) \end{array} \right. \quad (21.18)$$

$$(21.19)$$

**evento b** - foto dos relógios branco e preto 2

$$\text{evento b} \left\{ \begin{array}{l} S_M : (0, L, 0; L/v), \\ S_J : (x_J^b, y_J^b, z_J^b; t_J^b) \end{array} \right. \quad (21.20)$$

$$(21.21)$$

**evento c** - foto dos relógios branco e preto 3

$$\text{evento c} \left\{ \begin{array}{l} S_M : (0, 2L, 0; 2L/v), \\ S_J : (x_J^c, y_J^c, z_J^c; t_J^c) \end{array} \right. \quad (21.22)$$

$$(21.23)$$

**evento d** - foto dos relógios branco e preto 4

$$\text{evento d} \left\{ \begin{array}{l} S_M : (0, 3L, 0; 3L/v), \\ S_J : (x_J^d, y_J^d, z_J^d; t_J^d) \end{array} \right. \quad (21.24)$$

$$(21.25)$$

As coordenadas dos eventos em  $S_M$  foram extraídas diretamente do enunciado do problema, enquanto que as em  $S_J$  foram tratadas como incógnitas, a serem determinadas por meio das  $TL S_M \rightarrow S_J$ .

No caso do evento b, as eqs. (20.24) e (20.26) fornecem, imediatamente,  $x_J^b = 0$  e  $z_J^b = 0$ . O uso da eq. (20.25) produz  $y_J^b = \gamma(L - L) = 0$ , um resultado esperado, já que o relógio branco permanece sempre na origem do sistema  $S_J$ . Para determinar  $t_J^b$ , usamos a eq. (20.27) e escrevemos

$$t_J^b = \gamma \left( \frac{L}{v} - \frac{vL^2}{c^2} \right) = \frac{L}{\gamma v}. \quad (21.26)$$

As coordenadas espaço temporais dos demais eventos são determinados de modo análogo, e obtemos

$$\text{evento b} \left\{ \begin{array}{l} S_M : (0, L, 0; L/v), \\ S_J : (0, 0, 0; \frac{L}{\gamma v}) \end{array} \right. \quad (21.27)$$

$$(21.28)$$

$$\text{evento c} \left\{ \begin{array}{l} S_M : (0, 2L, 0; 2L/v), \\ S_J : (0, 0, 0; \frac{2L}{\gamma v}) \end{array} \right. \quad (21.29)$$

$$(21.30)$$

$$\text{evento d} \left\{ \begin{array}{l} S_M : (0, 3L, 0; 3L/v), \\ S_J : (0, 0, 0; \frac{3L}{\gamma v}) \end{array} \right. \quad (21.31)$$

$$(21.32)$$

- as fotografias

Estes resultados permitem-nos determinar o que mostram as quatro fotografias. Para simplificar a discussão, supomos que João e Maria tenham combinado o experimento de modo que, no instante em que o relógio do trem estivesse em frente ao relógio M1 da estação, este relógio e o de João deveriam começar a marcar o tempo. Assim, a primeira foto dos dois relógios, correspondente ao evento a, seria a mostrada na Fig. 21.7.

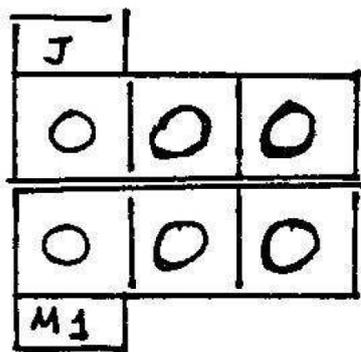


Figura 21.7: Foto dos relógios branco e preto 1, tirada em  $S_M$ ; a bem da simplicidade, nesta figura não representamos a contração do relógio branco.

O valor de  $\gamma$  é sempre maior do que 1 e, portanto, para cada um dos demais eventos, a marcação do relógio branco é *menor* que os que estão em  $S_M$ , como indicam os resultados (21.27) - (21.32). Isso corresponde à dilatação do tempo de João, quando observado em  $S_M$ . Usando os números do problema temos, com as unidades do sistema internacional (SI):  $v = 3c/5 = 1,8 \times 10^8$  m/s,  $t_M^b = L/v = 108 \times 10^8 / 1,8 \times 10^8 = 60$  s e  $t_J^b = t_M^b \times \frac{4}{5} = 48$  s. Os instantes dos eventos 3 e 4 nos dois referenciais, obtidos de modo totalmente análogo, são:  $t_M^c = 2L/v = 120$  s,  $t_J^c = t_M^c \times \frac{4}{5} = 96$  s,  $t_M^d = 3L/v = 180$  s e  $t_J^d = t_M^d \times \frac{4}{5} = 144$  s. Assim, as demais fotos mostrariam as situações da figura 21.8. Se as condições tecnológicas permitissem que estas fotos fossem efetivamente tiradas a partir do referencial  $S_M$ , elas constituiriam evidências concretas de que as marcações dos relógios seria diferentes.

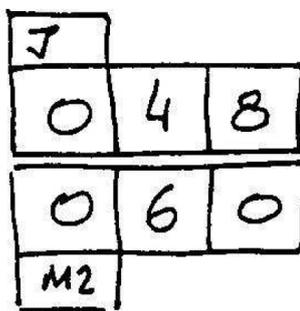


Figura 21.8: Fotos dos relógios branco e preto 2, branco e preto 3 e branco e preto 4, tiradas em  $S_M$ .

- a dilatação do tempo e o relógio

Consultando a segunda foto, evento b, mostrada na Fig. 21.8, vemos que  $t_M^b = 60$  s e  $t_J^b = 48$  s. O fato de  $t_M^b$  ser maior do que  $t_J^b$  indica que o tempo marcado pelo relógio J aparece dilatado ou contraído para Maria?

Poderíamos ser tentados a pensar que o tempo de João se contraiu, já que 48 é menor do que 60. Entretanto, esta maneira de encarar o problema é incorreta. Entre os dois mesmos eventos passaram-se 60 s no relógio p2 e 48 s no relógio branco. Ou seja, passaram-se 12 unidades de tempo a mais p2, o que corresponde a mais tempo em  $S_M$  do que  $S_J$ , entre esses dois mesmos eventos. Isso significa que o relógio branco, visto em  $S_M$ , *funciona mais devagar* do que os que ela possui. Por exemplo, se João piscar os olhos uma vez a cada 8 s, ele piscará 6 vezes entre uma foto e outra. Em  $S_M$ , por outro lado, estas 6 piscadas levam 60 s para ocorrer, indicando que, neste referencial, João pisca uma vez a cada 10 s. Isso significa que os processos determinados pelo relógio branco aparecem como sendo mais lentos em  $S_M$ . Isso vale, inclusive, para a mudança do marcador do relógio. Assim, a *dilatação* do tempo corresponde à ideia de que um observador vê o funcionamento de um relógio que se move em relação a ele ocorrer mais devagar quanto maior for a sua velocidade.

### • a uniformidade do tempo

A uniformidade do tempo, ou seja a noção que o tempo passa “sempre” com a mesma “velocidade”, é muito importante em física e, por isso, é importante saber se ela é alterada no contexto da relatividade restrita. A tabela abaixo mostra os resultados das quatro fotos. Ela mostra que o *intervalo* entre dois eventos sucessivos, observado em cada um

foto	1	2	3	4
$t_J(s)$	0	48	96	144
$t_M(s)$	0	60	120	180

dos referenciais é sempre o mesmo: 48 s em  $S_J$  e 60 s em  $S_M$ . O relógio branco de João, é visto em  $S_M$  como funcionando sempre com a mesma “velocidade” e existe sempre uma razão constante entre os intervalos de tempo observados por ambos. Esta razão é dada pelo fator de conversão  $\gamma$  que, no nosso exemplo, vale  $5/4$ . Em resumo, em  $S_M$ , o relógio de João funciona sempre com o mesmo ritmo, ainda que mais lento do que o ritmo dos seus próprios relógios.

### • as fotos tiradas por João

Como os relógios empregados neste exemplo têm duas faces, os encontros entre o branco, de João, e os pretos, fixos em  $S_M$ , também poderiam ter sido fotografados por João. A figura 21.9 oferece duas possibilidades sobre os resultados de fotos do evento b. Antes de prosseguir, pense um pouco: qual delas você considera a correta?

A opção correta é a (a). Como os dois lados dos relógios são idênticos, as fotos tiradas a partir de lados opostos também tem de ser idênticas. Ou seja, cada foto registra, de modo objetivo, o que está em frente a ela e não pode ser determinada pelo referencial a partir do qual ela foi tirada. Conseqüentemente, as fotos tiradas por João devem ser as mesmas mostradas na fig. 21.8, a menos de distorções provocadas pela contração do espaço, iguais às tiradas por Maria. Este resultado pode parecer estranho, mas é preciso lembrar que as fotos registram os *mesmos* eventos, os encontros dos relógios, dois a dois. O fato de cada câmara estar em lados opostos de um dado par de relógios não faz a mínima diferença. Uma foto é um registro objetivo de um evento, um documento. Assim, um dia, João poderia descer do trem, encontrar Maria e comparar as duas fotos de um evento. E elas teriam de mostrar a mesma marcação do tempo.

### • exemplo 3: a simetria da dilatação do tempo

No título deste exemplo, usamos a expressão “*dilatação do tempo*” apenas porque ela é popular e recorrente. Entretanto, essa ideia não pode ser usada indiscriminalmente em problemas de relatividade. Em algumas situações ela é boa e, em outras, não. Este exemplo é apresentado com o propósito de discutir essa questão.

Ana e Maria viajam numa enorme nave espacial, referencial  $S_M$ , e cruzam, a uma velocidade  $v = 3c/5$ , com uma outra nave, onde estão João e Zé como mostra a figura 21.10. Em ambas as naves, cada passageiro possui um relógio de duas faces, semelhante ao do exemplo anterior e, *em cada uma das naves*, os relógios estão sincronizados entre si. Além disso, cada pessoa possui uma máquina fotográfica, colocada de modo a poder fotografar simultaneamente o seu relógio e o do passageiro da outra nave, que está à sua frente num dado instante. Os vários passageiros estão dispostos nas naves de modo que, *no referencial  $S_M$* , tanto a distância entre Ana e Maria como a distância entre João e Zé são iguais a  $L = 1,8 \times 10^9$  m.

Para facilitar a discussão supomos, também, que os relógios sejam coloridos, com a seguinte correspondência: João  $\rightarrow$  roxo (r); Zé  $\rightarrow$  laranja (l); Maria  $\rightarrow$  preto (p); Ana  $\rightarrow$  verde (v).

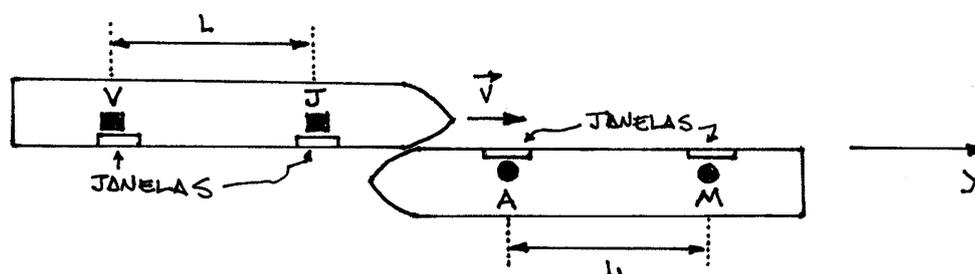


Figura 21.9: As duas naves, vistas no referencial  $S_M$ ; os homens são representados por quadradinhos e as mulheres, por bolinhas.

O objetivo deste exemplo é mostrar que a dilatação do tempo ocorre simetricamente

nos referenciais  $S_M$  e  $S_J$  e, para tanto, consideramos três eventos, que correspondem aos encontros de João com Ana, de João com Maria e de Ana com Zé. Ou seja, os encontros do viajante mais à frente de cada uma das naves com os dois outros personagens da outra. Tomando o primeiro deles como referência, e extraíndo do enunciado as coordenadas dos outros dois em  $S_M$ , temos

**evento a** - encontro de João com Ana, tomado com referência

$$\text{evento a} \left\{ \begin{array}{l} S_M : (0, 0, 0; 0) \\ S_J : (0, 0, 0; 0) \end{array} \right. \quad (21.33)$$

$$(21.34)$$

**evento b** - encontro de Maria com João

$$\text{evento b} \left\{ \begin{array}{l} S_M : (0, L, 0; L/v) \\ S_J : (x_J^b, y_J^b, z_J^b; t_J^b) \end{array} \right. \quad (21.35)$$

$$(21.36)$$

**evento c** - encontro de Ana com Zé

$$\text{evento c} \left\{ \begin{array}{l} S_M : (0, 0, 0; L/v) \\ S_J : (x_J^c, y_J^c, z_J^c; t_J^c) \end{array} \right. \quad (21.37)$$

$$(21.38)$$

Para obter os valores das coordenadas em  $S_J$ , usamos as transformações de Lorentz, dadas pelas eqs.(20.24)-(20.27). No caso do evento  $b$ , temos

$$(x_J^b, y_J^b, z_J^b; t_J^b) = \left(0, 0, 0; \frac{L}{\gamma v}\right) \quad (21.39)$$

e o evento  $c$ , é determinado por

$$(x_J^c, y_J^c, z_J^c; t_J^c) = \left(0, -\gamma L, 0, \frac{\gamma L}{v}\right) \quad (21.40)$$

A interpretação dos resultados com base na idéia de dilatação do tempo envolve sutilezas importantes, e não simples. Como vimos na aula 18, a dilatação do tempo pode ser percebida a partir de um único referencial, quando o funcionamento de um *único* relógio, em movimento, é comparado com vários relógios, em repouso num outro referencial. No caso deste exemplo, esta situação ocorre com o relógio verde de Ana, que compara o seu funcionamento com os roxo de João e laranja de Zé e, também, com o relógio roxo de João, que compara o seu funcionamento com os verdes de Ana e preto de Maria. Antes de prosseguir, é importante relacionar a frase anterior com a fig. 21.10.

Consideremos, inicialmente, o relógio verde, carregado por Ana, em  $S_M$ . Nele decorre um intervalo de tempo próprio  $\Delta\tau_M^v = t_M^c - 0 = L/v$ , entre os encontros de Ana com João e Zé. Já no referencial  $S_J$ , o intervalo de tempo entre esses dois eventos é  $\Delta t_J^v = t_J^c - 0 = \gamma L/v$ . Usando esses resultados, podemos escrever

$$\Delta t_J^v = \gamma \Delta\tau_M^v > \Delta\tau_M^v, \quad (21.41)$$

o que indica que o tempo marcado pelo relógio de Ana é visto com dilatado no referencial  $S_J$ , dos homens.

A situação do relógio roxo é totalmente simétrica. O intervalo de tempo próprio decorrido entre os seus dois encontros com Ana e Maria, é  $\Delta\tau_J^r = t_J^b - 0 = L/\gamma v$ , enquanto que o tempo que passou entre os mesmos dois eventos no referencial  $S_M$  é dado por  $\Delta t_M^r = t_M^b - 0 = L/v$ . Assim,

$$\Delta t_M^r = \gamma \Delta\tau_J^r > \Delta\tau_J^r. \quad (21.42)$$

Este resultado indica que o relógio roxo é visto, pelas mulheres, como funcionando mais lentamente do que os que elas possuem.

Para tornar esta discussão um pouco mais concreta, vamos supor que, quando se encontram, cada personagem fotografa o próprio relógio e o do outro, o que é possível graças aos dois mostradores que cada relógio possui. As fotos envolvendo Ana e João aparecem nas figuras 21.11(a) e 21.12(a). Usando os resultados anteriores e os dados numéricos do problema, temos  $t_M^b = 10,0$  s,  $t_J^b = 8,0$  s,  $t_M^c = 10,0$ s e  $t_J^c = 12,5$  s e, assim, os encontros de Ana com Zé e de João com Maria correspondem às fotos mostradas nas figuras 21.11(b) e 21.12(b). Olhando estas figuras, podemos notar que o tempo do relógio verde, de Ana, é visto como dilatado pelos homens e que o tempo do relógio roxo, de João, é visto como dilatado pelas mulheres.

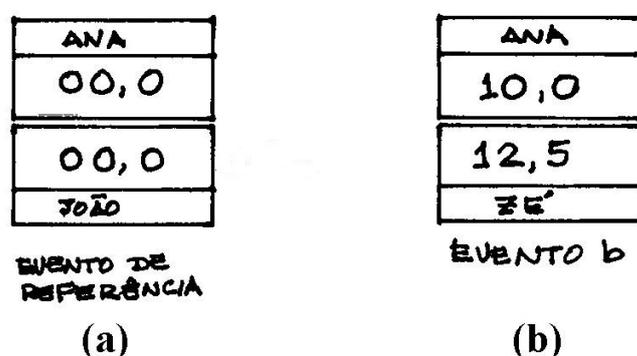


Figura 21.10: Ana é fotografada pelos homens.

Entre os eventos a, de referência e c, passam-se 10,0 s no relógio verde de Ana, 12,5 s no referencial dos homens, e o fator de escala é  $\gamma = 5/4$ . A outra dilatação pode ser percebida ao compararmos os intervalos de tempo entre os eventos de referência e b, vistos por João e pelas mulheres. Enquanto para João passam 8,0 s, no referencial  $S_M$  decorrem 10,0 s e o fator de escala também é  $\gamma = 5/4$ , idêntico ao anterior. Esta conclusão foi obtida a partir da comparação do relógio roxo de João com os preto e verde das mulheres.

A simetria exigida pelo primeiro princípio aparece: o funcionamento do relógio roxo é visto como dilatado pelas *mulheres*, e o funcionamento do relógio verde é visto como dilatado pelos *homens*. Há, portanto, uma simetria entre os dois referenciais.

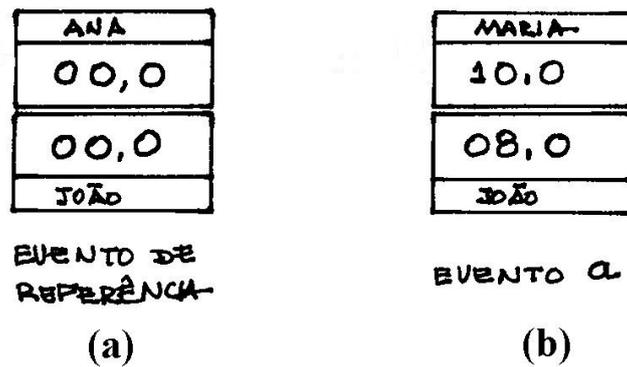


Figura 21.11: João é fotografado pelas mulheres.

### • exercícios

1. Considere a situação descrita no exemplo 1, supondo que as bombas levem 0,5s para explodir e que a velocidade de João em relação a Maria seja  $v = 4c/5$ .

a) Determine numericamente as posições e instantes das explosões das duas bombas nos dois referenciais.

b) Faça dois gráficos, colocando o eixo  $y$  na horizontal e o eixo  $t$  na vertical, representando os eventos nos referenciais de Maria e de João. Tente imaginar um filme, mostrando os acontecimentos nos dois referenciais.

2. No caso do exemplo 2, o que mostraria a foto de um quinto relógio, M5, situado à esquerda do relógio M1, e separado deste por uma distância  $L$ ?

3. No caso do exemplo 2, por que o tempo marcado pelo relógio de João aparece dilatado em  $S_M$ , mas os tempos dos relógios de Maria parecem não exibir uma dilatação quando observados por João? Afinal de contas, não deve existir, neste problema, uma *simetria* entre  $S_J$  e  $S_M$ ?

4. Considere novamente o exemplo 2, tome o evento  $c$  como referência e determine as coordenadas dos demais eventos.

5. Considere o encontro entre duas naves, representado na figura 21.10. No contexto da relatividade, este encontro pode ser considerado como um *único* evento? Ou, alternativamente, como um conjunto de eventos?

6. Considere a situação descrita no exemplo 3 e faça desenhos representando os relógios

de Ana, Maria, João e Zé quando:

- a) Ana e João se encontram, do ponto de vista do referencial  $S_M$ ;
- b) Ana e João se encontram, do ponto de vista do referencial  $S_J$ ;
- c) Ana e Zé se encontram, do ponto de vista do referencial  $S_M$ ;
- d) Ana e Zé se encontram, do ponto de vista do referencial  $S_J$ ;
- e) Maria e João se encontram, do ponto de vista do referencial  $S_M$ ;
- f) Maria e João se encontram, do ponto de vista do referencial  $S_J$ .

Para fazer este exercício, é importante lembrar que, na relatividade, a sincronização de relógio somente vale dentro de um referencial. Assim, a sincronização existente no interior de  $S_M$  não pode ser transferida automaticamente para a nave dos homens e, vice-versa.

7. Use os resultados do exercício anterior para explicar como é possível que os homens possam ver o tempo de Ana dilatado e, simetricamente, as mulheres possam ver o tempo de João dilatado.

8. Um foguete que se afasta da Terra com velocidade  $v$  emite, ao atingir a distância  $L$ , no referencial da Terra, um sinal luminoso em direção a ela.

- a) Calcule os instantes e posições da emissão e da recepção do sinal no referencial da Terra e no referencial do foguete.
- b) A partir do resultado do item anterior, calcule a velocidade da luz no referencial do foguete.

## • respostas

2.  $t_M = -L/v$ ,  $t_J = -L/(\gamma v)$ .

3. Neste problema, *não* existe uma simetria total entre João e Maria. É preciso notar que, em cada evento existe a comparação do *mesmo* relógio de João com um relógio *diferente* de Maria. Assim, o tempo do *relógio* de João é comparado com o tempo do *referencial* de Maria. Esse fato, sem importância no contexto da mecânica clássica, é responsável, na teoria da relatividade, por uma assimetria entre quem carrega o relógio e o outro referencial.

4. Evento  $a$  -  $S_M : (0, -2L, 0; -2L/v)$  e  $S_J : (0, 0, 0; -2L/\gamma v)$

evento  $b$  -  $S_M : (0, -L, 0; -L/v)$  e  $S_J : (0, 0, 0; -L/\gamma v)$

evento  $c$  -  $S_M : (0, 0, 0; 0)$  e  $S_J : (0, 0, 0; 0)$

evento  $d$  -  $S_M : (0, L, 0; L/v)$  e  $S_J : (0, 0, 0, L/\gamma v)$

5. Um conjunto de eventos. Em particular, na solução apresentada no texto, os encontros

Ana-João e Maria-Zé correspondem e são tratados como dois eventos distintos.

**6.** Observando as coordenadas espaço-temporais dos eventos notamos que, *no referencial dos homens*, os relógios de João e Zé estão sempre sincronizados, mas isso não acontece com os relógios das mulheres. O contrário acontece *no referencial das mulheres*: os relógios de Ana e Maria estão sincronizados, mas os dos homens, não. Essa situação decorre do fato de a simultaneidade entre eventos depender do referencial. Se uma série de relógios, distantes uns dos outros, ao longo da direção do movimento, estiverem sincronizados num dado referencial, eles certamente não o estarão num outro referencial, em movimento com relação ao primeiro.

**7.** Num dado instante, em  $S_M$ , os relógios das mulheres estão sincronizados, mas isso não acontece com os homens. Os tempos de *todos* os homens passam uniformemente, parecendo dilatados para as mulheres, e a dessincronização dos relógios não varia. Assim, por exemplo, o relógio de Zé, em  $S_M$ , está *sempre* 4,5 s adiantado em relação ao de João, e esta diferença se mantém inalterada à medida que o tempo passa.

**8.** a) Evento a - saída do foguete da Terra; tomado como referência:

$$S_T : [0, 0, 0; 0] \text{ e } S_F : [0, 0, 0; 0]$$

$$\text{evento b - emissão da luz: } S_T : \left[0, L, 0; \frac{L}{v}\right] \text{ e } S_F : \left[0, 0, 0; \frac{\gamma L}{v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right]$$

$$\text{evento c - chegada da luz à Terra: } S_T : \left[0, 0, 0; \frac{L}{v} + \frac{L}{c}\right] \text{ e } S_F : \left[0, -\gamma L \left(1 + \frac{v}{c}\right), 0; \frac{\gamma L}{v} \left(1 + \frac{v}{c}\right)\right]$$

$$\text{b) velocidade} = (y_F^c - y_F^b) / (t_P^c - t_P^b) = -c.$$

## Capítulo 22

# transformações de Lorentz: mais exemplos

### • exemplo 1: o problema dos dardos

João, viajando num trem de madeira, com velocidade  $v = 3/5c$ , passa por uma estação, onde se encontra Maria. Na plataforma ela colocou dois lançadores de dardos, separados pela distância  $L_M = 10m$ , e ligou cada um deles, por meio de fios de mesmo comprimento a um único interruptor, que permite lançar os dois dardos simultaneamente. No instante em que o trem passa pela estação, Maria aciona o disparador e os dardos cravam-se no trem, como mostra a Fig. 22.1.

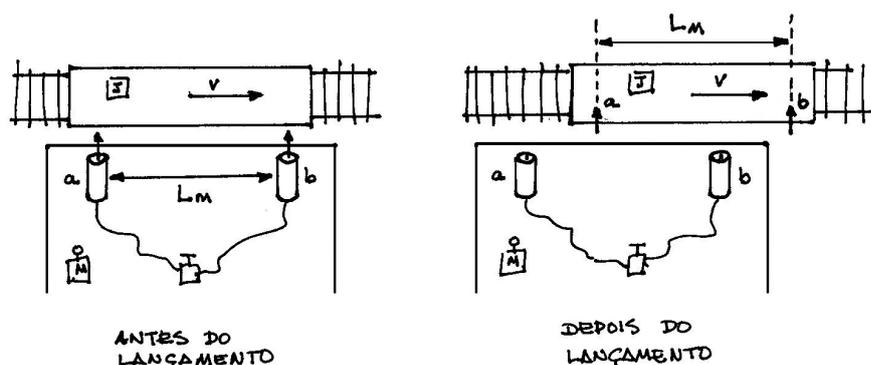


Figura 22.1: O problema, visto no referencial de Maria.

Posteriormente, o trem volta à estação e João desce dele. Na plataforma, João e Maria comparam a distância entre os dardos com aquela entre os disparadores. E constatam, objetivamente, que elas são diferentes, como indicado na Fig. 22.2. O propósito deste exemplo é obter a distância entre os dardos no referencial do trem e discutir as explicações dos acontecimentos nos dois referenciais.

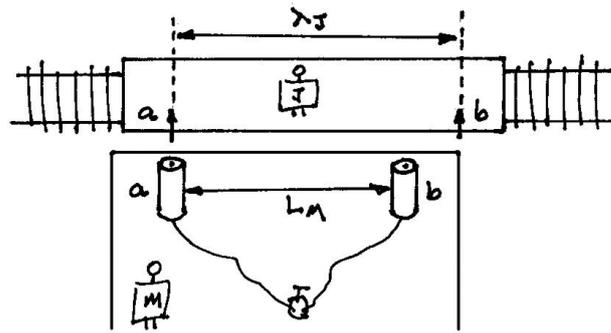


Figura 22.2: O trem está parado em relação à estação.

Neste problema ocorrem quatro eventos principais, as saídas dos dardos  $a$  e  $b$  da estação e as suas chegadas ao trem. Para simplificar um pouco as coisas, vamos supor que a distância entre os disparadores e o trem seja tão pequena, a ponto de podermos desprezar o intervalo de tempo entre a saída e a chegada de cada um dos dardos. Deste modo, precisamos considerar apenas dois eventos, os disparos dos dois dardos, e descrevê-los referenciais de  $S_J$  e  $S_M$ .

O evento  $a$ , o disparo do dardo  $a$ , é arbitrariamente escolhido como origem espaço-temporal dos dois referenciais. Além disso, no referencial  $S_M$ , os dois eventos ocorrem simultaneamente e a distância entre eles é conhecida. Temos, portanto

**evento  $a$** , de referência - disparo do dardo  $a$ :

$$\text{evento a} \qquad S_M : (0, 0, 0; 0) \qquad (22.1)$$

$$S_J : (0, 0, 0; 0) \qquad (22.2)$$

**evento  $b$**  - disparo do dardo  $b$ :

$$\text{evento b} \qquad S_M : (0, L, 0; 0) \qquad (22.3)$$

$$S_J : (x_J^b, y_J^b, z_J^b; t_J^b) \qquad (22.4)$$

As coordenadas do evento  $b$  no referencial de João são obtidas por meio das transformações de Lorentz:

$$(x_J^b, y_J^b, z_J^b; t_J^b) = (0, \gamma L, 0; -\gamma v L/c^2) . \qquad (22.5)$$

A distância entre os dardos no trem corresponde a um comprimento próprio  $\lambda_J$ , dado por  $\lambda_J = y_J^b - y_J^a = \gamma L_M$ . Usando os dados do problema, obtemos  $\lambda_J = 12,5\text{m}$ .

O nosso cálculo mostra portanto que no trem, a distância entre os dardos é de 12,5m. Quando o trem passa pela estação, esses 12,5m aparecem contraídos, para 10m, quando observados por Maria. Quando o trem pára e volta à estação, a distância entre os dardos

cravados no trem continua a ser 12,5m, como mostra a Fig. 22.7. O trem e os disparadores, colocados lado a lado, em repouso, constituem uma demonstração inequívoca da contração do espaço. Ela *não* é uma ilusão, ou uma falsa impressão de Maria. No contexto da Relatividade, Maria pode compreender a discrepância entre as distâncias entre os lançadores e os dardos cravados no trem recorrendo à noção de contração do espaço.

### a explicação de João

Como João, no trem, explica a situação da Fig. 22.2? Parte da sua explicação é que, em  $S_J$ , os dois dardos não atingem o trem simultaneamente. No seu referencial, há um intervalo de tempo entre os eventos  $a$  e  $b$ , dado por

$$\Delta t_J = t_J^b - t_J^a = -\gamma v L/c^2, \quad (22.6)$$

sendo que o sinal negativo indica que o evento  $b$  é anterior ao evento  $a$ . É importante notar que um tempo negativo não tem nada demais, ele é apenas o produto da nossa escolha arbitrária da origem dos tempos. O que acontece depois dessa origem é positivo, o que acontece antes, é negativo. O sinal indica, portanto, somente uma ordem relativa dos eventos, nada mais. Se o ano atual fosse adotado como origem da contagem de tempo você, provavelmente, teria nascido por volta do ano -20: qual o problema?

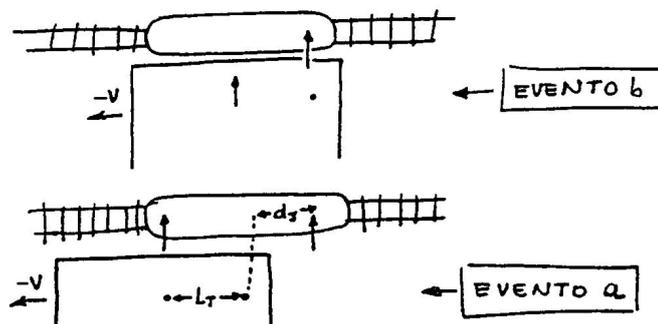


Figura 22.3: Os eventos no referencial de João, onde o trem não se move.

No referencial  $S_J$ , o dardo  $b$  é lançado, a estação se desloca para a esquerda uma distância  $d_J = \gamma L_M v^2/c^2$  e, em seguida, o dardo  $a$  é lançado. Esta situação está representada na Fig. 22.3.

Sabemos que a distância entre os lançadores de dardos, na estação, é  $L_M$ . Quando vista do trem, entretanto, essa distância aparece contraída, pois a estação está em movimento, e ela vale  $L_M/\gamma$ .

Assim, João explica a distância entre os dardos no seu referencial através da soma

$$\lambda_J = \frac{L_M}{\gamma} + \gamma L_M \frac{v^2}{c^2} = \gamma L_M. \quad (22.7)$$

Ou seja, distância entre os dardos, no trem, é dada por  $\lambda_J$ , igual à distância entre os dois lançadores, vista do trem, somada à distância percorrida pela estação entre os dois eventos. Usando os dados do problema, a explicação de João para os seus 12,5 m contra os 10 m de Maria é a seguinte: para ele os 10m de Maria aparecem contraídos para 8 m. Além disso, os disparos dos dois dardos não são simultâneos, e a estação se move 4,5 m durante esse tempo. Logo, os seus 12,5 m são iguais a 8 m somados a 4,5 m.

Neste exemplo, podemos ver o primeiro princípio da relatividade em ação: os dois observadores, João e Maria, são indistinguíveis e qualquer um deles é capaz de explicar satisfatoriamente a relação entre dois eventos. Entretanto, cada observador produz uma explicação apropriada ao seu ponto de vista.

• **exemplo 2: simultaneidade**

São dados dois trens compridos,  $D$  e  $E$ , ao longo dos quais existem muitos relógios digitais, dispostos como na Fig. 22.4. Os relógios de *cada um* dos trens estão sincronizados *entre si*. Os trens  $D$  e  $E$  viajam, respectivamente, com velocidades  $v\vec{j}$ , para a direita, e  $-v\vec{j}$ , para a esquerda, por uma ferrovia retilínea, composta por dois pares de trilhos paralelos. Na região onde os trens se cruzam existe uma "ilha", entre os trilhos, sobre a qual estão dispostas quatro câmeras fotográficas, localizadas nos pontos  $A$  e  $B$ , representadas na Fig. 22.5. No referencial do solo,  $S_S$ , os dois pares de câmeras estão separados pela distância  $L$  e podem ser acionados simultaneamente, por meio de impulsos elétricos transmitidos por cabos de comprimentos iguais, ligados a um único interruptor  $I$ , equidistante deles.

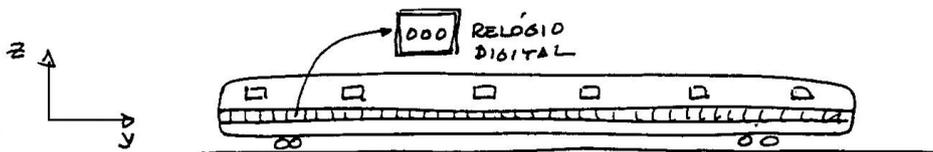


Figura 22.4: Relógios dispostos ao longo de um trem.

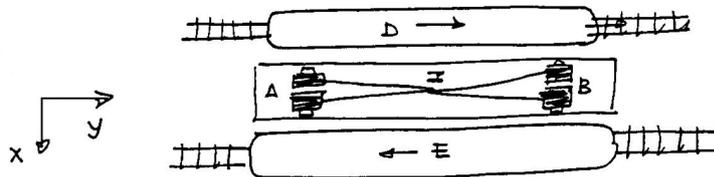


Figura 22.5: Fotos dos trens que se cruzam, no referencial do solo.

Num dado instante, as quatro câmeras são acionadas e cada uma delas fotografa o relógio do trem que está exatamente em frente a ela. No referencial do solo, estas quatro fotos são simultâneas, por construção. O nosso problema consiste, agora, em determinar

as marcações dos relógios dos dois trens. Para tanto, tomamos como evento de referência as duas fotos feitas no ponto  $A$  e, lembrando que estamos tratando com três referenciais, escrevemos

**evento  $a$** , de referência - fotos das câmeras localizadas em  $A$

$$\text{evento a} \quad S_s : (0, 0, 0; 0) \quad (22.8)$$

$$S_D : (0, 0, 0; 0) \quad (22.9)$$

$$S_E : (0, 0, 0; 0) \quad (22.10)$$

**evento  $b$**  - fotos das câmeras localizadas em  $B$

$$\text{evento b} \quad S_s : (0, L, 0; 0) \quad (22.11)$$

$$S_D : (0, \gamma L, 0; -\gamma v L/c^2) \quad (22.12)$$

$$S_E : (0, \gamma L, 0, +\gamma v L/c^2) \quad (22.13)$$

sendo que as coordenadas do evento  $b$ , nos referenciais dos trens  $D$  e  $E$ , foram obtidas a partir das transformações de Lorentz das (22.12).

No referencial  $S_D$ , a foto em  $B$  é *anterior* à foto em  $A$ . Já no trem  $E$ , a foto em  $B$  é *posterior* à foto em  $A$ . Assim, os eventos simultâneos em  $S_s$ , deixam de sê-lo em outros referenciais, que se movem em relação ao solo. Estes resultados indicam, também, que a ordem dos eventos depende da velocidade relativa. Isso pode parecer espantoso, do ponto de vista da intuição clássica.

## causalidade

Os resultados discutidos neste exemplo podem gerar uma dúvida perturbadora: se a ordem de dois eventos pode ser invertida somente pelo fato de invertermos o sentido do movimento de um observador, então será que a causa de um fenômeno físico pode virar efeito e esse efeito aparecer antes da causa? Será que, na relatividade, não vale mais o princípio da causalidade?

Isto não acontece e a relatividade mantém a noção de causalidade! Nesta teoria, causas e efeitos podem estar relacionados apenas por trocas de informações que se propaguem com velocidades iguais ou menores que a da luz. Em particular, eventos que ocorrem num mesmo ponto do espaço nunca podem ter a sua ordem temporal invertida. Mesmo na Relatividade, seu pai nunca poderia ter nascido antes de você.

No caso do presente exemplo, um raio de luz não viaja suficientemente rápido para que as fotos no ponto  $A$  possam influenciar as fotos no ponto  $B$  e, por isso, as fotos nos dois pontos não têm e nem podem ter correlação direta entre si. A simultaneidade entre elas no referencial da Terra pode ser considerada como uma espécie de coincidência e a ordem delas pode ser alterada por uma mudança de referencial.

• exemplo 3: sinais luminosos



Figura 22.6:

Desde o ano passado, Maria trabalha em um posto de gasolina, situado ao lado de uma estrada retilínea e muito longa. Ao longo da estrada, a uma distância  $L$  do posto, em  $S_M$ , existe uma casa de paredes brancas, como mostra a figura. Nas tediosas noites escuras, Maria passa o tempo mandando sinais luminosos com uma ponteira laser em direção à parede da casa e observando a volta deles. Numa dessas noites, o carro dirigido por seu amigo João passa pelo posto, com velocidade constante  $v$  e, imediatamente, Maria envia um sinal luminoso em direção à casa. Depois de ser refletido, o sinal é visto por João. Neste exemplo, tomando como origem das coordenadas e dos tempos a passagem de João por Maria, desejamos determinar, nos dois referenciais, as coordenadas espaço-temporais dos seguintes eventos:

- a, que corresponde à medida de posição da casa quando João passa por Maria;
- b, que corresponde à chegada da luz à casa;
- c, que corresponde à chegada do sinal refletido a João.

O evento  $R$ , de referência, que corresponde à passagem de João por Maria, é descrito por

$$\text{evento R} \quad S_M : (0, 0, 0; 0) \quad (22.14)$$

$$S_J : (0, 0, 0; 0) \quad (22.15)$$

No referencial  $S_M$ , os eventos  $a$  e  $R$  são simultâneos e, portanto,

$$\text{evento a} \quad S_M : (0, L, 0; 0) \quad (22.16)$$

$$S_J : (x_J^a, y_J^a, z_J^a; t_J^a) \quad (22.17)$$

As coordenadas do evento  $a$  em  $S_J$  são obtidas por meio das  $TL$  e valem

$$(x_J^a, y_J^a, z_J^a; t_J^a) = (0, \gamma L, 0, -\gamma v L/c^2). \quad (22.18)$$

No referencial  $S_M$ , o tempo que a luz emitida a partir do ponto leva para chegar à casa

é  $t_M^b = L/c$ . Assim, para o evento  $b$ , escrevemos:

$$\text{evento } b \quad S_M : \left(0, L, 0, \frac{L}{c}\right) \quad (22.19)$$

$$S_J : \left(0, \gamma L \left[1 - \frac{v}{c}\right], 0, \frac{\gamma L}{c} \left[1 - \frac{v}{c}\right]\right), \quad (22.20)$$

sendo que as coordenadas em  $S_J$  foram obtidas por meio das  $TL$ .

O evento  $c$  ocorre, em  $S_M$ , no instante  $t_M^c$ , que é determinado pela condição

$$v t_M^c = L - c(t_M^c - t_M^b) \quad (22.21)$$

onde  $v t_M^c$  corresponde à distância percorrida pelo cano e  $L - c(t_M^c - t_M^b)$ , à coordenada da luz no seu trajeto de volta. Essa condição fornece  $t_M^c = 2L/(c + v)$  e, portanto,

$$\text{evento } c \quad S_M : \left(0, \frac{2vL}{c+v}, 0, \frac{2L}{c+v}\right) \quad (22.22)$$

$$S_J : \left(0, 0, 0, \frac{2\gamma L}{c} \left[1 - \frac{v}{c}\right]\right) \quad (22.23)$$

onde, novamente, as coordenadas em  $S_J$  foram obtidas usando as  $TL$ .

Neste exercício, o enunciado enfatiza apenas o ponto de vista de Maria acerca dos acontecimentos. Por isso, é interessante pensarmos um pouco na perspectiva que João tem do problema. No referencial  $S_J$ , João está imóvel, fixo na origem do sistema. É por isso, por exemplo, que as coordenadas espaciais do evento  $c$  são todas nulas, já que ele ocorre no ponto onde João se encontra.

Em  $S_J$ , João está no assento do seu carro e, à medida que o tempo passa, a casa se aproxima dele. A velocidade da casa pode ser calculada a partir das coordenadas do evento  $a$ , dadas pelas eq. (22.16), usando

$$v_{casa} = \frac{y_J^a}{t_J^a} = -v, \quad (22.24)$$

segundo o eixo  $y$ . Este é um resultado esperado, pois a casa está fixa em  $S_M$  e este referencial se move com velocidade  $\vec{v} = -v\vec{j}$  em relação a  $S_J$ .

No referencial  $S_J$ , entre os eventos  $b$  e  $c$ , a luz se move de encontro a João. A velocidade desse movimento pode ser determinada por meio da razão entre os intervalos

$$\Delta y = y_J^c - y_J^b = -\gamma L \left[1 - \frac{v}{c}\right] \quad (22.25)$$

e

$$\Delta t = t_J^c - t_J^b = \frac{2\gamma L}{c} \left[1 - \frac{v}{c}\right] - \frac{\gamma L}{c} \left[1 - \frac{v}{c}\right] = \frac{\gamma L}{c} \left[1 - \frac{v}{c}\right], \quad (22.26)$$

que fornece

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = -c. \quad (22.27)$$

Este resultado é, evidentemente, o que se espera do segundo princípio da relatividade.

#### • exemplo 4: o paradoxo dos gêmeos

Nesta seção, apresentamos o famoso paradoxo dos gêmeos que, de fato, não é um paradoxo de verdade. Ele é apenas aparente. Existem inúmeras formulações possíveis para ele e nós colocamos o problema do seguinte modo:

“Duas irmãs gêmeas, Ana e Bia, moram na cidade de SP, que supomos fixa em um referencial inercial. Um dia, elas vão à estação de trem e Bia faz uma viagem de ida e volta a uma outra cidade, chamada de R, enquanto que Ana a espera em SP. Após o retorno de Bia, elas notam que Ana havia envelhecido mais do que Maria, devido ao efeito de dilatação do tempo”.

O que é aparentemente paradoxal neste caso, é que Bia parece ter-se movido *relativamente* a Ana, do mesmo modo que Ana moveu-se *relativamente* a Bia. Ao pensarmos assim, parece haver uma simetria no problema, que não permite entender porque uma das irmãs acaba sendo mais velha do que a outra. A solução dessa aparente contradição passa por perceber que as situações das duas irmãs não são totalmente simétricas, já que Ana permanece sempre num único referencial, enquanto que, em seu percurso Bia precisa passar por três referenciais: SP, trem de ida, trem de volta, SP. Com Ana, isso não acontece.

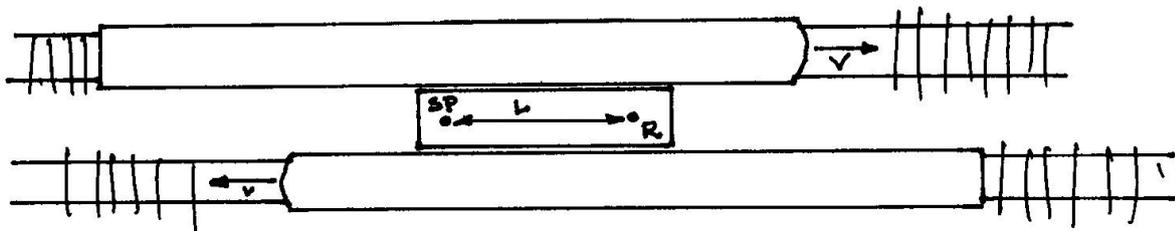


Figura 22.7: Vista dos dois trens, no referencial da Terra.

Para discutir este problema, supomos que as viagens de ida e volta sejam efetuadas em dois trens muito longos. O trem  $D$  se move para a direita, no sentido  $SP \rightarrow R$  (sistema  $S_D$ ) enquanto que o trem  $E$  se move para a esquerda, no sentido  $R \rightarrow SP$  (sistema  $S_E$ ). Os módulos das velocidades dos dois trens relativamente à Terra são iguais a  $v$ , como mostra a Fig. 22.7, que representa a visão de alguém no referencial  $S_T$ , da Terra, suposto inercial.

Por convenção, tomamos as origens espaço-temporais nos três referenciais como sendo coincidentes, determinadas pelo instante em que Bia pula da estação em SP para o trem que está indo para R. Assim:

**evento a**, de referência - Maria pula para o trem D

$$\text{evento a} \quad S_T : (0, 0, 0; 0) \quad (22.28)$$

$$S_D : (0, 0, 0; 0) \quad (22.29)$$

$$S_E : (0, 0, 0, ; 0) . \quad (22.30)$$

O segundo evento importante é a chegada de Bia a R, onde ela pula diretamente para o trem de volta, sem parar na estação. As coordenadas deste evento podem ser facilmente determinadas no referencial da Terra e escrevemos

**evento b** - Maria chega a R e entra no trem E

$$\text{evento b} \quad S_T : \left(0, L, 0; \frac{L}{v}\right) \quad (22.31)$$

$$S_D : \left(0, 0, 0; \frac{L}{\gamma v}\right) \quad (22.32)$$

$$S_E \left(0, 2\gamma L, 0; \frac{\gamma L}{v} \left[1 + \frac{v^2}{c^2}\right]\right) \quad (22.33)$$

sendo que as coordenadas em  $S_D$  e  $S_E$  foram obtidas por meio das  $TL$ . O resultado para as coordenadas espaciais em  $S_D$  não é surpresa, já que Bia, uma vez no trem  $D$ , sempre esteve parada na origem desse sistema de referência.

O terceiro e último evento importante é a chegada de Bia a SP, cujas coordenadas, no referencial da Terra, são obtidas notando que o tempo que o trem leva para vir de R a SP é o mesmo que o outro levou para ir de SP a R. Assim, escrevemos

**evento c** - Bia chega a SP

$$\text{evento c} \quad S_T : (0, 0, 0; 2L/v) \quad (22.34)$$

$$S_D : \left(0, -2\gamma L, 0; \frac{2\gamma L}{v}\right) , \quad (22.35)$$

$$S_E : \left(0, 2\gamma L, 0; \frac{2\gamma L}{v}\right) . \quad (22.36)$$

sendo os valores, para  $S_D$  e  $S_E$  determinados pelas  $TL$ . Esses resultados permitem-nos calcular o tempo total decorrido para Bia durante a sua viagem de ida e volta. Durante a ida, ela estava no referencial  $S_D$  e o tempo de viagem, observado tanto no relógio do trem  $D$  quanto no seu próprio, é dado por

$$\Delta t_{Bia}^{ida} = t_D^b - t_D^a = \frac{L}{\gamma v} . \quad (22.37)$$

A duração da viagem de volta, também determinada tanto pelo relógio do trem  $E$  quanto pelo de Bia, é

$$\Delta t_{Bia}^{volta} = t_D^c - t_E^b = 2\gamma \frac{L}{v} - \frac{\gamma L(1 + v^2/c^2)}{v} = \frac{L}{\gamma v} . \quad (22.38)$$

É interessante notar que, como esperado,  $\Delta t_{Bia}^{ida} = \Delta t_{Bia}^{volta}$ . Assim, o tempo total para a viagem de Bia, tal como indicado no seu relógio, é dado por

$$\tau_{Bia} = \Delta t_{Bia}^{ida} + \Delta t_{Bia}^{volta} = \frac{2L}{\gamma v}. \quad (22.39)$$

Por outro lado, o tempo próprio decorrido para Ana, que ficou em SP esperando a irmã, foi

$$\tau_{Ana} = \frac{2L}{v}, \quad (22.40)$$

maior do que  $\tau_{Bia}$ . A diferença de idade entre Ana e Bia é

$$\Delta\tau = \tau_{Ana} - \tau_{Bia} = \frac{2L}{v} \left[ \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right]. \quad (22.41)$$

Como o tempo de vida de uma pessoa é determinado pelo relógio que ela carrega, Ana ficou, de fato, mais velha do que Bia. Existe, portanto, uma assimetria, real e concreta, entre os tempos decorridos nas vidas de Ana e Bia, que se deve ao fato de esta última ter mudado de referencial para poder sair e voltar a SP. Elas viveram felizes para sempre, mesmo tendo de comemorar seus aniversários em datas diferentes.

### outras formulações

A apresentação que fizemos do problema conhecido como *o paradoxo dos gêmeos* é apenas uma, dentre muitas outras possíveis, que podem ser achadas em outros textos. Nós, aqui, limitamo-nos a mencionar algumas outras possibilidades, relativamente exóticas, de formas de reencontro entre Ana e Bia e as suas conseqüências.

- Bia vai de SP até R, onde desce do trem com velocidade  $v$  e fica parada na plataforma. Em seguida Ana, que havia ficado em SP, toma um outro trem, com velocidade  $v'$ , em direção a R. Ao descer dele, em R, as duas irmãs se encontram. Se  $v = v'$  Bia e Ana terão a mesma idade, se  $v > v'$ , Bia é mais nova do que Ana, se  $v < v'$ , Bia é mais velha do que Ana.
- Bia vai até R, onde desce do trem e telefona para Ana, que ficou em SP, combinando um reencontro no meio do caminho. Cada uma delas toma uma bicicleta, cuja velocidade é  $v'$  e parte em direção ao ponto de encontro. Quando este ocorre, a diferença de idade entre as duas irmãs é de

$$\Delta\tau = \frac{L}{v} \left[ \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right]. \quad (22.42)$$

- Bia vai até R, desce do trem e volta de bicicleta a SP. Quando ela reencontra Ana, a diferença de idade entre elas é  $\Delta\tau$ , que está no intervalo

$$\frac{L}{v} = \left[ \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right] < \Delta\tau < \frac{2L}{v} \left[ \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right]. \quad (22.43)$$

## uma confirmação experimental

No universo em que vivemos, não é possível fazer uma viagem que se inicie e termine no mesmo ponto do espaço, sem algum tipo de aceleração. Em 1971, relógios atômicos de césio foram colocados em aviões, que circunavegaram a Terra nos sentidos horário e anti-horário. Suas marcações foram comparadas com as de relógios estacionários na Terra e as diferenças observadas eram compatíveis com as previsões da teoria da relatividade<sup>[1]</sup>.

### • referência

[1] J.C. Hafele e R.E. Keating, Science, vol. 177, págs. 166 e 168 (1972).

### • exercícios

1. Numa estação de trem, existem duas catapultas, separadas por uma distância  $L$ , cada uma delas contendo um relógio, sincronizado com o da outra. As catapultas são acionadas simultaneamente, por meio de dispositivos elétricos, de modo que os dois relógios são lançados no interior de um trem que passa em frente à estação, com velocidade  $v$ . No interior do trem, os dois relógios são apanhados por dois passageiros que, em seguida, caminham com velocidades iguais e muito baixas, um em direção ao outro, até se encontrarem. Determine a diferença entre os tempos marcados pelos dois relógios, supondo que eles permaneçam funcionando normalmente quando são atirados no trem.

2. Na discussão do paradoxo dos gêmeos, vimos que  $\tau_{Ana} > \tau_{Bia}$ . Um certo dia, depois da viagem, as duas irmãs passam a discutir. Bia diz que, como ambas nasceram juntas e, naquele dia ela (Bia) tem menos idade que Ana, então ela (Bia) *viveu tanto quanto* a irmã, só que precisou de menos tempo para fazer isso. Ana retruca, dizendo que isso é bobagem, já que Bia é efetivamente mais nova e, por isso mesmo, *viveu menos* que ela (Ana). Quem está com a razão?

3. No caso do paradoxo dos gêmeos:

a) Quais deveriam ser os valores de  $L$  e  $v$  para que a diferença de idade entre as duas irmãs pudesse ser de um dia?

b) Haveria alguma diferença de idade entre elas se Bia tivesse descido do trem em R e voltado a pé para SP?

c) Imagine uma outra situação. Bia chega ao Rio, mas não sai do trem de ida, referencial  $S_D$ . Nesse instante, Ana pula para dentro deste trem, e caminha, pelo seu interior, até encontrar Bia. Existe diferença de idade entre as duas irmãs quando elas se encontram?

4. No problema do paradoxo dos gêmeos, adote  $v = 3/5c$ ,  $L = 400.000\text{km}$ , e preencha a tabela abaixo:

referencial		$S_T$	$S_D$	$S_E$
evento a	y			
	t			
evento b	y			
	t			
evento c	y			
	t			

Faça um desenho, para cada um dos referenciais, indicando os instantes e posições onde ocorreram os vários eventos. Interprete, se possível, os vários resultados em termos de contrações do espaço e dilatações do tempo.

• **respostas**

1. o módulo da diferença é

$$|\Delta t| = \frac{\gamma v L}{c^2}$$

3. a) Um dia tem  $8,64 \times 10^4$  segundos. Existem muitos conjuntos de valores que, substituídos na eq. (22.36), reproduzem este valor. Adotando  $c = 3 \times 10^8$  m/s, um deles pode ser  $v = 1,8 \times 10^8$  m/s e  $L = 3,888 \times 10^{13}$  m.

b) sim, Bia continua mais nova.

c) sim, Ana é um pouco mais nova.

# Capítulo 23

## adição de velocidades

Na relatividade, os comportamentos dos intervalos de espaço e de tempo por mudanças de referencial são bastante diferentes dos da mecânica clássica. Nesta aula, mostramos que o mesmo acontece com a chamada *adição de velocidades*, que relaciona as velocidades de um mesmo móvel em referenciais diferentes. Na mecânica clássica, se um trem se move em relação ao solo com velocidade  $\vec{v}$  e um corpo se desloca com velocidade  $\vec{u}_T$  em relação ao trem, então a velocidade deste corpo em relação ao solo é  $\vec{u}_S = \vec{u}_T + \vec{v}$ . Na relatividade, entretanto, esta relação precisa ser modificada. Para nos convencer disto tomemos, por exemplo,  $\vec{u}_T = \vec{v}$ , com  $|\vec{v}| = 0,8c$ , e o resultado clássico corresponde a  $|\vec{u}_S| = 1,6c$ , em contradição com a noção relativística de que a velocidade da luz no vácuo não pode ser superada.

### • a adição de velocidades na relatividade

Na relatividade, as descrições do movimento de *um mesmo corpo*<sup>1</sup>, em vários referenciais diferentes, são relacionadas pelas transformações de Lorentz. Tanto na mecânica clássica como na relatividade, a noção de velocidade de um corpo é dada pela relação entre a distância percorrida, pelo tempo necessário para percorrê-la. Na relatividade, entretanto, tanto os intervalos espaciais como os temporais dependem do referencial e, por isso, num referencial  $S_q$ , qualquer, a velocidade instantânea  $\vec{u}_q$  de um corpo é dada por

$$\vec{u}_q = \frac{d\vec{r}_q}{dt_q}, \quad (23.1)$$

onde  $dt_q$  é o intervalo infinitamente de tempo gasto no percurso  $d\vec{r}_q$ , naquele referencial. Além da notação, nós representamos as velocidades de corpos, tais como partículas, pedras ou carros, pela  $u$  e reservamos a letra  $v$  para designar as velocidades entre referenciais diferentes.

---

<sup>1</sup>Nós, aqui, discutimos apenas situações nas quais as dimensões dos corpos são irrelevantes e eles podem ser considerados como pontos materiais.

O problema da adição de velocidades pode ser colocado da seguinte forma: se Maria observa um corpo movendo-se com velocidade  $\vec{u}_M$  no referencial  $S_M$ , como João, que se move com velocidade  $\vec{v}$  relativamente a ela, descreve o movimento deste mesmo corpo no referencial  $S_J$ ? Em outras palavras, se representarmos por  $\vec{u}_J$  a velocidade do corpo em relação  $S_J$ , qual é a relação entre  $\vec{u}_J$  e  $\vec{u}_M$  ?

Para obter esta relação, inicialmente expressamos as velocidades *do mesmo corpo* nos referenciais  $S_M$  e  $S_J$ , em termos das suas componentes cartesianas:

$$\vec{u}_M = \frac{d\vec{r}_M}{dt_M} = \frac{dx_M}{dt_M} \hat{i} + \frac{dy_M}{dt_M} \hat{j} + \frac{dz_M}{dt_M} \hat{k}, \quad (23.2)$$

$$\vec{u}_J = \frac{d\vec{r}_J}{dt_J} = \frac{dx_J}{dt_J} \hat{i} + \frac{dy_J}{dt_J} \hat{j} + \frac{dz_J}{dt_J} \hat{k}. \quad (23.3)$$

Em seguida, diferenciamos as expressões das transformações de Lorentz, dadas pelas eqs.(20.27-20.30), e obtemos

$$dx_J = dx_M = u_{Mx} dt_M, \quad (23.4)$$

$$dy_J = \gamma(dy_M - v dt_M) = \gamma(u_{My} - v) dt_M, \quad (23.5)$$

$$dz_J = dz_M = u_{Mz} dt_M, \quad (23.6)$$

$$dt_J = \gamma\left(dt_M - \frac{v}{c^2} dy_M\right) = \gamma\left(1 - \frac{v u_{My}}{c^2}\right) dt_M. \quad (23.7)$$

Dividindo as eqs.(23.4)-(23.6) pela eq.(23.7), obtemos a relação desejada entre  $\vec{u}_J$  e  $\vec{u}_M$  que, em componentes, tem a forma

$$u_J^x = \frac{u_{Mx}}{\gamma(1 - v u_{My}/c^2)}, \quad (23.8)$$

$$u_J^y = \frac{u_{My} - v}{1 - v u_{My}^y/c^2}, \quad (23.9)$$

$$u_J^z = \frac{u_{Mz}}{\gamma(1 - v u_{My}^y/c^2)}. \quad (23.10)$$

Estes resultados permitem conhecer  $\vec{u}_J$ , a partir de  $\vec{u}_M$  e  $\vec{v}$ . Como no caso das transformações de Lorentz, discutidas na aula 20, a solução para a operação inversa pode ser obtida trocando os índices  $J$  e  $M$  e o sinal de  $v$ :  $J \leftrightarrow M$ ,  $v \rightarrow -v$ . Assim,

$$u_M^x = \frac{u_{Jx}}{\gamma(1 + v u_{Jy}/c^2)}, \quad (23.11)$$

$$u_M^y = \frac{u_{Jy} + v}{1 + v u_{Jy}/c^2}, \quad (23.12)$$

$$u_M^z = \frac{u_{Jz}}{\gamma(1 + v u_{Jy}/c^2)}. \quad (23.13)$$

Note que, nos dois conjuntos de relações, as expressões para as duas componentes da velocidade perpendiculares a  $\vec{v}$  são semelhantes entre si, mas diferentes da componente paralela a  $\vec{v}$ .

Os resultados (23.8)-(23.10) e (23.11-23.13) representam as regras relativísticas para a adição de velocidades. Para tornar mais claro os seus significados apresentamos, a seguir, algumas aplicações.

### • o limite de baixas velocidades

Quando dois observadores se movem relativamente, com velocidade  $v$ , sendo  $v \ll c$ , podemos desprezar o quociente  $v/c$  nas eqs.(23.8)-(23.10) e escrever a relação vetorial aproximada  $\vec{u}_J \cong \vec{u}_M - \vec{v}$ . Este resultado é formalmente parecido com as transformações de Galileu, utilizadas na mecânica clássica. Entretanto, isso não significa que esta mecânica newtoniana seja um caso limite da relatividade, já que as duas teorias correspondem a visões do mundo muito diferentes.

### • exemplo 1.

Maria, no referencial  $S_M$ , observa João passando para a direita, com velocidade  $\vec{v} = v\vec{j}$ . Um carro também passa por ela, com velocidade  $\vec{u}_M = u\vec{j}$ , como mostra a Fig. 23.1. Qual a velocidade  $\vec{u}_J$ , do carro, relativamente ao referencial  $S_J$ ?



Figura 23.1: Os movimentos de João e do carro, observados em  $S_M$ .

O vetor velocidade do carro em  $S_M$  é

$$\vec{u}_M = (0, u, 0). \quad (23.14)$$

Segundo a mecânica clássica, a velocidade em  $S_J$  seria

$$\vec{U}_J = \vec{u}_M - \vec{v} = (0, u - v, 0) \quad (23.15)$$

No caso da relatividade, entretanto, usamos as eqs.(23.8)-(23.10) e obtemos

$$u_{Jx} = 0, \quad (23.16)$$

$$u_{Jy} = \frac{u - v}{1 - v u/c^2}, \quad (23.17)$$

$$u_{Jz} = 0. \quad (23.18)$$

Esses resultados podem ser agrupados na expressão vetorial,

$$\vec{u}_J = \left( 0, \frac{u - v}{1 - v u/c^2}, 0 \right). \quad (23.19)$$

A comparação com a eq.(23.15) indica que ela é diferente da clássica. Para explorar este resultado, consideramos uma situação particular, em que João move-se para a direita em relação a Maria, com velocidade  $\vec{v} = (3c/5)\vec{j}$  e o carro move-se para a esquerda em relação a Maria, com velocidade  $\vec{u}_M = (-4c/5)\vec{j}$ . Num caso como este, a *previsão clássica* para a velocidade do carro relativamente a João seria  $\vec{U}_J = (0, -7c/5, 0)$ , que corresponde a uma velocidade para a esquerda, com módulo maior do que  $c$ . Já a *previsão relativística* é  $\vec{u}_J = (0, -35c/37, 0)$ , cujo módulo é menor do que  $c$ . Deste modo, a regra relativística de adição de velocidades produz um resultado coerente com o fato de  $c$  ser a velocidade limite.

### • exemplo 2.

João está numa plataforma, que se move paralelamente ao eixo  $y$ , com velocidade  $\vec{v} = v\hat{j}$ , em relação a  $S_M$ , onde está Maria. Sobre esta plataforma, existe um corpo que se move segundo o eixo  $x$ , com velocidade  $\vec{u}_J = u\hat{i}$ , em relação à origem de  $S_J$ , como indica a figura 23.2. Quais são as previsões clássica e relativística para a velocidade do corpo, relativamente a Maria?

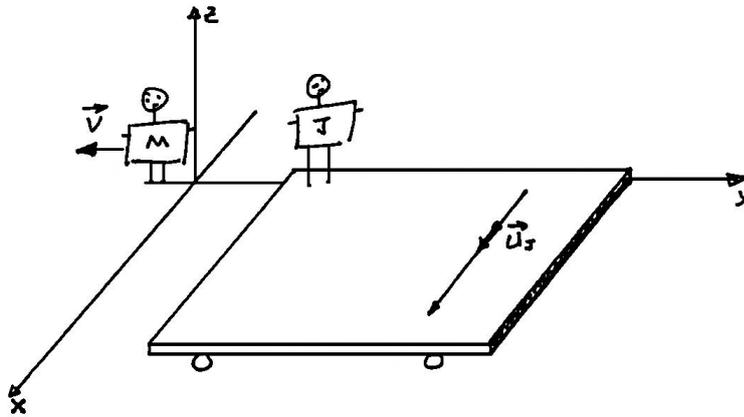


Figura 23.2: Os movimentos do corpo, e de Maria, observados por João.

Em  $S_J$ , a velocidade do corpo é

$$\vec{U}_J = (u, 0, 0) \quad (23.20)$$

e a prescrição clássica fornece

$$\vec{U}_M^{cl} = (u, v, 0), \quad (23.21)$$

enquanto que, na relatividade, de acordo com as eqs.(23.11)-(23.13), temos

$$\vec{u}_M = \left( \frac{u}{\gamma}, v, 0 \right). \quad (23.22)$$

Se, por exemplo, adotarmos,  $v = 3c/5$  e  $u = 4c/5$ , temos  $\vec{U}_M = (4c/5, 3c/5, 0)$  e  $\vec{u}_M = (16c/25, 3c/5, 0)$ , cujos, módulos são, respectivamente,  $|\vec{U}_M| = c$  e  $|\vec{u}_M| = \sqrt{481} c/\sqrt{625}$ . Assim, novamente, notamos que o cálculo relativístico é consistente com a condição de que o módulo da velocidade de um corpo tem de ser sempre *menor* do que  $c$ .

### • exemplo 3. a velocidade da luz

No interior de um trem, referencial  $S_T$ , existe uma fonte de laser, que emite um feixe horizontal, formando um ângulo  $\alpha_T$  com o eixo do trem, como mostra a figura 23.3. Quando o trem se move ao longo do eixo  $y$ , com velocidade  $\vec{v} = v\hat{j}$ , qual é a velocidade da luz em relação ao solo, referencial  $S_S$ ?

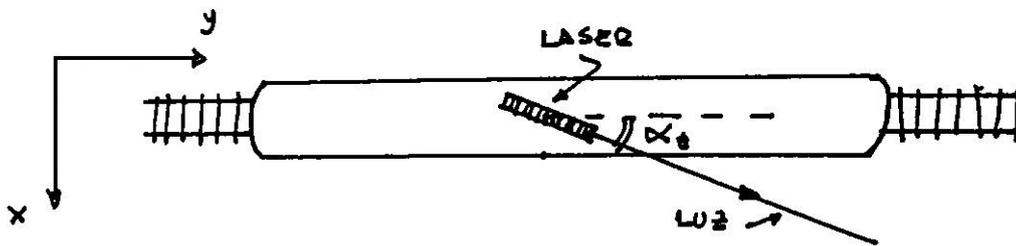


Figura 23.3: O laser e o seu feixe, vistos no referencial  $S_T$ .

Neste tipo de questão, é conveniente pensarmos no feixe de laser como sendo composto por muitos fótons, cada um deles com velocidade

$$\vec{c}_T = (c \operatorname{sen} \alpha_T, c \operatorname{cos} \alpha_T, 0), \quad (23.23)$$

em  $S_T$ . A velocidade de cada fóton em relação ao solo pode ser obtida por meio das eqs.(23.8)-(23.10) e suas componentes são

$$c_S^x = \frac{c \operatorname{sen} \alpha_T}{\gamma(1 + v \operatorname{cos} \alpha_T/c)}, \quad (23.24)$$

$$c_S^y = \frac{c \operatorname{cos} \alpha_T + v}{1 + v \operatorname{cos} \alpha_T/c}, \quad (23.25)$$

$$c_S^z = 0. \quad (23.26)$$

Para interpretar este resultado calculamos, inicialmente, o módulo do vetor  $\vec{c}_S$ , dado por

$$|\vec{c}_S|^2 = \frac{(1 - v^2/c^2) c^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_T + (c \operatorname{cos} \alpha_T + v)^2}{(1 + v \operatorname{cos} \alpha_T/c)^2} = c^2. \quad (23.27)$$

Assim, o módulo da velocidade da luz em relação ao solo é também igual a  $c$ , independentemente dos valores adotados para  $v$  e  $\alpha_T$ . Este resultado indica que as regras de adição de velocidades, obtidas nesta aula, são coerentes com o segundo princípio da relatividade, segundo o qual o *módulo* da velocidade da luz no vácuo é sempre o mesmo em qualquer referencial inercial.

É interessante notar que, neste problema, a direção da velocidade da luz depende do referencial. Para determinar o ângulo  $\alpha_S$ , entre o feixe de laser e o eixo  $y$ , no referencial do solo, escrevemos  $\vec{c}_S = (c \sin \alpha_S, c \cos \alpha_S, 0)$  e comparamos com as eqs.(23.24)-(23.26), obtendo

$$\sin \alpha_S = \frac{\sin \alpha_T}{\gamma(1 + v \cos \alpha_T/c)}, \quad (23.28)$$

$$\cos \alpha_S = \frac{\cos \alpha_T + v/c}{1 + v \cos \alpha_T/c}. \quad (23.29)$$

Deste modo,

$$\alpha_S = \arctan \left[ \frac{\sin \alpha_T}{\gamma(\cos \alpha_T + v/c)} \right]. \quad (23.30)$$

Nos casos particulares em que o feixe de luz é paralelo ou antiparalelo à velocidade do trem, temos  $\alpha_T = 0$  e  $\alpha_T = \pi$  e os vetores velocidade da luz são dados, respectivamente, por  $\vec{c}_T = \vec{c}_S = (0, c, 0)$  e  $\vec{c}_T = \vec{c}_S = (0, -c, 0)$ , respectivamente. Por outro lado, quando o laser é orientado perpendicularmente ao trem, temos  $\alpha_T = \pi/2$  e, portanto, os dois vetores são diferentes, apesar de terem os módulos iguais:  $\vec{c}_T = (c, 0, 0)$  e  $\vec{c}_S = (c/\gamma, +v, 0)$ .

#### • exemplo 4: o decaimento do $\pi^0$

Na física das partículas elementares, são comuns os processos em que uma partícula pode decair em outras duas. Por exemplo, um méson  $\pi^0$ , neutro,  $\pi^0$ , pode decair em dois fótons, num processo representado por  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ . Nosso interesse, neste problema, é determinar o ângulo entre as velocidades dos dois fótons provenientes do decaimento, porque esse ângulo pode ser medido em experimentos. Em geral, nesses experimentos, o  $\pi^0$  que decai está em movimento. Por isso, neste exemplo, supomos que a velocidade do  $\pi^0$ , antes do decaimento, seja  $\vec{v} = v\hat{j}$ , no sistema  $S_L$  do laboratório.

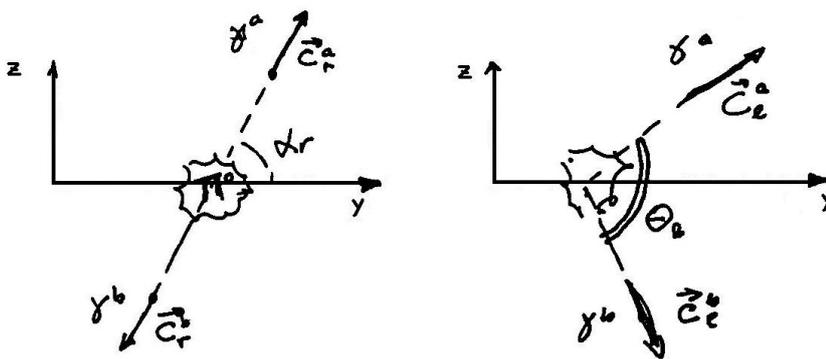


Figura 23.4: O decaimento do  $\pi^0$ , nos referenciais  $S_R(a)$  e  $S_L(b)$ .

Para resolver este problema, é conveniente raciocinar, inicialmente, no referencial  $S_R$ , onde o  $\pi^0$  está em repouso. Neste referencial, que se move com velocidade  $\vec{v} = v\hat{j}$  em relação a  $S_L$  a descrição do problema é mais simples, pois a quantidade de movimento do

píon é nula e os fótons têm velocidades opostas, como mostra a fig. 23.4(a). Sem perda de generalidade vamos supor que as velocidades dos dois fótons, designados por  $a$  e  $b$ , estejam contidas no plano  $yz$ , e escrevemos

$$\vec{c}_R^a = (0, c \cos \alpha_R, c \sin \alpha_R), \quad (23.31)$$

$$\vec{c}_R^b = (0, -c \cos \alpha_R, -c \sin \alpha_R). \quad (23.32)$$

Usando as eqs.(23.11)-(23.13), podemos escrever os vetores velocidades dos fótons no referencial do laboratório como

$$\vec{c}_L^a = \left( 0, \frac{c \cos \alpha_R + v}{1 + v \cos \alpha_R/c}, \frac{c \sin \alpha_R}{\gamma(1 + v \cos \alpha_R/c)} \right), \quad (23.33)$$

$$\vec{c}_L^b = \left( 0, \frac{-c \cos \alpha_R + v}{1 - v \cos \alpha_R/c}, \frac{-c \sin \alpha_R}{\gamma(1 - v \cos \alpha_R/c)} \right). \quad (23.34)$$

Como no exemplo 3, podemos mostrar que  $|\vec{c}_L^a| = |\vec{c}_L^b| = c$ . Para determinar o ângulo entre  $\vec{c}_L^a$  e  $\vec{c}_L^b$ , usamos o fato de que o produto escalar de dois vetores quaisquer  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  sempre pode ser escrito como  $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre eles. Por isso, para o ângulo entre as velocidades dos dois fótons provenientes do  $\pi^0$ , escrevemos

$$\cos \theta_L = \frac{\vec{c}_L^a \cdot \vec{c}_L^b}{c^2} = \frac{-1 + v^2(1 + \sin^2 \alpha_R)/c^2}{1 - v^2 \cos^2 \alpha_R/c^2}. \quad (23.35)$$

É interessante comparar este resultado com o correspondente produzido pela mecânica clássica. Usando a regra newtoniana para a adição de velocidades, as velocidades dos fótons no referencial  $S_L$  seriam

$$\vec{C}_L^a = (0, c \cos \alpha_R + v, c \sin \alpha_R) \quad (23.36)$$

$$\vec{C}_L^b = (0, -c \cos \alpha_R + v, -c \sin \alpha_R) \quad (23.37)$$

e, portanto,

$$\cos \theta_L^{cl} = \frac{\vec{C}_L^a \cdot \vec{C}_L^b}{|\vec{C}_L^a| |\vec{C}_L^b|} = \frac{-1 + v^2/c^2}{\sqrt{(1 + v^2/c^2)^2 - 4v^2 \cos^2 \alpha_R/c^2}}. \quad (23.38)$$

Este resultado clássico é bastante diferente do relativístico, dado em (23.35). A importância desse fato é que, o ângulo  $\theta_L$  pode ser observado por meio de experimentos factíveis aqui na Terra. Deste modo, através de medidas, podemos determinar qual das duas teorias descreve melhor a natureza.

### • exemplo 5: o decaimento do $K^0$

Um outro decaimento envolve o méson  $K^0$ , sem carga elétrica, que pode se transformar em dois mésons  $\pi$ , com massas iguais e cargas elétricas positiva e negativa, denotados por  $\pi^+$  e  $\pi^-$ , respectivamente. Estes mésons são chamados de kaons e píons, por simplicidade, e o decaimento é representado simbolicamente por  $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ .

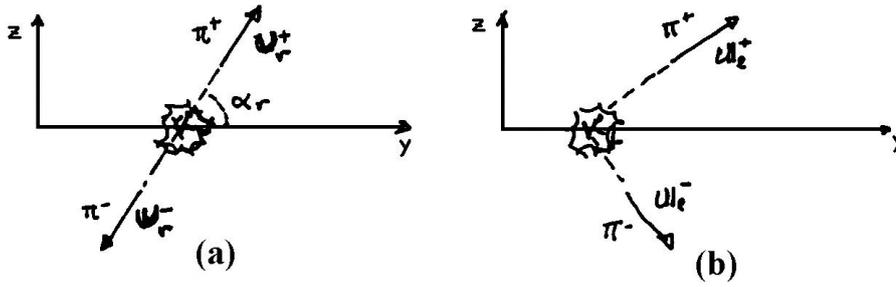


Figura 23.5: O decaimento do  $K^0$ , nos referenciais  $S_R$  e  $S_L$ .

No sistema de referência  $S_R$ , em que o kaon está em repouso, a conservação de momento obriga que as velocidades dos dois píons tenham módulos e direções iguais e sentidos opostos. Em  $S_R$ , o módulo das velocidades pode ser determinado a partir dos dados experimentais como sendo  $u_R = 0,83c$ . Supondo que, neste sistema, as trajetórias dos dois píons estejam contidas no plano  $yz$  e que o ângulo entre a velocidade do  $\pi^+$  e o eixo  $y$  seja  $\alpha_R$ , como mostra a Fig. 23.4, podemos escrever

$$\vec{u}_{R+} = (0, u_R \cos \alpha_R, u_R \sin \alpha_R), \quad (23.39)$$

$$\vec{u}_{R-} = (0, -u_R \cos \alpha_R, -u_R \sin \alpha_R). \quad (23.40)$$

Nos experimentos realizados no sistema  $S_L$ , do laboratório, os káons que decaem não estão, em geral, em repouso. Por isso, neste exemplo, estamos interessados em determinar as velocidades dos píons resultantes do decaimento em  $S_L$  onde o kaon se move com velocidade  $\vec{v} = v\vec{j}$ . Como o kaon está em repouso no sistema  $S_R$ ,  $\vec{v}$  é também a velocidade relativa entre os referenciais  $S_L$  e  $S_R$ . Usando as eqs.(23.11-23.13), podemos escrever, em componentes, as velocidades dos dois píons como

$$u_{L+}^x = 0, \quad (23.41)$$

$$u_{L+}^y = \frac{u_R \cos \alpha_R + v}{1 + vu_R \cos \alpha_R / c^2}, \quad (23.42)$$

$$u_{L+}^z = \frac{u_R \sin \alpha_R}{\gamma(1 + vu_R \cos \alpha_R / c^2)}, \quad (23.43)$$

$$u_{L-}^x = 0, \quad (23.44)$$

$$u_{L-}^y = \frac{-u_R \cos \alpha_R + v}{1 - vu_R \cos \alpha_R / c^2}, \quad (23.45)$$

$$u_{L-}^z = \frac{-u_R \sin \alpha_R}{\gamma(1 - vu_R \cos \alpha_R / c^2)}. \quad (23.46)$$

Estes resultados determinam  $\vec{u}_{L+}$  e  $\vec{u}_{L-}$  em função dos dados  $u_R$  e  $\alpha_R$  e indicam que, em geral, os dois píons terão velocidades diferentes, em módulo e orientação, no referencial do laboratório, como indica a figura 23.4(b).

Na física das partículas elementares, as velocidades envolvidas são, em geral, comparáveis à da luz. Mesmo em um processo como o  $K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ , que não tem nada de excepcional, as velocidades dos píons em  $S_R$  já são de  $0,83c$ . Por isso, o estudo das partículas oferece muitas situações onde é possível testar, experimentalmente, as previsões da relatividade contra as da mecânica clássica. Uma delas ocorre neste exemplo. Enquanto, no sistema  $S_R$ , o ângulo entre os momentos dos píons é  $180^\circ$ , em  $S_L$  ele é menor e pode ser obtido a partir do produto escalar entre as velocidades dos dois píons. Chamando de  $\theta_L$  este ângulo, temos

$$\cos\theta_L = \frac{\vec{u}_L^+ \cdot \vec{u}_L^-}{|u_L^+| |u_L^-|} \quad (23.47)$$

e, portanto, ele pode ser obtido a partir das eqs.(23.41)-(23.46). Efetuando os cálculos, encontramos

$$\cos\theta_L = \frac{-u_R^2 + v^2 + u_R^2 v^2 \sin^2 \alpha_R / c^2}{\sqrt{[u_R^2 + v^2 - u_R^2 v^2 \sin^2 \alpha_R / c^2]^2 - 4u_R^2 v^2 \cos^2 \alpha_R}}. \quad (23.48)$$

Neste problema, o resultado correspondente do cálculo clássico pode ser obtido tomando o limite  $c \rightarrow \infty$  do resultado relativístico. Fazendo isso, obtemos

$$\cos\theta_L^{cl} = \frac{-u_R^2 + v^2}{\sqrt{[u_R^2 + v^2]^2 - 4u_R^2 v^2 \cos^2 \alpha_R}}. \quad (23.49)$$

Como no caso discutido no exemplo 4, as previsões da relatividade e da mecânica clássica são diferentes entre si e podem ser discriminadas por meio de experimentos.

Para adquirir um sentimento acerca das ordens de grandeza deste problema, consideramos inicialmente a situação particular em que  $\alpha_R = 0$ , que corresponde a

$$\vec{u}_L^+ = \left(0, \frac{u_R + v}{1 + vu_R/c^2}, 0\right), \quad (23.50)$$

$$\vec{u}_L^- = \left(0, \frac{u_R - v}{1 - vu_R/c^2}, 0\right). \quad (23.51)$$

Supondo, por exemplo, que  $v = 0,5c$  e adotando o valor experimental  $u_R = 0,83c$ , temos  $\vec{u}_L^+ = (0, 0,94c, 0)$  e  $\vec{u}_L^- = (0, 0,56c, 0)$ . Por outro lado, se  $\alpha_R = \pi/2$ , obtemos

$$\vec{u}_L^+ = (0, v, u_R/\gamma), \quad (23.52)$$

$$\vec{u}_L^- = (0, v, -u_R/\gamma). \quad (23.53)$$

e, assim,  $\vec{u}_L^+ = (0, 0,5c, 0,72c)$  e  $\vec{u}_L^- = (0, 0,5c, -0,72c)$  e  $|\vec{U}_L^+| = |\vec{U}_L^-| = 0,83c$ .

• **exercícios**

1. Considere a situação descrita no exemplo 1. Calcule a velocidade do carro relativamente a João:

- no caso em que ambos têm a mesma velocidade em relação a Maria.
- quando  $\vec{v} = 3c/5\hat{j}$  e  $\vec{u}_M = 4c/5\hat{j}$ . Qual é a razão entre o módulo desta velocidade e a previsão clássica?

2. Ana está num carro, referencial  $S_A$ , que se move para a direita com velocidade  $\vec{v} = v\hat{j}$ , ao longo de uma estrada retilínea, paralela ao eixo  $y$ . Num dado ponto desta estrada está Pedro, no interior de um carro parado. Ana passa por Pedro e, depois de decorrido um intervalo de tempo  $T$ , no referencial do solo, Pedro passa a perseguir o carro de Ana, com uma velocidade  $u_S$ , ( $u_S > v$ ). Tomando como origem a passagem de Ana por Pedro, determine:

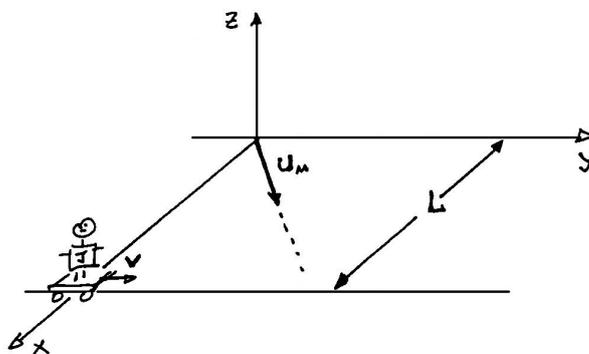
- o instante e a posição da saída de Pedro, nos referenciais do solo e de Ana;
- o instante e a posição em que Pedro alcança Ana, nos referenciais do solo e de Ana;
- a velocidade de Pedro em relação a Ana, usando os resultados anteriores.
- a velocidade de Pedro em relação a Ana, usando as regras de adição de velocidades, eqs. (23.8)-(23.13).

3. Um trem move-se para a direita em relação ao solo, com velocidade  $\vec{v} = v\hat{j}$  e, no seu interior, existe uma fonte de luz, que emite um feixe vertical.

- calcule o vetor velocidade do feixe de luz em relação ao solo;
- usando o resultado do item anterior, calcule o módulo, a direção e o sentido da velocidade da luz, em relação ao solo.

4. Maria está parada na origem do referencial  $S_M$ , enquanto que João desloca-se com velocidade constante  $\vec{v} = v\hat{j}$  ao longo da reta  $x = L, z = 0$ , como mostra a figura abaixo. No instante em que João cruza o eixo  $x$ , Maria parte ao seu encontro, com uma velocidade  $\vec{u}_M$ .

- determine o valor de  $u$  supondo que o encontro ocorra no instante  $T$ , em  $S_M$ .
- neste caso, qual é o vetor velocidade de Maria relativamente a João?



• respostas

1. a)  $\vec{u}_M = \vec{v} \rightarrow \vec{u}_J = 0$                       b) 25/13
2. a) evento  $E_1 \rightarrow S_S : (0, 0, 0, T)$ ;  $S_A : (0, -\gamma v T, 0, \gamma T)$   
 b) evento  $E_2 \rightarrow S_S : (0, \frac{u_S v T}{u_S - v}, 0, \frac{u_S T}{u_S - v})$ ;  $S_A : (0, 0, 0, \frac{u_S T}{\gamma(u_S - v)})$   
 c) e d)  $\vec{u}_A = \frac{u_S - v}{1 - u_S v / c^2} \hat{j}$
3. a)  $\vec{c}_S : (0, V, c/\gamma)$   
 b)  $|\vec{c}_S| = c$ , o feixe de luz faz um ângulo  $\alpha_S = \text{tg}^{-1}[c/(\gamma v)]$  com o eixo  $y$  e o sentido é ascendente.
4. a)  $\vec{u}_M = L/T \hat{i} + v \hat{j}$   
 b)  $\vec{u}_J = \gamma L/T \hat{i}$



# Capítulo 24

## relatividade: transformações de campos e densidades

### • eletromagnetismo e relatividade

Na teoria da relatividade, as quatro coordenadas de um evento dependem do referencial considerado. Nesta aula e nas seguintes, mostramos que os campos elétrico e magnético também são grandezas dependentes do referencial. Considere, por exemplo, que no referencial  $S_M$  há uma carga  $q$  em repouso. Maria, para em  $S_M$ , observa a existência do campo elétrico desta carga, mas não de campo magnético. No referencial  $S_J$ , que se move com velocidade constante  $\vec{v}$  em relação a  $S_M$ , a carga  $q$  tem velocidade  $-\vec{v}$  e João, parado em  $S_J$ , observa campos elétrico e magnético.

Talvez o exemplo mais famoso desta relatividade dos campos seja a explicação da corrente induzida que se observa quando há movimento relativo entre um ímã e uma espira. Consideremos, por exemplo, um ímã em forma de barra e uma espira circular, como na figura 24.1, e as explicações para a origem da corrente induzida, nos referenciais  $S_I$ , do ímã, e  $S_C$ , da espira. Nos dois referenciais, a corrente que aparece na espira quando há movimento relativo entre os dois corpos, é explicada com base em forças que agem sobre os elétrons, dadas pela expressão de Lorentz:  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ .

Entretanto, para o observador João, no referencial  $S_I$  só existe o campo magnético estático,  $B_T$  criado pelo ímã  $\vec{E}_E$  e a corrente na espira é atribuída a uma força dada por  $\vec{F}_J = q(\vec{v} \times \vec{B}_I)$ . Já no referencial  $S_E$ , a força sobre os elétrons decorre do campo elétrico induzido pela variação temporal do campo magnético do ímã e, portanto, há uma força  $\vec{F}_E = q(\vec{E}_E)$ . Como se trata de um único fenômeno, descrito por dois observadores diferentes, deve haver uma conexão entre as duas explicações e, portanto, entre  $\vec{B}_I$  e  $\vec{E}_E$ .

Esta questão tem grande relevância histórica, pois ela aparece no primeiro parágrafo do artigo intitulado *SOBRE A ELETRODINÂMICA DE CORPOS EM MOVIMENTO*,

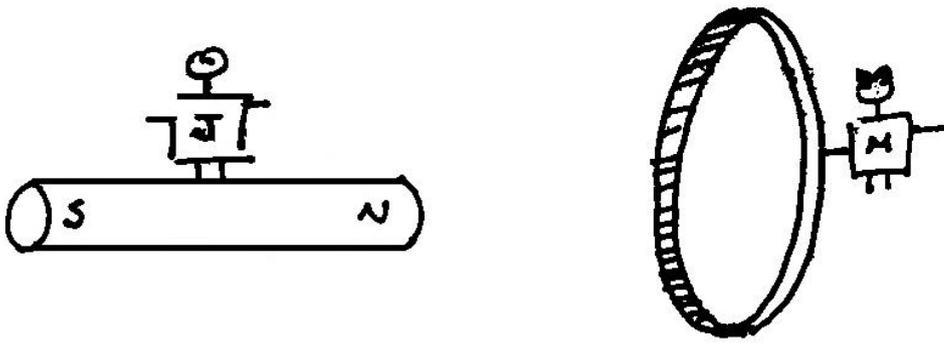


Figura 24.1: O ímã e a espira.

no qual Einstein apresenta a teoria da relatividade restrita, em 1905, conforme a citação do texto original apresentada na aula 17.

O eletromagnetismo é o grande exemplo de uma boa teoria física, em relatividade. Isso significa que as equações de Maxwell e a força de Lorentz devem ser covariantes, ou seja, ter a mesma forma em todos os referenciais que se movem com velocidades relativas constantes. Por isso, a relação geral entre as formas dos campos elétricos e magnéticos, observados em dois referenciais com movimento relativo, é obtida supondo que as equações de Maxwell sejam válidas nestes dois referenciais.

### • a invariância da carga elétrica

A carga elétrica é a entidade central do eletromagnetismo e o seu papel na relatividade é bastante especial: o seu valor independe do referencial. Quaisquer observadores, com velocidades relativas constantes, medem sempre o mesmo valor para a carga de um sistema. Por exemplo, se a carga elétrica deste sistema vale  $q$  no referencial  $S_M$  de Maria, ela também vale  $q$  no referencial  $S_J$  de João. A carga é um invariante relativístico e, por isto, a designamos simplesmente por  $q$ , e não por  $q_M$  ou  $q_J$ . A carga elétrica tem, portanto, um status na relatividade, semelhante ao da velocidade da luz.

Esta característica da carga nos permite concluir, imediatamente, que as *densidades* de carga e de corrente devem depender do referencial. No caso da densidade de carga, isto ocorre porque ela representa uma carga distribuída por um volume e este depende do referencial, pois é afetado pela contração do espaço. Já a densidade de corrente está associada às velocidades das cargas, que também dependem do referencial.

### • a covariância das equações de Maxwell

No referencial  $S_M$ , onde Maria está em repouso, existe um sistema de cargas elétricas, que podem estar tanto em repouso como em movimento e, a partir das equações de Maxwell, ela pode calcular os campos elétrico  $\vec{E}_M$  e magnético  $\vec{B}_M$ . João, por outro lado, está parado no referencial  $S_J$ , que se move com velocidade  $\vec{v} = v\vec{j}$ , relativamente a Maria.

Neste referencial, ele também pode observar o *mesmo* sistema de cargas e pode, por meio das equações de Maxwell, obter os campos  $\vec{E}_J$  e  $\vec{B}_J$ .

Para obter as relações entre as várias grandezas eletromagnéticas nos dois referenciais, supomos que no referencial  $S_J$ , sejam conhecidas as distribuições de cargas e de correntes de um dado sistema físico.

No seu sistema  $S_J$ , João observa os campos  $\vec{E}_J$  e  $\vec{B}_J$ , criados pelas cargas e correntes, e os descreve usando as suas coordenadas espaço-temporais  $\vec{r}_J$  e  $t_J$ , juntamente com as equações de Maxwell que, em  $S_J$ , são dadas pelas expressões:

$$\vec{\nabla}_J \cdot \vec{E}_J(\vec{r}_J, t_J) = \frac{\rho_J(\vec{r}_J, t_J)}{\varepsilon_0}, \quad (24.1)$$

$$\vec{\nabla}_J \times \vec{E}_J(\vec{r}_J, t_J) = - \frac{\partial \vec{B}_J(\vec{r}_J, t_J)}{\partial t_J}, \quad (24.2)$$

$$\vec{\nabla}_J \times \vec{B}_J(\vec{r}_J, t_J) = \mu_0 \vec{j}_J(\vec{r}_J, t_J) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_J(\vec{r}_J, t_J)}{\partial t_J}, \quad (24.3)$$

$$\vec{\nabla}_J \cdot \vec{B}_J(\vec{r}_J, t_J) = 0, \quad (24.4)$$

onde

$$\vec{\nabla}_J = \left[ \frac{\partial}{\partial x_J} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y_J} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z_J} \hat{k} \right]. \quad (24.5)$$

Em  $S_M$ , usando as coordenadas  $\vec{r}_M$  e  $t_M$ , Maria observa os campos  $\vec{E}_M$  e  $\vec{B}_M$  e as distribuições de cargas e correntes  $\rho_M$  e  $\vec{j}_M$ . Em  $S_M$ , os campos também são determinados pelas equações de Maxwell que, agora, têm a seguinte forma:

$$\vec{\nabla}_M \cdot \vec{E}_M(\vec{r}_M, t_M) = \frac{\rho_M(\vec{r}_M, t_M)}{\varepsilon_0}, \quad (24.6)$$

$$\vec{\nabla}_M \times \vec{E}_M(\vec{r}_M, t_M) = - \frac{\partial \vec{B}_M(\vec{r}_M, t_M)}{\partial t_M}, \quad (24.7)$$

$$\vec{\nabla}_M \times \vec{B}_M(\vec{r}_M, t_M) = \mu_0 \vec{j}_M(\vec{r}_M, t_M) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_M(\vec{r}_M, t_M)}{\partial t_M}, \quad (24.8)$$

$$\vec{\nabla}_M \cdot \vec{B}_M(\vec{r}_M, t_M) = 0, \quad (24.9)$$

sendo

$$\vec{\nabla}_M = \left[ \frac{\partial}{\partial x_M} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y_M} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z_M} \hat{k} \right]. \quad (24.10)$$

Ao escrever as equações de Maxwell com a mesma forma matemática nos dois referenciais admitimos, implicitamente, a covariância destas leis físicas. Note que a covariância *não*

significa supor as igualdades entre os campos  $\vec{E}_J$  e  $\vec{E}_M$ , ou entre  $\vec{B}_J$  e  $\vec{B}_M$ , e nem das fontes de cargas  $\rho_J$  e  $\rho_M$  e de correntes  $\vec{j}_J$  e  $\vec{j}_M$ . Na verdade, a covariância das equações de Maxwell significa que as *relações* entre campos e fontes são as mesmas nos dois referenciais. Esta questão é muito importante e o seu significado somente deverá ficar claro depois da discussão dos seus detalhes técnicos.

### • a transformação dos campos

Para relacionar as observações do mesmo sistema físico feitas nos referenciais  $S_M$  e  $S_J$ , supomos que a velocidade de João relativamente a Maria seja  $\vec{v} = v\hat{j}$  e que o evento de referência seja o cruzamento de suas origens:  $S_M : (x_M^R, y_M^R, z_M^R, t_M^R) = (0, 0, 0; 0)$ ;  $S_J : (x_J^R, y_J^R, z_J^R, t_J^R) = (0, 0, 0; 0)$

Neste caso, as transformações de Lorentz são dadas pelas eqs.(??-??):

$$x_J = x_M , \quad (24.10)$$

$$y_J = \gamma(y_M - vt_M) , \quad (24.11)$$

$$z_J = z_M , \quad (24.12)$$

$$t_J = \gamma(t_M - \frac{vy_M}{c^2}) , \quad (24.13)$$

com  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ .

Para obter as propriedades de transformação dos campos consideramos, inicialmente, as equações que não contêm cargas ou correntes, correspondentes às leis de Faraday e Gauss magnética. Em coordenadas cartesianas, as eqs.(24.2) e (24.4), em  $S_J$ , são escritas como

$$\frac{\partial E_{zJ}}{\partial y_J} - \frac{\partial E_{yJ}}{\partial z_J} = - \frac{\partial B_{xJ}}{\partial t_J} , \quad (24.14)$$

$$\frac{\partial E_{xJ}}{\partial z_J} - \frac{\partial E_{zJ}}{\partial x_J} = - \frac{\partial B_{yJ}}{\partial t_J} , \quad (24.15)$$

$$\frac{\partial E_{yJ}}{\partial x_J} - \frac{\partial E_{xJ}}{\partial y_J} = - \frac{\partial B_{zJ}}{\partial t_J} , \quad (24.16)$$

$$\frac{\partial B_{xJ}}{\partial x_J} + \frac{\partial B_{yJ}}{\partial y_J} + \frac{\partial B_{zJ}}{\partial z_J} = 0 . \quad (24.17)$$

No referencial  $S_M$ , por outro lado, as eqs.(24.6) e (24.8) correspondem a

$$\frac{\partial E_{zM}}{\partial y_M} - \frac{\partial E_{yM}}{\partial z_M} = - \frac{\partial B_{xM}}{\partial t_M}, \quad (24.18)$$

$$\frac{\partial E_{xM}}{\partial z_M} - \frac{\partial E_{zM}}{\partial x_M} = - \frac{\partial B_{yM}}{\partial t_M}, \quad (24.19)$$

$$\frac{\partial E_{yM}}{\partial x_M} - \frac{\partial E_{xM}}{\partial y_M} = - \frac{\partial B_{zM}}{\partial t_M}, \quad (24.20)$$

$$\frac{\partial B_{xM}}{\partial x_M} + \frac{\partial B_{yM}}{\partial y_M} + \frac{\partial B_{zM}}{\partial z_M} = 0. \quad (24.21)$$

O nosso problema consiste, agora, em traduzir um destes conjuntos de equações no outro. Para fixar idéias, consideramos o caso  $S_M \rightarrow S_J$ . Com este objetivo, inicialmente relacionamos as coordenadas espaço-temporais dos dois sistemas, usando as transformações de Lorentz. Uma função genérica  $f[x_M, y_M, z_M; t_M]$  das coordenadas do referencial  $S_M$  pode ser reexpressa em termos das coordenadas do referencial  $S_J$  e passa a ser escrita como  $f[x_M(x_J, y_J, z_J, t_J), y_M(x_J, y_J, z_J, t_J), z_M(x_J, y_J, z_J, t_J), t_M(x_J, y_J, z_J, t_J)]$ . As derivadas desta função, nos dois referenciais, são relacionadas pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial}{\partial x_M} = \frac{\partial x_J}{\partial x_M} \frac{\partial}{\partial x_J} + \frac{\partial y_J}{\partial x_M} \frac{\partial}{\partial y_J} + \frac{\partial z_J}{\partial x_M} \frac{\partial}{\partial z_J} + \frac{\partial t_J}{\partial x_M} \frac{\partial}{\partial t_J}, \quad (24.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_M} = \frac{\partial x_J}{\partial y_M} \frac{\partial}{\partial x_J} + \frac{\partial y_J}{\partial y_M} \frac{\partial}{\partial y_J} + \frac{\partial z_J}{\partial y_M} \frac{\partial}{\partial z_J} + \frac{\partial t_J}{\partial y_M} \frac{\partial}{\partial t_J}, \quad (24.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_M} = \frac{\partial x_J}{\partial z_M} \frac{\partial}{\partial x_J} + \frac{\partial y_J}{\partial z_M} \frac{\partial}{\partial y_J} + \frac{\partial z_J}{\partial z_M} \frac{\partial}{\partial z_J} + \frac{\partial t_J}{\partial z_M} \frac{\partial}{\partial t_J}, \quad (24.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_M} = \frac{\partial x_J}{\partial t_M} \frac{\partial}{\partial x_J} + \frac{\partial y_J}{\partial t_M} \frac{\partial}{\partial y_J} + \frac{\partial z_J}{\partial t_M} \frac{\partial}{\partial z_J} + \frac{\partial t_J}{\partial t_M} \frac{\partial}{\partial t_J}. \quad (24.25)$$

Das relações (24.10)-(25.14), decorrem as igualdades:

$$\frac{\partial y_J}{\partial x_M} = \frac{\partial z_J}{\partial x_M} = \frac{\partial t_J}{\partial x_M} = \frac{\partial x_J}{\partial y_M} = \frac{\partial z_J}{\partial y_M} = 0 \quad (24.26)$$

$$\frac{\partial x_J}{\partial z_M} = \frac{\partial y_J}{\partial z_M} = \frac{\partial t_J}{\partial z_M} = \frac{\partial x_J}{\partial t_M} = \frac{\partial z_J}{\partial t_M} = 0, \quad (24.27)$$

$$\frac{\partial x_J}{\partial x_M} = \frac{\partial z_J}{\partial z_M} = 1, \quad (24.28)$$

$$\frac{\partial y_J}{\partial y_M} = \frac{\partial t_J}{\partial t_M} = \gamma, \quad (24.29)$$

$$\frac{\partial t_J}{\partial y_M} = - \gamma \frac{v}{c^2}, \quad (24.30)$$

$$\frac{\partial y_J}{\partial t_M} = - \gamma v. \quad (24.31)$$

Substituindo estes resultados nas eqs.(24.22)-(24.25), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x_M} = \frac{\partial}{\partial x_J}, \quad (24.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_M} = \gamma \frac{\partial}{\partial y_J} - \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t_J}, \quad (24.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_M} = \frac{\partial}{\partial z_J}, \quad (24.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_M} = \gamma \frac{\partial}{\partial t_J} - \gamma v \frac{\partial}{\partial y_J}. \quad (24.35)$$

Depois desses preparativos, voltamos às duas equações de Maxell consideradas, as leis de Faraday e Gauss magnética, equações (24.18-24.21) e, usando (24.32-24.35) e reordenando os termos, as reescrevemos como

$$\frac{\partial}{\partial y_J} [\gamma E_{yM} - \gamma v B_{xM}] - \frac{\partial}{\partial z_J} [E_{yM}] = - \frac{\partial}{\partial t_J} \left[ \gamma B_{xM} - \gamma \frac{v}{c^2} E_{zM} \right], \quad (24.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_J} [E_{xM}] - \frac{\partial}{\partial x_J} [E_{zM}] = - \frac{\partial}{\partial t_J} [\gamma B_{yM}] + \left\{ \frac{\partial}{\partial y_J} [\gamma v B_{yM}] \right\}, \quad (24.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_J} [E_{yM}] - \frac{\partial}{\partial y_J} [\gamma E_{xM} + \gamma v B_{zM}] = - \frac{\partial}{\partial t_J} \left[ \gamma B_{zM} + \gamma \frac{v}{c^2} E_{xM} \right], \quad (24.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_J} [B_{xM}] + \frac{\partial}{\partial y_J} [\gamma B_{yM}] - \left\{ \frac{\partial}{\partial t_J} \left[ \gamma \frac{v}{c^2} B_{yM} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial z_J} [B_{zM}] = 0. \quad (24.39)$$

As relações entre os campos nos dois referenciais são obtidas comparando este conjunto de resultados com as equações de Maxwell no sistema  $S_J$ . Para encontrar a correspondência entre as várias componentes dos campos, consideramos isoladamente os termos sujeitos às mesmas derivadas das coordenadas. Assim, usando as eqs.(24.14) e (24.36) e comparando os termos operados por  $\partial/\partial y_J$ ,  $\partial/\partial z_J$  e  $\partial/\partial t_J$ , identificamos

$$E_{zJ} = \gamma (E_{zM} - v B_{xM}), \quad (24.40)$$

$$E_{yJ} = E_{yM}, \quad (24.41)$$

$$B_{xJ} = \gamma \left( B_{xM} - \frac{v}{c^2} E_{zM} \right). \quad (24.42)$$

É natural estender este procedimento às demais equações. Entretanto, ao tentarmos fazer isto com as eqs.(24.15) e (24.37), encontramos uma dificuldade, o termo envolvendo  $\partial/\partial y_J$ , indicado entre chaves, ocorre em apenas uma delas. Esta dificuldade pode ser superada notando que a eq.(23.40) também contém um termo indicado entre chaves sem equivalente na eq.(24.17). Isto permite que os termos indesejáveis possam ser eliminados por meio de combinações lineares das eqs.(24.37) e (24.39).

Multiplicando a eq.(24.37) por  $\gamma$ , a eq.(24.39) por  $\gamma v$  e somando os resultados, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial z_J} [\gamma E_{xM} + \gamma v B_{zM}] - \frac{\partial}{\partial x_J} [\gamma E_{zM} - \gamma v B_{xM}] = - \frac{\partial}{\partial t_J} [B_{yM}] , \quad (24.43)$$

depois de usar  $\gamma^2(1 - v^2/c^2) = 1$ . A comparação com a eq.(24.16) nos fornece, além da eq.(24.40), as novas relações

$$E_{xJ} = \gamma (E_{xM} + v B_{zM}) , \quad (24.44)$$

$$B_{yJ} = B_{yM} . \quad (24.45)$$

Um outro resultado é obtido somando as eqs.(24.37) e (24.39), multiplicadas por  $\gamma v/c^2$  e  $\gamma$ , respectivamente:

$$\frac{\partial}{\partial x_J} \left[ \gamma B_{xM} - \gamma \frac{v}{c^2} E_{zM} \right] + \frac{\partial}{\partial y_J} [B_{yM}] + \frac{\partial}{\partial z_J} \left[ \gamma B_{zM} + \gamma \frac{v}{c^2} E_{xM} \right] = 0 . \quad (24.46)$$

Esta expressão tem a mesma estrutura que a lei de Gauss magnética, eq.(24.19), e fornece

$$B_{zJ} = \gamma \left( B_{zM} + \frac{v}{c^2} E_{xM} \right) , \quad (24.47)$$

além das eqs.(24.43) e (24.46).

Finalmente, notamos que a comparação das eqs.(24.18) e (24.39) permite-nos apenas obter um vez mais as eqs.(24.42), (24.45) e (24.48).

### • resumo parcial: campos

As equações (24.40)-(24.42), (24.44), (24.45) e (24.47) constituem as relações entre as componentes dos campos nos referenciais  $S_M$  e  $S_J$ , que desejamos obter. Colocando todas elas juntas, escrevemos

$$E_{xJ} = \gamma (E_{xM} + v B_{zM}) , \quad (24.48)$$

$$E_{yJ} = E_{yM} , \quad (24.49)$$

$$E_{zJ} = \gamma (E_{zM} - v B_{xM}) , \quad (24.50)$$

$$B_{xJ} = \gamma \left( B_{xM} - \frac{v}{c^2} E_{zM} \right) , \quad (24.51)$$

$$B_{yJ} = B_{yM} , \quad (24.52)$$

$$B_{zJ} = \gamma \left( B_{zM} + \frac{v}{c^2} E_{xM} \right) . \quad (24.53)$$

Estes resultados mostram que as componentes do campo elétrico e do campo magnético na direção do movimento permanecem inalteradas, enquanto que as perpendiculares ao movimento mudam. Por isso, é conveniente escrever  $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$  e  $\vec{B} = \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp}$ , onde os

símbolos  $\parallel$  e  $\perp$  indicam as componentes dos campos paralelas e perpendiculares ao vetor velocidade. Neste caso, as transformações dos campos podem ser escritas de forma mais compacta, como segue:

$$\vec{E}_{\parallel J} = \vec{E}_{\parallel M}, \quad (24.54)$$

$$\vec{E}_{\perp J} = \gamma \left[ \vec{E}_{\perp M} + \vec{v} \times \vec{B}_M \right], \quad (24.55)$$

$$\vec{B}_{\parallel J} = \vec{B}_{\parallel M}, \quad (24.56)$$

$$\vec{B}_{\perp J} = \gamma \left[ \vec{B}_{\perp M} - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}_M \right], \quad (24.57)$$

pois  $\vec{v} \times \vec{E}_{\parallel M} = 0$  e  $\vec{v} \times \vec{B}_{\parallel M} = 0$ . As transformadas inversas podem ser obtidas, como de costume, simplesmente trocando o sinal da velocidade e os rótulos  $J$  e  $M$ :

$$E_{xM} = \gamma (E_{xJ} - v B_{zJ}), \quad (24.58)$$

$$E_{yM} = E_{yJ}, \quad (24.59)$$

$$E_{zM} = \gamma (E_{zJ} + v B_{xJ}), \quad (24.60)$$

$$B_{xM} = \gamma \left( B_{xJ} + \frac{v}{c^2} E_{zJ} \right), \quad (24.61)$$

$$B_{yM} = B_{yJ}, \quad (24.62)$$

$$B_{zM} = \gamma \left( B_{zJ} - \frac{v}{c^2} E_{xJ} \right) \quad (24.63)$$

ou, alternativamente,

$$\vec{E}_{\parallel M} = \vec{E}_{\parallel J}, \quad (24.64)$$

$$\vec{E}_{\perp M} = \gamma \left[ \vec{E}_{\perp J} - \vec{v} \times \vec{B}_J \right], \quad (24.65)$$

$$\vec{B}_{\parallel M} = \vec{B}_{\parallel J}, \quad (24.66)$$

$$\vec{B}_{\perp M} = \gamma \left[ \vec{B}_{\perp J} + \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}_J \right]. \quad (24.67)$$

### • as transformações das densidades de carga e corrente

As relações entre as densidades de carga e de corrente nos referenciais  $S_J$  e  $S_M$  podem ser obtidas a partir das duas equações de Maxwell não utilizadas na seção anterior, que representam as leis de Gauss elétrica e de Ampère-Maxwell.

No referencial  $S_J$ , em coordenadas cartesianas, as eqs.(24.1) e (24.3) são escritas como

$$\frac{\partial E_x^J}{\partial x_J} + \frac{\partial E_y^J}{\partial y_J} + \frac{\partial E_z^J}{\partial z_J} = \frac{\rho^J}{\varepsilon_0}, \quad (24.68)$$

$$\frac{\partial B_z^J}{\partial y_J} - \frac{\partial B_y^J}{\partial z_J} = \mu_0 j_x^J + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_x^J}{\partial t_J}, \quad (24.69)$$

$$\frac{\partial B_x^J}{\partial z_J} - \frac{\partial B_z^J}{\partial x_J} = \mu_0 j_y^J + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y^J}{\partial t_J}, \quad (24.70)$$

$$\frac{\partial B_y^J}{\partial x_J} - \frac{\partial B_x^J}{\partial y_J} = \mu_0 j_z^J + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_z^J}{\partial t_J}. \quad (24.71)$$

Já no referencial  $S_M$ , as eqs.(23.7) e (23.9) são dadas por

$$\frac{\partial E_x^M}{\partial x_M} + \frac{\partial E_y^M}{\partial y_M} + \frac{\partial E_z^M}{\partial z_M} = \frac{\rho^M}{\varepsilon_0}, \quad (24.72)$$

$$\frac{\partial B_z^M}{\partial y_M} - \frac{\partial B_y^M}{\partial z_M} = \mu_0 j_x^M + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_x^M}{\partial t_M}, \quad (24.73)$$

$$\frac{\partial B_x^M}{\partial z_M} - \frac{\partial B_z^M}{\partial x_M} = \mu_0 j_y^M + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y^M}{\partial t_M}, \quad (24.74)$$

$$\frac{\partial B_y^M}{\partial x_M} - \frac{\partial B_x^M}{\partial y_M} = \mu_0 j_z^M + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_z^M}{\partial t_M}. \quad (24.75)$$

Para obter as propriedades de transformação das densidades de carga e de corrente, substituímos as expressões (24.32)-(24.35) nas equações (24.72)-(24.75), do referencial  $S_M$  e, usando  $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$ , obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x_J} [E_x^M] + \frac{\partial}{\partial y_J} [\gamma E_y^M] + \frac{\partial}{\partial z_J} [E_z^M] = \frac{\rho^M}{\varepsilon_0} + \left\{ \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t_J} [\gamma v E_y^M] \right\}, \quad (24.76)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_J} \left[ \gamma B_z^M + \gamma \frac{v}{c^2} E_x^M \right] - \frac{\partial}{\partial z_J} [B_y^M] = \mu_0 j_x^M + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t_J} [\gamma E_x^M + \gamma v B_z^M], \quad (24.77)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_J} [B_x^M] - \frac{\partial}{\partial x_J} [B_z^M] + \left\{ \frac{\partial}{\partial y_J} \left[ \gamma \frac{v}{c^2} E_y^M \right] \right\} = \mu_0 j_y^M + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t_J} [\gamma E_y^M], \quad (24.78)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_J} [B_y^M] - \frac{\partial}{\partial y_J} \left[ \gamma B_x^M - \gamma \frac{v}{c^2} E_z^M \right] = \mu_0 j_z^M + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t_J} [\gamma E_z^M - \gamma v B_x^M]. \quad (24.79)$$

Para prosseguir, utilizamos as eqs.(24.48)-(24.53) e expressamos as componentes de  $\vec{E}^M$  e  $\vec{B}^M$  em termos das de  $\vec{E}^J$  e  $\vec{B}^J$ . No caso das eqs.(24.77) e (24.79), isto pode ser

feito imediatamente e temos

$$\frac{\partial}{\partial y_J} [B_z^J] - \frac{\partial}{\partial z_J} [B_y^J] = \mu_0 j_x^M + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t_J} [E_x^J] , \quad (24.80)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_J} [B_y^J] - \frac{\partial}{\partial y_J} [B_x^J] = \mu_0 j_z^M + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t_J} [E_z^J] . \quad (24.81)$$

Comparando com as eqs.(24.69) e (24.61), obtemos as relações entre duas das componentes de  $\vec{j}$ :

$$j_x^J = j_x^M , \quad (24.82)$$

$$j_z^J = j_z^M . \quad (24.83)$$

No caso das eqs.(24.76) e (24.78), os termos entre chaves impedem a comparação direta com as equações no referencial  $S_J$  e, como anteriormente, precisamos eliminar estes termos por meio de combinações lineares. Assim, multiplicando a eq.(24.78) por  $\gamma$  e somando com a eq.(24.76) multiplicada por  $-\gamma v/c^2$ , encontramos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z_J} \left[ \gamma B_x^M - \gamma \frac{v}{c^2} E_z^M \right] - \frac{\partial}{\partial x_J} \left[ \gamma B_z^M + \gamma \frac{v}{c^2} E_x^M \right] \\ &= \mu_0 \left[ \gamma (j_y^M - v \rho^M) \right] + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t_J} [E_y^M] . \end{aligned} \quad (24.83)$$

Usando  $\gamma^2 (1 - v^2/c^2) = 1$ , os resultados (24.48)-(24.53) e comparando com a eq.(24.70), temos

$$j_y^J = \gamma (j_y^M - v \rho^M) . \quad (24.84)$$

Finalmente, multiplicando as eqs.(24.76) e (24.78) por  $\gamma$  e  $-\gamma v$ , respectivamente, temos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_J} [\gamma E_x^M + \gamma v B_z^M] + \frac{\partial}{\partial y_J} [E_y^M] + \frac{\partial}{\partial z_J} [\gamma E_z^M - \gamma v B_x^M] \\ &= \frac{\gamma}{\varepsilon_0} (\rho^M - v j_y^M) , \end{aligned} \quad (24.84)$$

e a comparação com a eq.(24.68) fornece

$$\rho^J = \gamma \left( \rho^M - \frac{v}{c^2} j_y^M \right) . \quad (24.85)$$

### • resumo parcial: densidades

As relações entre as densidades de carga e corrente nos sistemas  $S_M$  e  $S_J$  são dadas pelas eqs.(24.82), (24.83), (24.84) e (24.84) e reescritas abaixo:

$$j_x^J = j_x^M , \quad (24.86)$$

$$j_y^J = \gamma (j_y^M - v \rho^M) , \quad (24.87)$$

$$j_z^J = j_z^M . \quad (24.88)$$

$$\rho^J = \gamma \left( \rho^M - \frac{v}{c^2} j_y^M \right) . \quad (24.89)$$

Estes resultados mostram que as componentes da densidade de corrente perpendiculares ao *vetor* velocidade não se alteram, enquanto que a paralela e a densidade de carga combinam-se entre si.

As transformações inversas, que permitem escrever as grandezas  $S_M$  a partir das de  $S_J$ , são obtidas trocando o sinal de  $v$  e os rótulos  $M$  e  $J$ :

$$j_x^M = j_x^J , \quad (24.90)$$

$$j_y^M = \gamma (j_y^J + v \rho^J) , \quad (24.91)$$

$$j_z^M = j_z^J , \quad (24.92)$$

$$\rho^M = \gamma \left( \rho^J + \frac{v}{c^2} j_y^J \right) . \quad (24.93)$$

É importante notar que as equações que regem as transformações das densidades de carga e corrente são totalmente semelhantes às transformações de Lotentz para  $\vec{r}$  e  $t$ , apresentadas na aula 20, sendo  $\vec{j}$  análogo a  $\vec{r}$  e  $\rho$ , análogo a  $t$ .

### • covariância e leis físicas

Uma das características mais notáveis do eletromagnetismo é que as suas leis básicas, agrupadas nas equações de Maxwell, entre 1860 e 1870, são compatíveis com a relatividade restrita, uma teoria proposta em 1905. A evidência desta compatibilidade é que os conjuntos de expressões relacionando os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  e as densidades  $\rho$  e  $\vec{j}$  nos referenciais  $S_J$  e  $S_M$  permitem que as equações de Maxwell tenham a mesma forma em ambos. Do ponto de vista histórico, a teoria proposta por Einstein foi baseada no eletromagnetismo, como indica o próprio título do seu artigo de 1905: “*SOBRE A ELETRODINÂMICA DOS CORPOS EM MOVIMENTO*”. Depois da relatividade, as equações de Maxwell adquiriram o status de uma grande teoria física, pois elas são válidas em qualquer referencial inercial.

Por outro lado, a relatividade mudou a maneira formal de encarar o eletromagnetismo, uma vez que unificou tanto as densidades de carga e corrente como os campos elétrico e magnético, em entidades maiores. Um aspecto muito interessante deste novo modo de olhar o eletromagnetismo diz respeito ao conceito de lei física. Até o momento, vimos apresentando as equações de Maxwell como um conjunto de quatro leis: Gauss elétrica, Faraday, Ampère-Maxwell e Gauss magnética. Entretanto, como mostramos na parte desta aula onde discutimos as transformações dos campos, as leis da Faraday e Gauss magnética não são independentemente covariantes, pois as três equações (24.18)-(24.20) não se transformam nas três equações (24.14)-(24.18) e, também a eq.(24.21) não se transforma na eq.(24.17). Entretanto, o conjunto das quatro eqs.(24.18)-(24.21) se transforma no conjunto das eqs.(24.14)-(24.17). Isso indica que, na relatividade, as leis de Faraday e Gauss magnética passam a ser componentes de uma única lei maior. Com as leis de Gauss elétrica e de Ampère-Maxwell acontece algo análogo, pois a covariância relativística somente ocorre entre os dois conjuntos de quatro equações, (24.68)-(24.71) e (24.72)-(24.75). Assim, na relatividade, as quatro equações de Maxwell se fundem em duas leis independentes.

### • exercícios

1. Usando os resultados obtidos nesta aula, mostre que as combinações de campos  $\vec{E}^2 - \vec{B}^2$  e  $\vec{E} \cdot \vec{B}$  são invariantes por mudança de referencial. Para tanto, basta mostrar que  $(\vec{E}^J)^2 - (\vec{B}^J)^2 = (\vec{E}^M)^2 - (\vec{B}^M)^2$  e que  $\vec{E}^J \cdot \vec{B}^J = \vec{E}^M \cdot \vec{B}^M$ . Essas invariâncias são muito importantes. Você consegue imaginar porquê?

2. Usando os resultados dados pelas eqs.(24.32)-(24.35) e (24.48)-(24.53) mostre que, por uma mudança de referencial, a lei de Faraday em  $S_M$  se transforma numa combinação linear das leis de Faraday e de Gauss magnética em  $S_J$ . Obtenha o valor dos coeficientes desta combinação e interprete os seus significados no limite  $v \rightarrow 0$ .

• resposta

$$2. [\vec{\nabla}_M \times \vec{E}^M = -\frac{\partial B^M}{\partial t_M}] \longrightarrow \gamma [\vec{\nabla}_J \times \vec{E}^J = -\frac{\partial B^J}{\partial t_J}] - \gamma v [\vec{\nabla}_J \cdot \vec{B}^J = 0].$$



## Capítulo 25

# eletromagnetismo: mudanças de referencial I

### • exemplo 1

João viaja num trem, onde existe uma barra em forma de paralelepípedo, de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , na qual uma quantidade de carga  $Q$  está distribuída uniformemente. Este trem se move para a direita em relação a Maria, que está parada numa estação, com velocidade  $\vec{v} = v\vec{j}$ , ao longo do eixo  $y$ . Os referenciais  $S_J$  e  $S_M$ , onde estão João e Maria, são mostrados na Fig. 25.1. Neste exemplo, desejamos determinar as densidades de carga e corrente observadas por João e Maria.

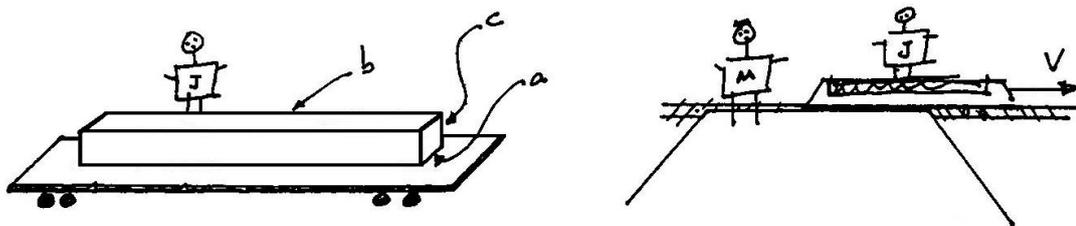


Figura 25.1: Os referenciais de  $S_J$  e  $S_M$ .

Como a barra está em repouso em relação a João, as densidades em  $S_J$  são dadas por

$$\rho^J = \frac{Q}{abc}, \quad (25.1)$$

$$\vec{j}^J = 0. \quad (25.2)$$

Estes resultados e as eqs.(23.93)-(23.96) permitem obter as densidades em relação a Maria:

$$j_x^M = 0, \quad (25.3)$$

$$j_y^M = \gamma v \rho^J = v \frac{\gamma Q}{abc}, \quad (25.4)$$

$$j_z^M = 0, \quad (25.5)$$

$$\rho^M = \gamma \rho^J = \frac{\gamma Q}{abc}. \quad (25.6)$$

O resultado para  $\rho^M$  pode ser explicado notando que, no referencial  $S_M$ , o lado da barra paralelo ao movimento relativo aparece contraído por um fator  $\gamma$  e o volume da barra é, portanto, dado por  $a(b/\gamma)c$ . Por outro lado, a quantidade de carga  $Q$  é um invariante relativístico e o seu valor é o mesmo para qualquer observador. Assim, a densidade de carga para Maria é, de fato, dada por  $\rho^M = Q/a(b/\gamma)c = \gamma Q/abc$ .

O resultado obtido para a densidade de corrente também pode ser explicado em termos geométricos. Para tanto, lembramos que, no referencial  $S_M$ , a corrente elétrica  $I^M$  é dada pela quantidade de carga  $dQ$ , que atravessa uma superfície matemática perpendicular à velocidade, num intervalo de tempo  $dt_M$ . Na Fig. 25.2 são representadas as situações nos instantes  $t_M$  e  $t_M + dt_M$ , onde a região hachurada corresponde à parte da barra que atravessou a superfície matemática no intervalo de tempo  $dt_M$ . O volume desta região é dado por  $a(v dt_M)c$  e contém a carga  $dQ = \rho^M a(v dt_M)c$ . Portanto, a corrente em  $S_M$  vale

$$I^M = \frac{dQ}{dt_M} = ac v \rho^M = v \frac{\gamma Q}{b}. \quad (25.7)$$

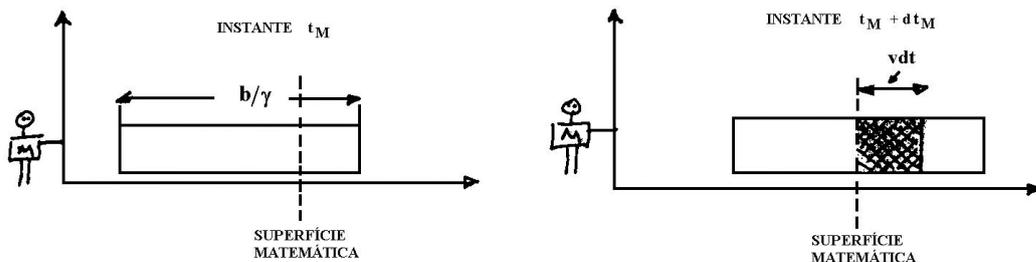


Figura 25.2: A barra no referencial  $S_M$ , em dois instantes diferentes.

A densidade superficial de corrente é, portanto, um vetor paralelo ao eixo  $y$ , cujo módulo vale

$$j_y^M = \frac{I^M}{ac} = v \frac{\gamma Q}{abc}. \quad (25.8)$$

Esta densidade de corrente está relacionada à densidade de carga por

$$\vec{j}^M = \vec{v} \rho^M. \quad (25.9)$$

## • exemplo 2

É dado um capacitor plano, no vácuo, formado por duas placas paralelas, quadradas, de lados  $L$ , separadas pela distância  $d$  e carregadas com cargas  $+Q$  e  $-Q$ . Consideramos, neste exemplo, o caso em que este capacitor está em repouso no referencial  $S_J$ , com as placas dispostas paralelamente ao plano  $xy$ . Este referencial, por sua vez, move-se para a direita em relação  $S_M$ , e o nosso problema consiste em determinar os campos e densidades de carga e corrente nos dois referenciais. Esta situação está ilustrada na Fig. 25.3.

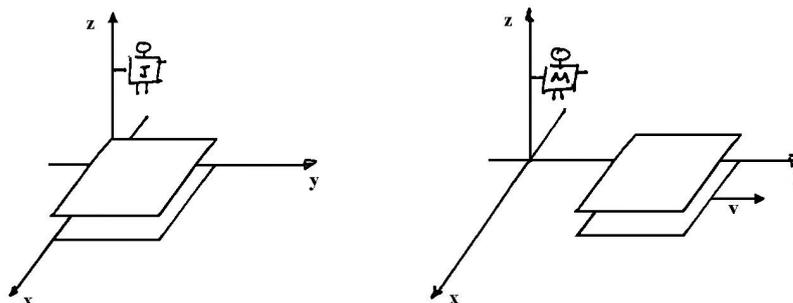


Figura 25.3: O capacitor nos referenciais  $S_J$  e  $S_M$ .

Neste problema, podemos antecipar que, no sistema  $S_J$ , existe apenas um campo eletrostático, pois as placas estão em repouso. Já no referencial  $S_M$ , o capacitor se move, arrastando consigo as cargas e dando origem a correntes. Por isso, Maria observa campos elétricos e magnéticos.

Para descrever estes campos, inicialmente colocamo-nos no referencial  $S_J$ . Como não há cargas em movimento e nem campos elétricos variáveis com o tempo, o campo magnético vale  $\vec{B}^J = 0$ . Se considerarmos que a distância  $d$ , entre as placas, é muito menor do que o comprimento  $L$  dos lados, podemos desprezar os efeitos de borda e supor que o campo elétrico seja nulo fóra do capacitor. Neste caso,  $\vec{E}^J$  pode ser calculado por meio da lei de Gauss. Para tanto, tomamos uma superfície gaussiana (matemática) na forma de um cilindro de raio  $r$  e altura  $a$ , com a base superior dentro do condutor e a inferior entre as placas, como indicado na Fig. 25.4.

O fluxo do campo elétrico através da parte da superfície gaussiana imersa no condutor é nulo porque, nesta região,  $\vec{E}^J = 0$ . O mesmo acontece com o fluxo através da parede lateral do cilindro, uma vez que aí a sua normal é perpendicular a  $\vec{E}^J$ . Assim, o fluxo através de toda a superfície é dado por

$$\Phi_{E^J} = \pi r^2 E^J . \quad (25.10)$$

Por outro lado, a lei de Gauss permite escrever

$$\Phi_{E^J} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\pi r^2 \sigma^J}{\varepsilon_0} , \quad (25.11)$$

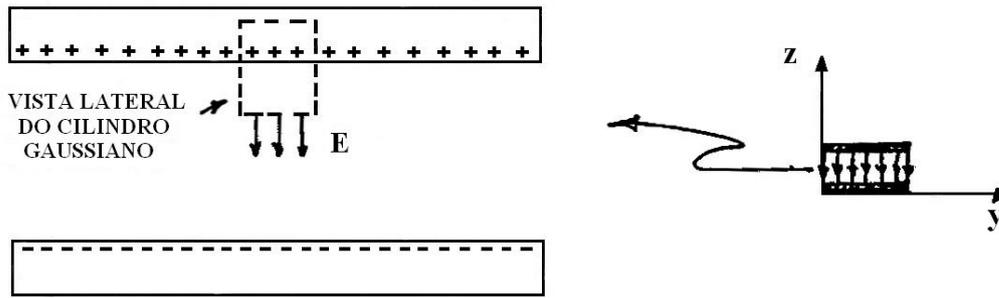


Figura 25.4: O capacitor no referencial  $S_J$ .

onde  $\sigma^J$  é a densidade superficial de cargas, dada por

$$\sigma^J = \frac{Q}{L^2} \tag{25.12}$$

Deste modo obtemos, para o módulo do campo elétrico

$$E^J = \frac{\sigma^J}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 L^2} e. \tag{25.13}$$

O vetor campo elétrico, quando se desprezam os efeitos de borda, vale  $E^J = 0$ , fora das placas, e

$$\vec{E} = - \frac{Q}{\epsilon_0 L^2} \vec{k}, \tag{25.14}$$

entre elas.

Para obter os campos e as correntes no referencial  $S_M$ , existem dois procedimentos alternativos:

1. calculam-se as densidades de carga e corrente, por meio dos resultados obtidos na aula 24 e, em seguida, calculam-se os campos usando as equações de Maxwell. Simbolicamente, este procedimento é representado por  $(\rho^J, \vec{j}^J) \rightarrow (\rho^M, \vec{j}^M) \rightarrow (\vec{E}^M, \vec{B}^M)$ .
2. calculam-se os campos, usando os resultados da aula 24 e, a partir deles, as densidades, por meio das equações de Maxwell. Ou seja,  $(\vec{E}^J, \vec{B}^J) \rightarrow (\vec{E}^M, \vec{B}^M) \rightarrow (\rho^M, \vec{j}^M)$ .

Os resultados obtidos destes dois modos são sempre totalmente equivalentes, indicando a completa consistência entre as regras de mudança de referencial e as equações de Maxwell. Na verdade, é precisamente este o significado da covariância das leis básicas do eletromagnetismo. Para deixar evidente esta equivalência calculamos, em seguida, as grandezas no referencial  $S_M$ , através dos dois procedimentos.

**procedimento 1:**  $(\rho^J, \vec{j}^J) \rightarrow (\rho^M, \vec{j}^M) \rightarrow (\vec{E}^M, \vec{B}^M)$

O primeiro passo ao longo deste caminho é conhecer as densidades no referencial  $S_M$ , a partir dos dados no referencial  $S_J$ . Existe, entretanto, um pequeno problema preliminar, uma vez que as leis de transformação obtidas na aula anterior envolvem densidades *volumétricas* de carga, enquanto que os dados do capacitor referem-se a densidades *superficiais* de carga. Para relacionar estas duas grandezas, notamos que uma densidade superficial de carga corresponde, na verdade, a um conjunto de cargas distribuído por uma região de espessura muito pequena. No caso do nosso capacitor plano, as cargas estão predominantemente nas superfícies internas das placas, como indicado na Fig. 25.5.

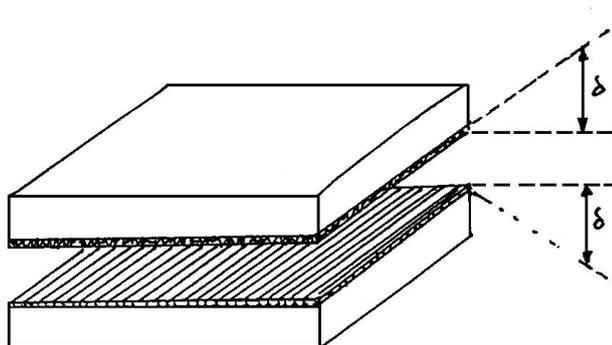


Figura 25.5: As cargas no capacitor plano.

Chamando de  $\delta$  a espessura desta camada de cargas e lembrando que a quantidade de carga nela contida é  $Q$ , podemos escrever

$$Q = \sigma^J L^2 = \rho^J \delta L^2, \quad (25.15)$$

e, portanto,

$$\rho^J = \frac{\sigma^J}{\delta}. \quad (25.16)$$

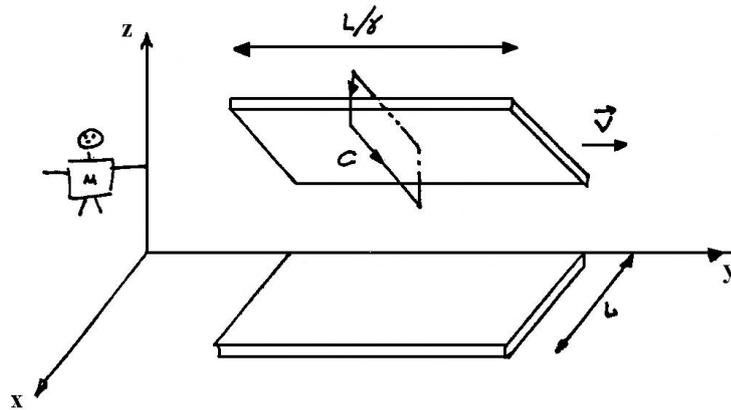
As densidades volumétricas de carga e corrente na placa superior são  $\rho^J = Q/\delta L^2$  e  $\vec{j}^J = 0$ . Usando as eqs. (24.37)-(24.40), obtemos

$$\rho^M = \gamma \rho^J = \frac{\gamma Q}{\delta L^2}, \quad (25.17)$$

$$\vec{j}^M = \vec{v} \frac{\gamma Q}{\delta L^2}. \quad (25.18)$$

Como no exemplo anterior,  $\rho^M$  incorpora o efeito de contração das placas e  $\vec{j}^M = \vec{v} \rho^M$ , pois o capacitor tem as características indicadas na Fig. 25.6.

Para calcular os campos no referencial  $S_M$ , é conveniente reescrever estes resultados


 Figura 25.6: O capacitor no referencial  $S_M$ .

em função da densidade superficial de carga  $\sigma^J$  e da corrente elétrica. Para tanto, multiplicamos estas duas expressões por  $\delta$  e  $\delta L$ , respectivamente, e obtemos

$$\sigma^M = \gamma \sigma^J = \gamma \frac{Q}{L^2}, \quad (25.19)$$

$$I^M = v \gamma \frac{Q}{L}. \quad (25.20)$$

O campo elétrico no referencial de Maria aponta na direção  $-\vec{k}$  e o seu módulo é determinado a partir da lei de Gauss elétrica, usando uma superfície como a da Fig. 25.4, e dado por

$$E^M = \frac{\sigma^M}{\epsilon_0} = \frac{\gamma Q}{\epsilon_0 L^2}. \quad (25.21)$$

Como no caso da linha de transmissão, o campo  $\vec{B}^M$  é muito mais intenso na região entre as placas e o uso da regra da mão direita permite-nos concluir que ele aponta na direção  $-\vec{i}$ . O seu módulo é obtido por meio da lei de Ampère aplicada ao caminho  $C$ , mostrado na Fig. 25.6 e vale

$$B^M = \mu_0 I^M = \mu_0 \frac{v \gamma Q}{L}. \quad (25.22)$$

Assim, os campos que Maria observa no interior do capacitor são dados pelos vetores

$$\vec{E}^M = -\frac{\gamma Q}{\epsilon_0 L^2} \vec{k}, \quad (25.23)$$

$$\vec{B}^M = -\mu_0 v \frac{\gamma Q}{L^2} \vec{i}. \quad (25.24)$$

A configuração dos campos no referencial de Maria é mostrada na Fig. 25.7.

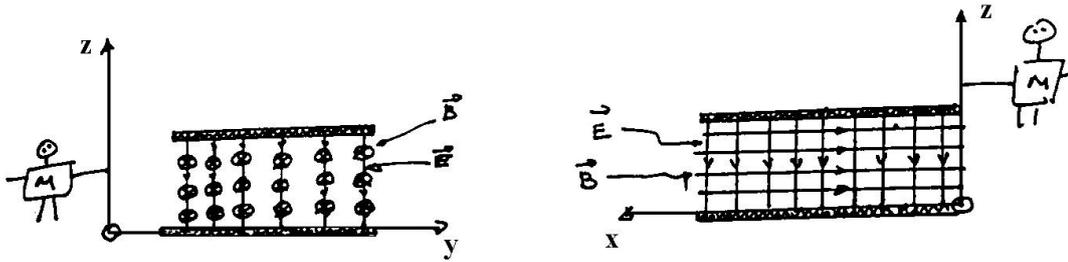


Figura 25.7: Os campos  $\vec{E}^M$  e  $\vec{B}^M$  no referencial de Maria.

**procedimento 2:**  $(\rho^J, \vec{j}^J) \rightarrow (\vec{E}^J, \vec{B}^J) \rightarrow (\vec{E}^M, \vec{B}^M) \rightarrow (\rho^M, \vec{j}^M)$

Uma outra maneira possível para chegar aos resultados dados pelas eqs.(25.19)-(25.20) e (25.23)-(25.24) consiste em usar diretamente as transformações dos campos, obtidas na aula anterior. Para tanto, partimos dos campos no referencial de João, que são dados por

$$\vec{E}^J = -\frac{Q}{\varepsilon_0 L^2} \vec{k}, \quad (25.25)$$

$$\vec{B}^J = 0, \quad (25.26)$$

quando se desprezam os efeitos de borda.

Utilizando as relações entre os campos nos referenciais  $S_J$  e  $S_M$ , dadas pelas eqs.(24.64)-(24.67),

$$\vec{E}_{\parallel}^M = \vec{E}_{\parallel}^J, \quad \vec{E}_{\perp}^M = \gamma \left[ \vec{E}_{\perp}^J - \vec{v} \times \vec{B}^J \right],$$

$$\vec{B}_{\parallel}^M = \vec{B}_{\parallel}^J, \quad \vec{B}_{\perp}^M = \gamma \left[ \vec{B}_{\perp}^J + \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}^J \right],$$

obtemos

$$\vec{E}^M = (0, 0, \gamma E^J) = \left( 0, 0, -\frac{\gamma Q}{\varepsilon_0 L^2} \right), \quad (25.25)$$

$$\vec{B}^M = (v E^J / c^2, 0, 0) = \left( -\frac{\mu_0 v \gamma Q}{L^2}, 0, 0 \right), \quad (25.26)$$

onde usamos  $c^2 \varepsilon_0 = 1/\mu_0$ . Estes resultados são idênticos aos obtidos anteriormente. A partir deles, podemos obter novamente as densidades de carga e corrente, utilizando as eqs.(25.21) e (25.22).

Neste exemplo, mostramos que os dois procedimentos para o cálculo dos campos e das densidades são totalmente equivalentes. Por isso, num dado problema, a escolha de um dos caminhos é motivada apenas por critérios de conveniência.

• exemplo 3

Estudamos aqui o comportamento do mesmo capacitor considerado no exemplo anterior só que, agora, ele tem as placas dispostas perpendicularmente ao movimento, como mostra a Fig. 25.8.

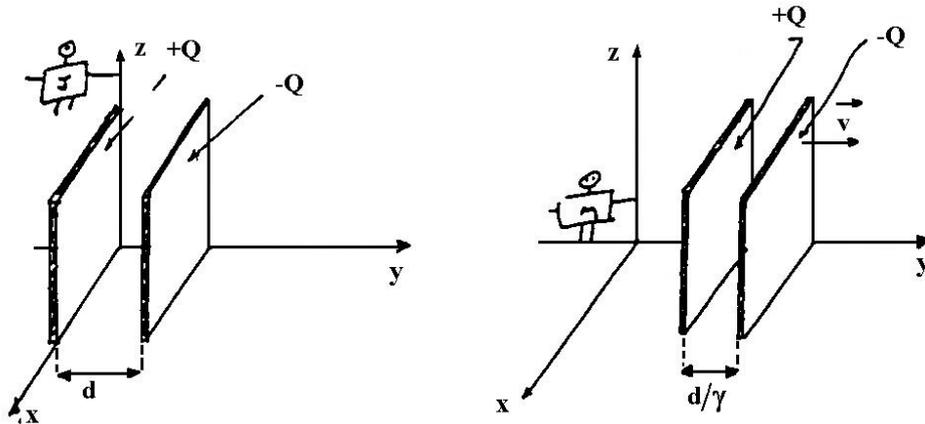


Figura 25.8: O capacitor nos referenciais  $S_J$  e  $S_M$ .

Neste caso, no referencial  $S_J$ , os campos são dados por

$$\vec{E}^J = \frac{Q}{\epsilon_0 L^2} \vec{j}, \tag{25.27}$$

$$\vec{B}^J = 0. \tag{25.28}$$

Como a única componente não nula destes campos é paralela ao movimento, as equações de mudança de referencial para os campos, eqs. (24.64 - 24.68), nos permitem concluir que, no referencial  $S_M$ ,

$$\vec{E}^M = \frac{Q}{\epsilon_0 L^2} \vec{j}, \tag{25.29}$$

$$\vec{B}^M = 0. \tag{25.30}$$

Ou seja, os campos no interior do capacitor nos referenciais de João e Maria são iguais. Isto ocorre porque a contração relativística afeta apenas a distância entre as placas, que não tem influência sobre o valor dos campos no interior do capacitor.

• exercício

1. Um fio dielétrico, retilíneo, muito longo, paralelo ao eixo  $y$ , está carregado com densidade superficial de carga  $\lambda$ , positiva.

a) determine os campos elétrico e magnético criados em todo o espaço por este fio, no referencial  $S_J$ , onde o fio está em repouso.

- b) determine os campos elétrico e magnético criados por este fio no referencial  $S_M$ , em relação ao qual o fio se move com velocidade  $v\vec{j}$ .  
 c) determine as densidades de carga e corrente do fio, no referencial  $S_M$ .

• resposta

- 1.a) Para um ponto de coordenadas  $x^J, y^J$  e  $z^J$  em  $S_J$ , obtemos

$$\vec{E}^J = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{x^J\vec{i} + z^J\vec{k}}{(x^J)^2 + (z^J)^2}, \quad \vec{B}^J = 0.$$

- b) As eqs. (24.64-24.68) fornecem

$$\vec{E}^M = \gamma \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{x^J\vec{i} + z^J\vec{k}}{(x^J)^2 + (z^J)^2}, \quad \vec{B}^M = \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{z^J\vec{i} - x^J\vec{k}}{(x^J)^2 + (z^J)^2}$$

Para completar esta resposta, é preciso expressar  $x^J$  e  $z^J$  em função de  $x^M$  e  $z^M$ . Usando, as transformações de Lorentz, eqs. (20.61), obtemos  $x^M = x^J$  e  $z^M = z^J$ , o que fornece

$$\vec{E}^M = \gamma \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{x^M\vec{i} + z^M\vec{k}}{(x^M)^2 + (z^M)^2}, \quad \vec{B}^M = \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{z^M\vec{i} - x^M\vec{k}}{(x^M)^2 + (z^M)^2}$$

- c) As leis de Gauss e Ampère em  $S_M$  fornecem  $\lambda^M = \gamma\lambda^J$  e  $I^M = v\gamma\lambda$ .



## Capítulo 26

# eletromagnetismo: mudanças de referencial II

### • exemplo 1

João está num trem, onde existe um fio metálico retilíneo, muito longo, paralelo ao eixo  $y$  e de seção circular, de raio  $a$ . Neste referencial, o fio é percorrido por uma corrente constante  $I^J$ , no sentido dos valores de  $y$  positivos. Maria, por outro lado, está parada na plataforma de uma estação, em relação à qual o trem se move com velocidade  $\vec{v} = v\vec{j}$  e, neste exemplo, desejamos obter os valores das densidades de carga e corrente que ela observa. Os referenciais de  $S_J$  e  $S_M$  são mostrados na Fig. 26.1.

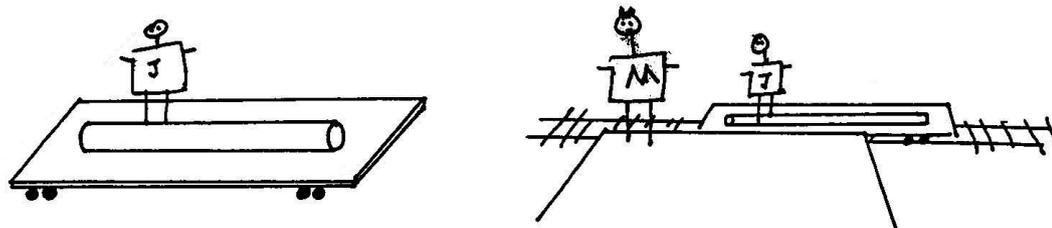


Figura 26.1: Os referenciais de  $S_J$  e  $S_M$ .

O fio está em repouso em relação a  $S_J$  e neste referencial, as densidades de cargas negativas (elétrons) e positivas (íons) no material condutor são iguais. Estas cargas estão distribuídas de modo uniforme pelo material e os íons estão praticamente em repouso enquanto que, no caso de correntes estacionárias, os elétrons se movimentam com velocidade média constante em relação ao fio. Por isso, escrevemos

$$\rho^J = 0, \tag{26.1}$$

$$j_x^J = 0, \tag{26.2}$$

$$j_y^J = \frac{I^J}{\pi a^2}, \tag{26.3}$$

$$j_z^J = 0. \tag{26.4}$$

As densidades no referencial de Maria podem ser obtidas por meio das eqs.(24.88)-(24.91):

$$j_x^M = 0, \tag{26.5}$$

$$j_y^M = \gamma j_y^J = \gamma \frac{I^J}{\pi a^2}, \tag{26.6}$$

$$j_z^M = 0, \tag{26.7}$$

$$\rho^M = \frac{\gamma v}{c^2} j_y^J = \frac{\gamma v}{c^2} \frac{I^J}{\pi a^2}. \tag{26.8}$$

Estas expressões mostram que Maria observa tanto uma corrente mais intensa do que a de João, como uma densidade positiva de carga. Estes resultados parecem simples, mas incorporam uma característica intrigante. Porque um fio *neutro* em  $S_J$  passa a ter uma densidade *positiva* em  $S_M$ ? Como a mudança de referencial dá origem a  $\rho^M > 0$  e, não, a  $\rho_M < 0$ ?

A interpretação destes resultados no contexto da relatividade é bastante interessante, como mostramos a seguir. Para interpretá-los nos dois referenciais, é preciso lembrar que um fio metálico contém, na verdade, *duas* densidades de carga e corrente: a dos íons positivos da rede cristalina, e a dos elétrons, rotuladas respectivamente por  $p$  (*positiva*) e  $n$  (*negativa*), como mostra a Fig. 26.2.

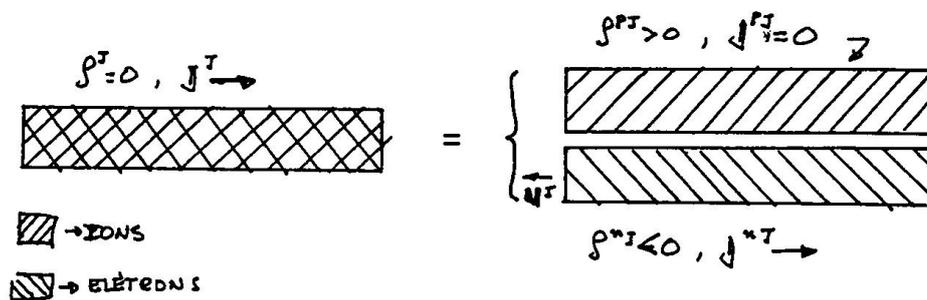


Figura 26.2: As densidades no referencial de  $S_J$ .

No referencial de  $S_J$ , a densidade total de cargas é nula e, portanto,

$$\rho^{pJ} = -\rho^{nJ}. \tag{26.9}$$

Além disso, o fio está em repouso o que significa que é a rede cristalina que está em repouso e, assim,

$$\vec{j}^{pJ} = 0 . \quad (26.9)$$

Como a corrente  $I^J$  tem o sentido dos eixo  $y$  positivo, os elétrons movem-se com velocidade média no sentido contrário e representada por  $\vec{u}^{nJ} = -u^J \vec{j}$ . Assim, a relação usual entre as densidades de carga e corrente nos fornece

$$\vec{j}^{nJ} = \vec{u}^{nJ} \rho^{nJ} = u^J \rho^{pJ} \vec{j} = \frac{I^J}{\pi a^2} \vec{j} , \quad (26.10)$$

onde usamos (26.9).

No referencial de Maria, as densidades positivas e negativas podem ser obtidas usando as eqs.(24.90)-(??) e obtemos

$$j_x^{pM} = 0 , \quad (26.11)$$

$$j_y^{pM} = \gamma v \rho^{pJ} , \quad (26.12)$$

$$j_z^{pM} = 0 , \quad (26.13)$$

$$\rho^{pM} = \gamma \rho^{pJ} \quad (26.14)$$

e

$$j_x^{nM} = 0 , \quad (26.15)$$

$$j_y^{nM} = \gamma (-u_J + v) \rho^{nJ} \quad (26.16)$$

$$j_z^{nM} = 0 , \quad (26.17)$$

$$\rho^{nM} = \gamma \left(1 - \frac{v u_J}{c^2}\right) \rho^{nJ} . \quad (26.18)$$

Estes resultados são compatíveis com as eqs.(26.6)-(26.8), pois  $\vec{j}^{pM} + \vec{j}^{nM} = \vec{j}^M$  e  $\rho^{pM} + \rho^{nM} = \rho^M$ .

As características das densidades positivas podem ser entendidas com base na contração do espaço na direção do movimento que faz com que, para Maria, a densidade de carga  $\rho^{pM}$  seja maior do que  $\rho^{pJ}$  por um fator  $\gamma$ . Por outro lado, em  $S_M$ , a densidade de carga  $\rho^{pM}$  se move com uma velocidade  $\vec{v}$  e, por isto, corresponde a uma densidade de corrente  $\vec{j}^{pM} = \rho^{pM} \vec{v}$ .

O caso das densidades negativas é um pouco mais sutil. Notamos, inicialmente, que os resultados (26.18) indicam que, em módulo,  $\rho^{nM}$  é menor do que  $\rho^{pM}$ . Ou seja, as duas densidades de carga, que eram iguais no referencial de João, passam a ser diferentes quando observadas por Maria. Isto ocorre porque, em  $S_J$ , as situações das cargas negativas

e positivas não são totalmente simétricas, pois os elétrons estão em movimento, enquanto que os íons da rede cristalina estão em repouso. Assim, mesmo em  $S^J$ , as grandezas eletromagnéticas já incorporam contrações relativísticas.

Neste problema, é possível encontrar um terceiro referencial, designado por  $S_e$ , onde os elétrons estão em repouso. Em relação a João, ele se move com velocidade  $\vec{u}_J = -u_J \vec{j}$  e, por isso, um comprimento  $L^e$ , ao longo do movimento nos referenciais  $S_e$ , aparece contraído em  $S_J$  e podemos escrever

$$L^J = \sqrt{1 - (u^J)^2/c^2} L^e . \quad (26.19)$$

Por isso, as densidades nos dois referenciais são relacionadas por

$$\rho^{nJ} = \frac{1}{\sqrt{1 - (u^J)^2/c^2}} \rho^{ne} . \quad (26.20)$$

No referencial  $S_M$ , a velocidade média dos elétrons é dada pela regra relativística de adição de velocidades, discutida na aula 23, e temos

$$u^M = \frac{-u^J + v}{1 - u^J v/c^2} . \quad (26.21)$$

Este resultado permite obter a densidade de elétrons em  $S_M$ , que é dada por

$$\rho^{nM} = \frac{1}{\sqrt{1 - (u^M)^2/c^2}} \rho^{ne} . \quad (26.22)$$

Eliminando  $\rho^{ne}$  destas expressões, obtemos

$$\rho^{nM} = \sqrt{\frac{c^2 - u_J^2}{c^2 - u_M^2}} \rho^{nJ} . \quad (26.23)$$

Este resultado, obtido a partir de duas mudanças de referencial, é idêntico ao dado pela eq.(26.18). Para mostrar isso, usamos a eq.(26.21) e escrevemos

$$c^2 - (u^M)^2 = \frac{[c^2 - (u^J)^2](1 - v^2/c^2)}{(1 - u^J v/c^2)^2} \quad (26.24)$$

e, portanto,

$$\rho^{nM} = \sqrt{\frac{(1 - u_J v/c^2)^2}{(1 - v^2/c^2)}} \rho^{nJ} = \gamma \left(1 - \frac{u_J v}{c^2}\right) \rho^{nJ} . \quad (26.25)$$

Finalmente, interpretamos o resultado para a densidades de corrente. Eliminando  $\rho^{nJ}$  das eqs.(26.17) e (26.18), obtemos

$$\vec{j}^{nM} = \frac{(-u_J + v)}{1 - u_J v/c^2} \rho^{nM} \vec{j} = \vec{u}^M \rho^{nM} . \quad (26.26)$$

Ou seja, o conteúdo físico deste resultado é exatamente o esperado.

## • exemplo 2

É dado um fio metálico, muito longo, de forma cilíndrica e com seção transversal de raio  $a$ . Este fio está em repouso em relação a João, no referencial  $S_J$ , disposto ao longo do eixo  $y$  e, neste referencial, é percorrido por uma corrente constante  $I^J$ , no sentido positivo do eixo. Maria está no referencial  $S_M$ , em relação ao qual João desloca-se com velocidade  $\vec{v} = v \vec{j}$ . O objetivo deste exemplo é calcular os campos nos dois referenciais. Esta situação corresponde, novamente, à descrita na Fig. 26.1.

Neste problema, os dados referem-se ao sistema  $S_J$  e, como discutimos na aula 25, existem dois procedimentos alternativos que podem ser utilizados para determinar os campos no referencial de Maria:

1. calculam-se, inicialmente, as densidades de carga e corrente em  $S_M$  e, em seguida, os campos, por meio das equações de Maxwell; ou seja,  $(\rho^J, \vec{j}^J) \rightarrow (\rho^M, \vec{j}^M) \rightarrow (\vec{E}^M, \vec{B}^M)$ .
2. calculam-se, primeiro, os campos no referencial de João e, a partir deles, os campos em  $S_M$ , utilizando as regras de mudança de referencial:  $(\rho^J, \vec{j}^J) \rightarrow (\vec{E}^J, \vec{B}^J) \rightarrow (\vec{E}^M, \vec{B}^M)$ .

Como também foi enfatizado na aula 25, os resultados obtidos destes dois modos são sempre totalmente equivalentes e a escolha de um dado caminho é, em geral, motivada apenas por razões de conveniência. A seguir, obtemos os campos no referencial de Maria, através destes dois procedimentos.

**caminho 1:**  $(\rho^J, \vec{j}^J) \rightarrow (\rho^M, \vec{j}^M) \rightarrow (\vec{E}^M, \vec{B}^M)$

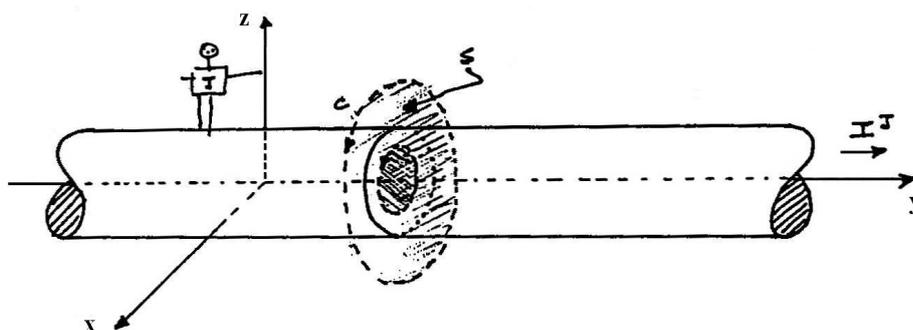


Figura 26.3: O fio, no referencial de João.

No referencial de João, o campo elétrico  $\vec{E}^J$  é nulo em todo o espaço, pois  $\rho^J = 0$ . Para calcular o campo magnético  $\vec{B}^J$ , num ponto genérico  $P$  que dista  $d^J$  do eixo  $y$ , utilizamos a lei de Ampère. Para tanto, construímos um caminho circular  $C$ , passando por  $P$ , pois a direção e sentido de  $\vec{B}^J$  neste ponto são dados pela tangente ao caminho. Como o ponto  $P$  pode estar tanto dentro como fora do fio, existem duas situações a serem consideradas,

como mostra a Fig. 26.3. No caso  $d^J \leq a$ , temos

$$\oint_C \vec{B}^J \cdot d\vec{c}^J = 2\pi d^J B^J = \iint_S \mu_0 \vec{j}^J \cdot \vec{n} dS^J = 2\pi d^J B^J = \mu_0 \frac{I^J}{\pi a^2} \pi (d^J)^2 \quad (26.27)$$

O caso  $d^J \geq a$ , por outro lado, corresponde a

$$\oint_C \vec{B}^J \cdot d\vec{c}^J = \iint_S \mu_0 \vec{j}^J \cdot \vec{n} dS^J \rightarrow 2\pi d^J B^J = \mu_0 I^J. \quad (26.28)$$

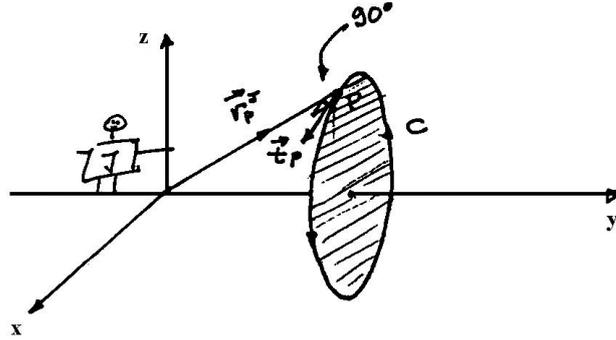


Figura 26.4: Os vetores que definem a direção e o sentido do campo magnético, no referencial de João.

Para representar o campo magnético por meio de um vetor, é preciso determinar a forma do vetor  $\vec{t}_P^J$ , tangente ao caminho  $C$  no ponto  $P$ , como mostra a Fig. 26.4. A expressão matemática deste vetor pode ser obtida a partir do vetor posição do ponto  $P$  em relação à origem, dada por  $\vec{r}_P^J = x_P^J \vec{i} + y_P^J \vec{j} + z_P^J \vec{k}$ , e do vetor  $\vec{j}$ , normal ao plano que contém  $C$ . Para qualquer  $P$  sobre o caminho  $C$ , o vetor tangente é perpendicular tanto a  $\vec{r}_P^J$  como a  $\vec{j}$ , o que indica que  $\vec{t}_P^J$  deve ser proporcional ao produto vetorial destes dois vetores. De fato, o vetor  $\vec{j} \times \vec{r}_P^J = z_P^J \vec{i} - x_P^J \vec{k}$  é paralelo a  $\vec{t}_P^J$ . Para transformá-lo num vetor, basta dividi-lo pelo seu módulo, que é dado por  $\sqrt{x_P^J{}^2 + z_P^J{}^2} = d^J$ , e obtemos

$$\vec{t}_P^J = \frac{\vec{j} \times \vec{r}_P^J}{d^J}. \quad (26.29)$$

Assim, os vetores  $\vec{E}_P^J$  e  $\vec{B}_P^J$ , observados por João no ponto  $P$  do seu referencial, são dados por

$$\vec{E}_P^J = 0, \quad (26.30)$$

$$\vec{B}_P^J = B_P^J \frac{(z_P^J \vec{i} - x_P^J \vec{k})}{d^J}, \quad (26.31)$$

onde

$$B_P^J = \frac{\mu_0 I^J d^J}{2\pi a^2}, \quad (26.32)$$

no interior do fio, e

$$B_P^J = \frac{\mu_0 I^J}{2\pi d^J}, \quad (26.33)$$

na região externa a ele.

Para determinar os campos no referencial de Maria, utilizamos as densidades de carga e corrente obtidas no exemplo 1. A eq.(26.8) indica que, neste referencial, existe uma densidade de carga positiva e, conseqüentemente, um campo elétrico  $\vec{E}^M$ , que aponta radialmente para fóra do fio e pode ser calculado pela lei de Gauss. Para tanto, consideramos um ponto  $P$  genérico, distante  $d^M$  do eixo  $y$ , que pode estar tanto dentro como fora do fio, e passamos por ele uma superfície gaussiana cilíndrica de comprimento  $h$ , como indicado na Fig. 26.5. É importante notar que o fato de o fio estar disposto paralelamente ao eixo  $y$  faz com que a sua seção transversal fique inalterada pela mudança de referencial considerada neste problema. Por isso, também para Maria, o raio do fio vale  $a$ .

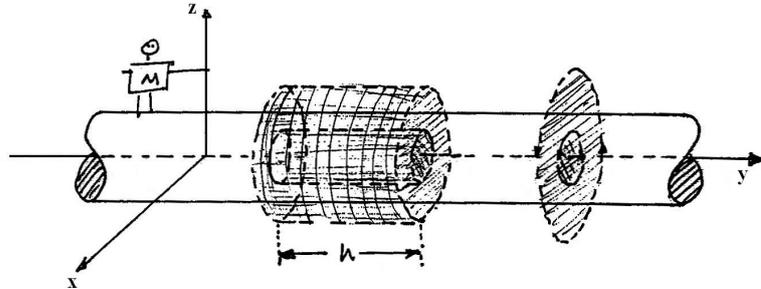


Figura 26.5: Superfícies e caminhos utilizados para o cálculo dos campos, no referencial de Maria.

Para o interior do fio, temos

$$\iint_S \vec{E}^M \cdot \vec{n} dS^M = \iiint_V \frac{\rho^M}{\epsilon_0} dV^M \rightarrow 2\pi d^M h E^M = \pi (d^M)^2 h \frac{\rho^M}{\epsilon_0}. \quad (26.34)$$

No caso  $d^M \geq a$ , por outro lado,

$$\iint_S \vec{E}^M \cdot \vec{n} dS^M = \iiint_V \frac{\rho^M}{\epsilon_0} dV^M \rightarrow 2\pi a^2 h E^M = \pi a^2 h \frac{\rho^M}{\epsilon_0}. \quad (26.35)$$

No referencial de Maria, o campo elétrico aponta radialmete para fóra do eixo  $y$  e, portanto, a sua direção e sentido são paralelos à componente do vetor  $\vec{r}_P^M = x_P^M \vec{i} + y_P^M \vec{j} + z_P^M \vec{k}$  perpendicular ao eixo  $y$ , dada por  $\vec{r}_\perp^M = x_P^M \vec{i} + z_P^M \vec{k}$ , cujo módulo é  $\sqrt{x_P^{M2} + z_P^{M2}} = d^M$ . Assim, a direção e sentido do campo elétrico são dados por

$$\vec{r}_\perp^M = \frac{(x_P^M \vec{i} + z_P^M \vec{k})}{d^M}. \quad (26.36)$$

O cálculo do campo magnético no referencial de Maria é totalmente análogo ao feito no referencial de João e, por isso,  $\vec{B}^M$  pode ser obtido diretamente a partir da eq.(26.31), bastando substituir os índices  $J$  por  $M$ . Assim, os campos observados por Maria são dados por

$$\vec{E}_P^M = E_P^M \frac{(x_P^M \vec{i} + z_P^M \vec{k})}{d^M}, \quad (26.37)$$

$$\vec{B}_P^M = B_P^M \frac{(z_P^M \vec{i} - x_P^M \vec{k})}{d^M}, \quad (26.38)$$

onde

$$E_P^M = \frac{\rho^M d^M}{2\epsilon_0}, \quad (26.39)$$

$$B_P^M = \frac{\mu_0 I^M d^M}{2\pi a^2}, \quad (26.40)$$

para  $d^M \leq a$  e

$$E_P^M = \frac{\rho^M a^2}{2\epsilon_0 d^M}, \quad (26.41)$$

$$B_P^M = \frac{\mu_0 I^M}{2\pi d^M}, \quad (26.42)$$

para  $d^M \geq a$ . Para colocar esta resposta em função do dado do problema, que é a corrente  $I^J$  no referencial de João, basta usar as eqs.(26.6)-(26.8) que nos permitem escrever, no interior do fio

$$E_P^M = \frac{\gamma v}{c^2} \frac{d^M}{2\pi\epsilon_0 a^2} I^J, \quad (26.43)$$

$$B_P^M = \gamma \frac{\mu_0 d^M}{2\pi a^2} I^J, \quad (26.44)$$

e, na região externa a ele,

$$E_P^M = \frac{\gamma v}{c^2} \frac{1}{2\pi\epsilon_0 d^M} I^J, \quad (26.45)$$

$$B_P^M = \gamma \frac{\mu_0}{2\pi d^M} I^J. \quad (26.46)$$

Para completar esta discussão, notamos que também é possível expressar os campos  $\vec{E}_P^M$  e  $\vec{B}_P^M$  diretamente em termos de  $\vec{B}_P^J$ . Para fazer isto, eliminamos  $I^J$  entre as eqs.(26.32)-(26.33) e (26.44)-(26.46), para obter os seguintes resultados, válidos tanto para o interior

como para o exterior do fio:

$$E_P^M = \gamma v B_P^J, \quad (26.47)$$

$$B_P^M = \gamma B_P^J, \quad (26.48)$$

onde usamos  $c^2 = 1/\mu_0\varepsilon_0$  e a igualdade  $d^M = d^J$ , pois estas distâncias são perpendiculares à velocidade relativa. Notando que as coordenadas nas direções  $x$  e  $z$  também são iguais nos dois referenciais, obtemos relações vetoriais diretas entre os campos observados por João e Maria, dadas por

$$\vec{E}_P^M = -\gamma \vec{v} \times \vec{B}_P^J \quad (26.49)$$

$$\vec{B}_P^M = \gamma \vec{B}_P^J. \quad (26.50)$$

Uma forma ainda mais compacta para a eq.(26.50) pode ser obtida usando a eq.(26.50) para escrever

$$\vec{E}_P^M = -\vec{v} \times \vec{B}_P^M. \quad (26.51)$$

Ou seja, neste problema é possível expressar o campo elétrico no referencial de Maria em função do campo magnético neste mesmo referencial.

**caminho 2:**  $(\rho^J, \vec{j}^J) \rightarrow (\vec{E}^J, \vec{B}^J) \rightarrow (\vec{E}^M, \vec{B}^M) \rightarrow (\rho^M, \vec{j}^M)$

Neste outro caminho, podemos utilizar diretamente as eqs.(24.53)-(24.58) ou, alternativamente, as eqs.(24.64)-(24.67), que descrevem as relações entre os campos nos dois referenciais. Neste exemplo, optamos pelo primeiro conjunto, escrito em termos das componentes e utilizamos as expressões dos campos no referencial de João, dadas pela eqs.(26.31) e (26.31), para escrever

$$E_x^M = \gamma (E_x^J - v B_z^J) = -\gamma v B_P^J \frac{x_P^J}{d^J}, \quad (26.52)$$

$$E_y^M = E_y^J = 0, \quad (26.53)$$

$$E_z^M = \gamma (E_z^J + v B_x^J) = \gamma v B_P^J \frac{z_P^J}{d^J}, \quad (26.54)$$

$$B_x^M = \gamma \left( B_x^J + \frac{v}{c^2} E_z^J \right) = \gamma B_P^J \frac{z_P^J}{d^J}, \quad (26.55)$$

$$B_y^M = B_y^J = 0, \quad (26.56)$$

$$B_z^M = \gamma \left( B_z^J - \frac{v}{c^2} E_x^J \right) = -\gamma B_P^J \frac{x_P^J}{d^J}, \quad (26.57)$$

com  $B_P^J$  dado pelas eqs.(26.31) ou (26.32), dependendo de o ponto considerado estar dentro ou fóra do fio. Este resultado é totalmente equivalente ao dado pelas eqs.(26.50) e (26.50) e corresponde à resposta do problema, expressa em termos dos dados originais.

• exemplo 3

No referencial  $S_J$ , de João, uma onda eletromagnética plana e monocromática propaga-se com velocidade  $\vec{c}^J = c\vec{i}$ , sendo seus campos elétrico e magnético dados por

$$\vec{E}^J = E_0 \cos(\kappa^J x^J - \omega^J t^J) \vec{k} \quad (26.58)$$

$$\vec{B}^J = -\frac{E_0}{c} \cos(\kappa^J x^J - \omega^J t^J) \vec{j} \quad (26.59)$$

O propósito deste exemplo é determinar as características desta *mesma* onda, no referencial  $S_M$  de Maria, em relação ao qual João se move com velocidade  $\vec{v} = v\vec{j}$ .

O vetor velocidade  $\vec{c}^M$  da onda eletromagnética no referencial de Maria pode ser obtido a partir das regras de adição de velocidades. Usando as eqs. (23.11)-(23.13), obtemos

$$\vec{c}^M = \frac{c}{\gamma} \vec{i} + v\vec{j}. \quad (26.60)$$

Este resultado indica que as direções de propagação da onda são diferentes nos dois referenciais. Como a onda eletromagnética é sempre transversal, podemos esperar também mudanças nas direções dos seus campos  $\vec{E}^M$  e  $\vec{B}^M$ .

As formas de  $\vec{E}^M$  e  $\vec{B}^M$  são determinadas pelas eqs. (24.64)-(24.67). Notando que  $\vec{E}^J = \vec{B}_\perp^J$  e  $\vec{B}^J = \vec{B}_\parallel^J$ , encontramos

$$\vec{E}_\parallel^M = 0, \quad (26.61)$$

$$\vec{E}_\perp^M = \gamma E_0 \cos(\kappa^J x^J - \omega^J t^J) \vec{k}, \quad (26.62)$$

$$\vec{B}_\parallel^M = -\frac{E_0}{c} \cos(\kappa^J x^J - \omega^J t^J) \vec{j}, \quad (26.63)$$

$$\vec{B}_\perp^M = \gamma \frac{v}{c^2} E_0 \cos(\kappa^J x^J - \omega^J t^J) \vec{i}. \quad (26.64)$$

No referencial de Maria, os campos são dados por

$$\vec{E}^M = \gamma E_0 \cos(\kappa^J x^J - \omega^J t^J) \vec{k}, \quad (26.65)$$

$$\vec{B}^M = \frac{\gamma E_0}{c} \cos(\kappa^J x^J - \omega^J t^J) \left[ \frac{v}{c} \vec{i} - \frac{1}{\gamma} \vec{j} \right]. \quad (26.66)$$

Esses campos são ortogonais entre si e, também à velocidade  $\vec{c}^M$  da onda, pois podemos verificar explicitamente que  $\vec{E}^M \cdot \vec{c}^M = 0$  e  $\vec{B}^M \cdot \vec{c}^M = 0$ .

Os dois campos dados pelas eqs. (26.65) e (26.66) são proporcionais a  $\cos(\kappa^J x^J - \omega^J t^J)$ . Por isso, para completar a mudança de referencial, é preciso reexpressar esta função em termos das coordenadas espaço-temporais do referencial de Maria. Usando as

transformações de Lorentz, eqs. (??)-(??), temos

$$\cos(\kappa^J x^J - \omega^J t^J) = \cos\left[\kappa^J x^M - \omega^J \gamma \left(t^M - \frac{v}{c^2} y^M\right)\right] \quad (26.67)$$

$$= \cos\left[\kappa^J \left(x^M + \gamma \frac{v}{c} y^M\right) - \omega^J \gamma t^M\right], \quad (26.68)$$

onde usamos  $\omega^M = c \kappa^J$ .

Como discutimos na aula 12, o argumento de uma onda plana e monocromática que se propaga numa direção definida pelo vetor da onda  $\vec{\kappa}$  pode ser escrito como  $(\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t)$ . Por isso, identificamos

$$\vec{\kappa}^M = \kappa^J \left(\vec{i} + \frac{v}{c} \gamma \vec{j}\right), \quad (26.69)$$

$$\omega^M = \gamma \omega^J. \quad (26.70)$$

e escrevemos

$$\cos(\kappa^J x^J - \omega^J t^J) = \cos(\vec{\kappa}^M \cdot \vec{r}^M - \omega^M t^M) \quad (26.71)$$

A eq. (26.71) indica que a frequência  $f$  da onda depende do referencial, já que ela corresponde a

$$f^M = \gamma f^J \quad \longleftrightarrow \quad T^M = \frac{1}{\gamma} T^J. \quad (26.72)$$

Já  $\vec{\kappa}^M$  representa o vetor de onda no referencial de Maria e é paralelo a  $\vec{c}_M$ . De fato, usando a eq. (26.60), podemos escrever

$$\vec{\kappa}^M = \gamma k^J \frac{\vec{c}^M}{c}. \quad (26.73)$$

Os módulos dos vetores de onda nos dois referenciais estão relacionados por

$$k^M = \gamma k^J \quad \longleftrightarrow \quad \lambda^M = \frac{1}{\gamma} \lambda^J \quad (26.74)$$

A dependência da frequência da onda com o referencial onde ela é observada é conhecida como efeito Doppler relativístico.

## • exercícios

1. Considere a situação descrita no exemplo 1 desta aula e suponha que, agora, a velocidade do trem relativamente ao solo tenha o seu sentido invertido.

- Quais são as densidades de carga e corrente que variam de um caso para outro?
- Interprete fisicamente os seus resultados.

2. Considere os resultados dados pelas eqs.(26.50) e (26.51) e mostre que, no referencial de Maria, o campo elétrico aponta radialmente para “fora” do eixo  $y$ .

**3.** No referencial  $S^M$ , uma onda plana e monocromática, de frequência  $\omega^M$ , cujo campo elétrico tem amplitude  $\vec{E}^M = E\vec{k}$ , se propaga paralelamente ao eixo  $y$ . João, no referencial  $S^J$ , se move em relação a  $S^M$  com velocidade  $\vec{v} = v\vec{j}$ .

a) Escreva as equações para os campos elétrico  $\vec{E}^M$  e magnético  $\vec{B}^M$  desta onda, no referencial  $S^M$ .

b) Escreva as equações para os campos elétrico  $\vec{E}^J$  e magnético  $\vec{B}^J$  desta onda, no referencial  $S^J$ .

c) Mostre que estes resultados correspondem a um efeito Doppler com deslocamento de frequências para o vermelho quando a velocidade de João é paralela à da luz e para o azul, quando esta velocidade é antiparalela.

d) Porque o fato de as raias espectrais produzidas por átomos em galáxias distantes estarem desviadas para o vermelho em relação às correspondentes de átomos na Terra indicam que o universo está se expandindo?

### • respostas

**1. a)** A densidade de corrente permanece a mesma e a densidade de cargas tem o seu sinal invertido.

$$\mathbf{3. a)} \quad \vec{E}^M = E \cos \left[ \omega^M \left( \frac{y^M}{c} - t^M \right) \right] \vec{k}, \quad \vec{B}^M = \frac{E}{c} \cos \left[ \omega^M \left( \frac{y^M}{c} - t^M \right) \right] \vec{i}$$

$$\mathbf{b)} \quad \vec{E}^J = E \cos \left[ \omega^J \left( \frac{y^J}{c} - t^J \right) \right] \vec{k}, \quad \vec{B}^J = \frac{E}{c} \cos \left[ \omega^J \left( \frac{y^J}{c} - t^J \right) \right] \vec{i}, \quad \text{com } \omega^J = \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} \omega^M.$$

c) No resultado do item **b**,  $\omega^J < \omega^M$  quando  $v > 0$  e, portanto corresponde a um deslocamento para o vermelho. Inversamente, se  $v < 0$ ,  $\omega^J > \omega^M$  e temos um deslocamento para o azul.

# Capítulo 27

## campos de uma carga em movimento uniforme

Quando uma carga elétrica puntiforme está em repouso em relação a um referencial inercial, à sua volta existe um campo eletrostático, com módulo, direção e sentido dados pela lei de Coulomb. O objetivo desta aula é discutir a forma dos campos elétrico e magnético observados num outro referencial, em relação ao qual esta carga ela se move com velocidade constante.

Este é, por si só, um problema muito importante, pois ele nos permite compreender aspectos sutis do comportamento da natureza. Além disso, como veremos nas aulas seguintes, a produção de radiações eletromagnéticas, tais como luz ou ondas de rádio, está sempre associada à existência de acelerações, ou seja, a movimentos não uniformes. Por isso, para poder compreender o significado eletromagnético da não uniformidade de um movimento, é preciso entender o comportamento cargas que se movem com velocidade constante.

### • a forma dos campos elétrico e magnético

João está num referencial inercial  $S^J$ , na origem do qual existe uma carga puntiforme  $q$ , positiva, em repouso. Ele, por outro lado, move-se com velocidade  $\vec{v} = v\vec{j}$  em relação ao referencial  $S^M$  de Maria, e o nosso objetivo consiste em determinar as formas dos campos nos dois referenciais. João e Maria estão localizados nas origens dos respectivos referenciais e os seus relógios marcam  $t^J = 0$  e  $t^M = 0$  quando estas origens se cruzam.

No sistema de João, o campo elétrico  $\vec{E}^J$  é dado pela lei de Coulomb e o campo magnético  $\vec{B}^J$  é nulo. Num instante  $t^J$ , João mede estes campos num ponto  $P$  do seu sistema, descrito pelo vetor  $\vec{r}^J = x^J\vec{i} + y^J\vec{j} + z^J\vec{k}$ , como mostra a Fig. 26.1.

Portanto, esta medida corresponde a um evento  $E$ , que ocorre no ponto  $(x^J, y^J, z^J; t^J)$

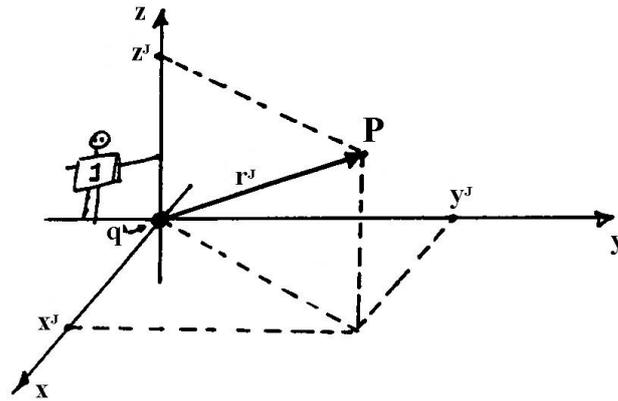


Figura 27.1: O ponto P e a carga elétrica, no referencial de João.

e resulta em

$$\vec{E}^J(\vec{r}^J; t^J) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}^J}{(r^J)^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x^J\vec{i} + y^J\vec{j} + z^J\vec{k})}{[(x^J)^2 + (y^J)^2 + (z^J)^2]^{3/2}}, \quad (27.1)$$

$$\vec{B}^J(\vec{r}^J; t^J) = 0. \quad (27.2)$$

Note que estas expressões não dependem do instante  $t^J$  em que a medida é feita, já que a configuração dos campos no referencial de João permanece sempre a mesma, é eterna. Se preferirmos representar este campo em termos das componentes paralela e perpendicular ao movimento relativo, podemos escrever

$$\vec{E}^J(\vec{r}^J; t^J) = \vec{E}_{\parallel}^J(\vec{r}^J; t^J) + \vec{E}_{\perp}^J(\vec{r}^J; t^J), \quad (27.3)$$

onde

$$\vec{E}_{\parallel}^J(\vec{r}^J; t^J) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y^J\vec{j}}{[(x^J)^2 + (y^J)^2 + (z^J)^2]^{3/2}}, \quad (27.4)$$

$$\vec{E}_{\perp}^J(\vec{r}^J; t^J) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x^J\vec{i} + z^J\vec{k})}{[(x^J)^2 + (y^J)^2 + (z^J)^2]^{3/2}}. \quad (27.5)$$

Para obter os campos eletromagnéticos no referencial de Maria, usamos as equações

(24.62)-(24.65) , que nos permitem escrever

$$\vec{E}_{\parallel}^M = \vec{E}_{\parallel}^J = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y^J \vec{j}}{[(x^J)^2 + (y^J)^2 + (z^J)^2]^{3/2}}, \quad (27.6)$$

$$\vec{E}_{\perp}^M = \gamma \left[ \vec{E}_{\perp}^J - \vec{v} \times \vec{B}^J \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma(x^J \vec{i} + z^J \vec{k})}{[(x^J)^2 + (y^J)^2 + (z^J)^2]^{3/2}}, \quad (27.7)$$

$$\vec{B}_{\parallel}^M = \vec{B}_{\parallel}^J = 0, \quad (27.8)$$

$$\vec{B}_{\perp}^M = \gamma \left[ \vec{B}_{\perp}^J + \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}_{\perp}^J \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma v (z^J \vec{i} - x^J \vec{k})/c^2}{[(x^J)^2 + (y^J)^2 + (z^J)^2]^{3/2}}. \quad (27.9)$$

Uma característica importante deste resultado é que, no referencial de Maria, o campo magnético pode ser expresso em termos do campo elétrico. De fato, a condição  $\vec{B}^J = 0$ , permite-nos escrever as eqs.(27.7) e (27.9) como  $\vec{E}_{\perp}^M = \gamma \vec{E}_{\perp}^J$  e  $\vec{B}_{\perp}^M = \gamma \vec{v} \times \vec{E}_{\perp}^J / c^2$ , respectivamente. Eliminando  $\vec{E}_{\perp}^J$  entre estes dois resultados, obtemos a relação

$$\vec{B}^M = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}^M. \quad (27.10)$$

Assim, o conhecimento de  $\vec{E}^M$  é suficiente para determinar univocamente  $\vec{B}^M$ .

Nas eqs.(27.7)-(27.9), os campos elétrico e magnético observados por Maria, estão escritos em termos das coordenadas do referencial de João. Para representar os campos coerentemente no sistema  $S_M$ , é preciso usar as transformações de Lorentz, dadas pelas eqs.(20.22)-(20.25), que nos permitem escrever o campo elétrico como

$$\begin{aligned} \vec{E}^M &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma(y^M - vt^M) \vec{j}}{[(x^M)^2 + \gamma^2(y^M - vt^M)^2 + (z^M)^2]^{3/2}} \\ &+ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma(x^M \vec{i} + z^M \vec{k})}{[(x^M)^2 + \gamma^2(y^M - vt^M)^2 + (z^M)^2]^{3/2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma \left[ x^M \vec{i} + (y^M - vt^M) \vec{j} + z^M \vec{k} \right]}{[(x^M)^2 + \gamma^2(y^M - vt^M)^2 + (z^M)^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (27.9)$$

Esta expressão representa, de modo completo, o campo elétrico observado por Maria. É interessante notar que, neste referencial, o campo no ponto  $P$  varia com o tempo. Isso ocorre porque o vetor  $\vec{R}^M = x^M \vec{i} + y^M \vec{j} + z^M \vec{k}$ , que descreve a posição deste ponto em relação à origem, é constante, enquanto que a carga elétrica se move à medida que o tempo passa, como indica a Fig. 27.2.

A forma do campo no ponto  $P$  fica mais transparente quando expressa em termos da posição deste ponto relativamente à carga, e não à origem. Chamando de  $\vec{R}^M =$

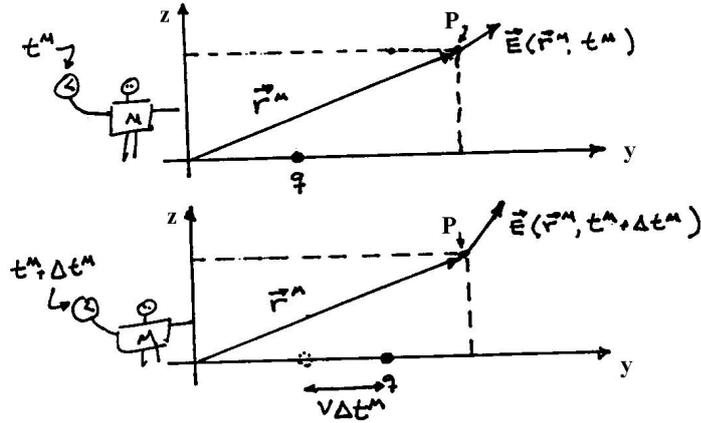


Figura 27.2: O ponto  $P$  e a carga elétrica em dois instantes diferentes, no referencial de Maria; a bem da simplicidade do desenho, consideramos o ponto  $P$  no plano  $yz$ .

$X^M \vec{i} + Y^M \vec{j} + Z^M \vec{k}$  o vetor com origem na carga e extremidade em  $P$ , como mostra a Fig. 27.3, e notando que a posição da carga no instante  $t^M$  é dada por  $\vec{r}_q^M = v t^M \vec{j}$ , temos

$$\vec{R}^M = \vec{r}^M - \vec{r}_q^M = x^M \vec{i} + (y^M - v t^M) \vec{j} + z^M \vec{k} = X^M \vec{i} + Y^M \vec{j} + Z^M \vec{k}. \quad (27.10)$$

Assim, podemos reescrever a eq.(27.9) como

$$\begin{aligned} \vec{E}^M &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma [X^M \vec{i} + Y^M \vec{j} + Z^M \vec{k}]}{[(X^M)^2 + \gamma^2(Y^M)^2 + (Z^M)^2]^{3/2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma \vec{R}^M}{[(X^M)^2 + \gamma^2(Y^M)^2 + (Z^M)^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (27.10)$$

Esta última expressão permite-nos concluir que  $\vec{E}^M$  é paralelo a  $\vec{R}^M$  se  $q > 0$  e anti-paralelo, se  $q < 0$ . Por isso, no referencial  $S_M$ , o campo pode ser representado por linhas de campo retilíneas, que se cruzam sobre a carga e "saem" dela quando a carga é positiva e "entram" nela quando a carga é negativa.

Para estudar o módulo do campo, definimos o ângulo  $\theta$  como sendo o ângulo entre o vetor  $\vec{R}^M$  e o eixo  $y$  positivo, mostrado na Fig. 27.3. Isto nos permite escrever a componente de  $\vec{R}^M$  paralela ao movimento como

$$Y^M = R^M \cos\theta \quad (27.11)$$

e a soma dos quadrados das componentes perpendiculares, como

$$(X^M)^2 + (Z^M)^2 = (R^M)^2 \sin^2\theta. \quad (27.12)$$

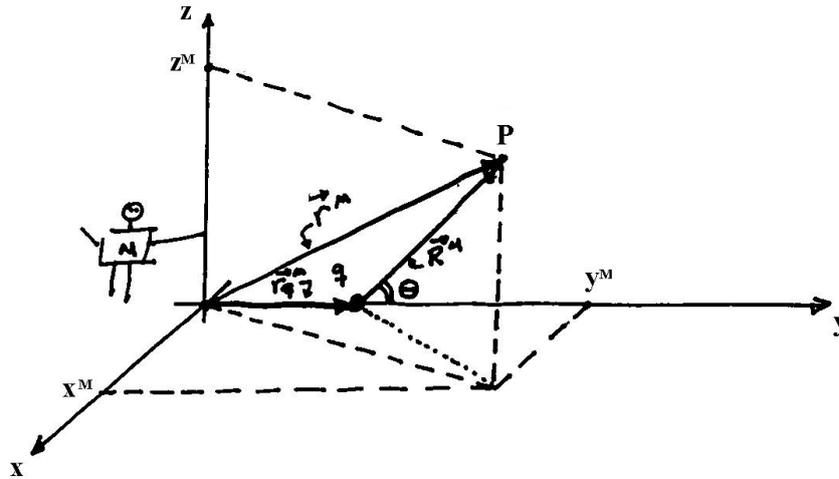


Figura 27.3: O ponto  $P$ , a carga elétrica e os vetores usados na descrição dos campos, no referencial de Maria.

A função das coordenadas no denominador da eq.(27.10) pode, então ser colocada na forma

$$\begin{aligned} (X^M)^2 + \gamma^2 (Y^M)^2 + (Z^M)^2 &= \gamma^2 (R^M)^2 \cos^2 \theta + (R^M)^2 \sin^2 \theta \\ &= \gamma^2 (R^M)^2 \left[ \cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{\gamma^2} \right] = \gamma^2 (R^M)^2 \left[ 1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta \right] \end{aligned} \quad (27.12)$$

e o campo elétrico, expresso por

$$\vec{E}^M = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}^M}{\gamma^2 (R^M)^3 \left[ 1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta \right]^{3/2}}. \quad (27.13)$$

Esta expressão sintetiza todas as características do campo elétrico de uma carga puntual com velocidade constante, no referencial de Maria. Algumas destas propriedades de  $\vec{E}^M$  são análogas às do campo coulombiano  $\vec{E}^J$ , observado por João, tais como:

- i:** o campo elétrico  $\vec{E}^M$  é radial, pois  $\vec{E}^M$  e  $\vec{R}^M$  têm a mesma direção;
- ii:** ele "sai" de cargas positivas e "entra" em cargas negativas;
- iii:** o módulo do campo elétrico varia com o inverso do quadrado da distância da carga ao ponto considerado;

Por outro lado, existem outras características marcadamente diferentes, associadas ao módulo de  $\vec{E}^M$ , que é dado por

$$E^M(R^M, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (R^M)^2} \frac{[1 - v^2/c^2]}{\left[ 1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta \right]^{3/2}}. \quad (27.14)$$

Assim,

**iv:**  $|\vec{E}^M|$  depende de  $v$ , a velocidade da carga;

**v:**  $|\vec{E}^M|$  depende, também, de  $\theta$ , o ângulo entre a direção do ponto  $P$  relativamente à carga e o eixo  $y$ , o que significa que não há simetria esférica para o campo.

Finalmente, lembramos que o campo elétrico determina o campo magnético, através da eq.(27.10).

• **interpretação dos resultados**

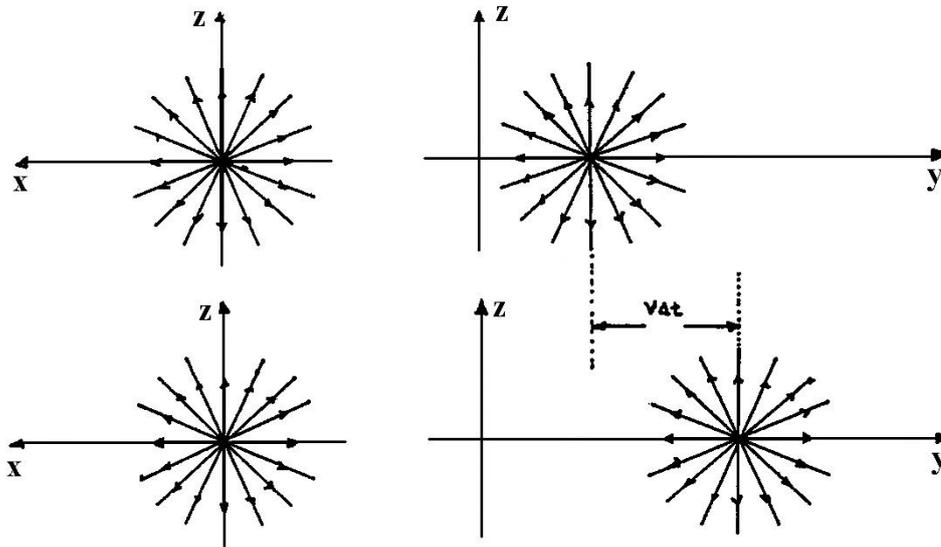


Figura 27.4: O campo elétrico de uma carga com velocidade baixa, no referencial  $S_M$ , em dois instantes diferentes.

Quando uma carga se move, o seu campo elétrico torna-se diferente do coulombiano. A principal novidade é que esse campo elétrico não é mais esfericamente simétrico, pois ele agora depende do ângulo  $\theta$ , com um coeficiente proporcional a  $v^2/c^2$ . Para estudar a forma desta dependência, é conveniente reescrever a eq.(27.14) como

$$\vec{E}^M = f(v, \theta) \left[ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}^M}{(R^M)^3} \right], \tag{27.15}$$

onde

$$f(v, \theta) = \frac{1 - v^2/c^2}{\left[1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right]^{3/2}}. \tag{27.16}$$

Nesta representação, o fator entre colchetes tem a forma do campo coulombiano usual, enquanto que o fator  $f(v, \theta)$  incorpora a dependência do módulo de  $\vec{E}^M$  com o ângulo  $\theta$ , quando a velocidade da carga é  $v$ .

Uma consequência imediata desta expressão é que, para velocidades baixas comparadas à da luz, o fator  $f(v, \theta)$  torna-se praticamente igual a 1 e o campo  $\vec{E}^M$  pode ser considerado, em boa aproximação, como sendo esfericamente simétrico. Nesta situação, no referencial  $S_M$ , temos simplesmente o arrastamento de um campo quase coulombiano, como mostra a Fig. 27.4.

Uma característica importante do fator  $f(v, \theta)$  é que ele não depende do ângulo azimutal e, portanto, todos os pontos com um mesmo  $\theta$  e um dado  $R^M$  têm o mesmo valor de  $E^M$ . Estes pontos estão apoiados sobre um cone de abertura angular  $\theta$ , com vértice na carga, como mostra a Fig. 27.5. A função  $f(v, \theta)$  é simétrica em torno do plano  $\theta = 90^\circ$ , já que a dependência em  $\theta$  está totalmente contida no fator  $\sin^2 \theta$ .

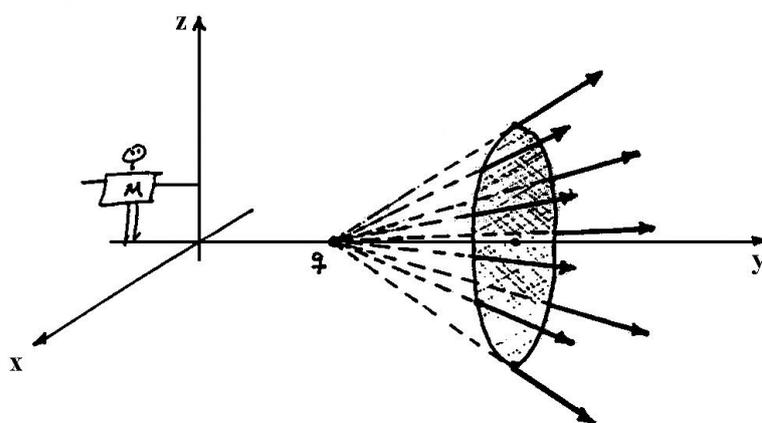


Figura 27.5: O cone tem abertura  $\theta$ , os vetores mostrados representam o campo elétrico e todos eles têm o mesmo módulo.

Na tabela 27.1 apresentamos alguns valores da função  $f(v, \theta)$ , que exemplificam as dependências com o ângulo e a velocidade. Ela mostra que, para qualquer valor não nulo de  $v$ , a função  $f(v, \theta)$  assume valores menores do que 1 para direções paralelas ao eixo  $y$  e maiores do que 1, para direções perpendiculares a ele. De fato, usando  $\theta = 0$  ou  $\theta = 180^\circ$  na eq.(27.16), temos

$\theta(\text{graus})$	$v = 0.1 c$	$v = 0.5 c$	$v = 0.9 c$	$v = 0.99 c$
0	0.990	0.750	0.190	0.020
30	0.994	0.826	0.267	0.030
60	1.001	1.024	0.773	0.146
90	1.005	1.155	2.294	7.089
120	1.001	1.024	0.773	0.146
150	0.994	0.826	0.267	0.030
180	0.990	0.750	0.190	0.020

Tabela 27.1:

$$f(v, \theta = 0) = f(v, \theta = 180^\circ) = \frac{1}{\gamma^2} \leq 1. \quad (27.17)$$

Por outro lado, para o plano que contém a carga e é perpendicular ao eixo  $y$ , escrevemos

$$f(v, \theta = 90^\circ) = \gamma \geq 1. \quad (27.18)$$

Assim, os módulos do campo elétrico nestas direções particulares são dados por

$$E^M(R^M, \theta = 0) = E^M(R^M, \theta = 180^\circ) = \frac{1}{\gamma^2} \left[ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R^M)^2} \right], \quad (27.19)$$

$$E^M(R^M, \theta = 90^\circ) = \gamma \left[ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R^M)^2} \right]. \quad (27.20)$$

Estes são os valores extremos de  $E^M$ . Para valores de  $\theta$  nos intervalos  $0 < \theta < \pi/2$  e  $\pi/2 < \theta < \pi$ , temos que  $0 < \sin^2\theta < 1$  e, portanto

$$E^M(R^M, \theta = 0) = E^M(R^M, \theta = 180^\circ) < E^M(R^M, \theta) < E^M(R^M, \theta = 90^\circ).$$

Assim, no referencial de Maria, para uma distância  $R^M$  fixa, os maiores valores do módulo de  $\vec{E}^M$  estão no plano que contém a carga e é perpendicular a  $y$ , enquanto que os menores valores estão sobre este eixo, como ilustra a Fig. 27.6.

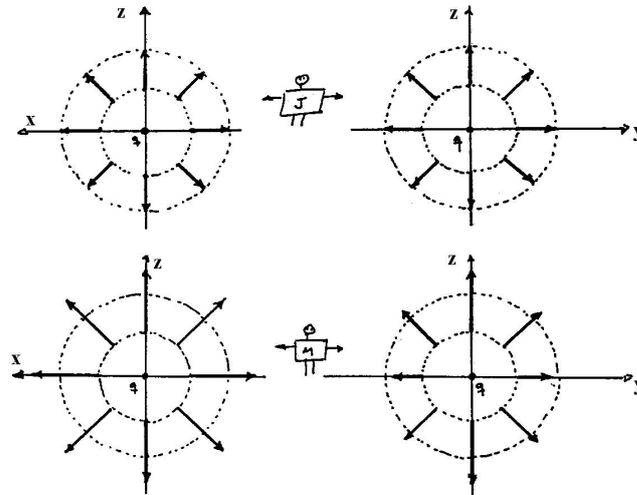


Figura 27.6: Os campos elétricos à mesma distância da carga nos referenciais de João e Maria, nos planos  $xz$  e  $yz$ .

A mesma situação pode, também, ser representada por meio de linhas de campo, como mostra a Fig. 27.7. Neste caso, o aumento da densidade de linhas de campo sobre o plano perpendicular à velocidade da carga corresponde ao aumento da intensidade do campo naquela região.

Um outro aspecto importante deste problema é que a assimetria das linhas de campo aumenta com a velocidade da carga. Quanto maior for esta velocidade, tanto maior será a

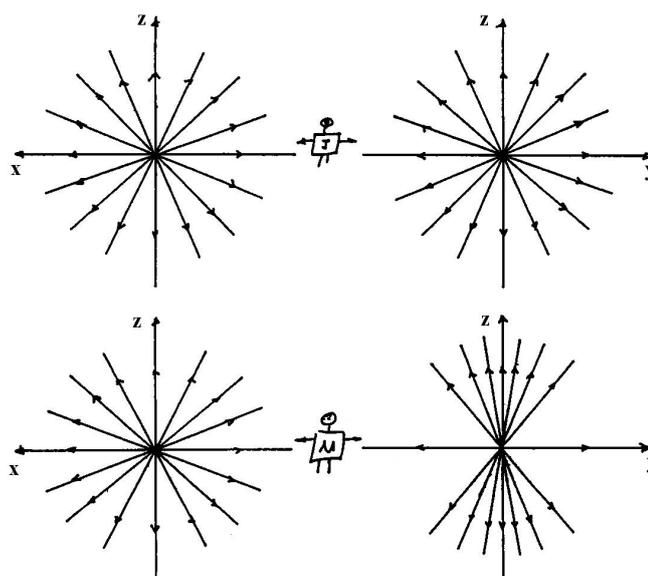


Figura 27.7: As linhas de campo elétrico nos referenciais de João e Maria, nos planos  $xz$  e  $yz$ .

concentração de linhas de campo na direção perpendicular ao movimento, como evidencia a linha da tabela 27.1 correspondente a  $90^\circ$ .

### • um pouco de intuição

O fato de o campo elétrico de uma carga em movimento ser menos intenso ao longo da direção da velocidade e mais intenso nas direções perpendiculares a ela, quando comparado ao campo de uma carga idêntica e em repouso, pode ser associado a uma espécie de migração das linhas de campo devida ao movimento.

Neste tipo de problema, as linhas de campo elétrico de uma dada carga são análogas a um conjunto de varetas rígidas, cada uma delas de comprimento infinito e com uma das pontas presa à carga. Quando a carga está em repouso, estas varetas estão distribuídas isotropicamente em torno dela. Por outro lado, se a carga estiver em movimento, as varetas passam a se acumular na direção transversal à velocidade, devido à contração do espaço.

Este mecanismo pode ser ilustrado determinando a orientação de uma linha de campo elétrico genérica  $L$ , de uma carga que se move com velocidade  $v$ , ao longo do eixo  $y$ . Para tanto, colocamo-nos, inicialmente, no referencial  $S_J$ , onde a carga está em repouso, e consideramos a linha  $L$ , situada sobre o plano  $yz$  e formando o ângulo  $\theta^J$  com o eixo  $y$ , como mostra o lado esquerdo da Fig. 27.8. Um ponto  $P$  sobre esta linha tem coordenadas  $P : (0, y_P^J, z_P^J)$  e, para  $\theta^J$ , vale a relação

$$\tan\theta^J = \frac{z_P^J}{y_P^J}. \quad (27.21)$$

No referencial  $S_M$ , por outro lado, as distâncias paralelas à velocidade aparecem contraídas e, portanto, as coordenadas do ponto  $P$  passam a ser  $P : (0, y_P^M = y_P^J/\gamma, z_P^M = z_P^J)$ . Conseqüentemente, a linha  $L$ , em  $S_M$ , faz um ângulo  $\theta^M$  com o eixo  $y$ , onde

$$\tan\theta^M = \frac{z_P^M}{y_P^M} = \gamma \tan\theta^J. \tag{27.22}$$

Este resultado indica que, para velocidades não nulas,  $\theta^M > \theta^J$  ou seja, que a linha  $L$  "migra" em direção ao plano perpendicular ao movimento. Tudo se passa como se o espaço se contraísse na mudança de referencial e carregasse consigo as linhas de campo elétrico contidas nele.

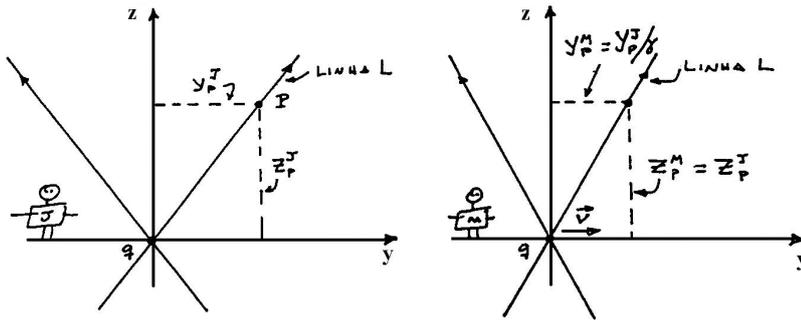


Figura 27.8: A migração das linhas de campo elétrico.

Esta característica do campo elétrico está diretamente relacionada ao fato de a carga ser um invariante relativístico, que independe do referencial. De acordo com a lei de Gauss, o fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada qualquer é proporcional à carga nela contida. Como esta carga é um invariante por transformações relativísticas, o mesmo acontece com o fluxo do campo através da superfície que a contém.

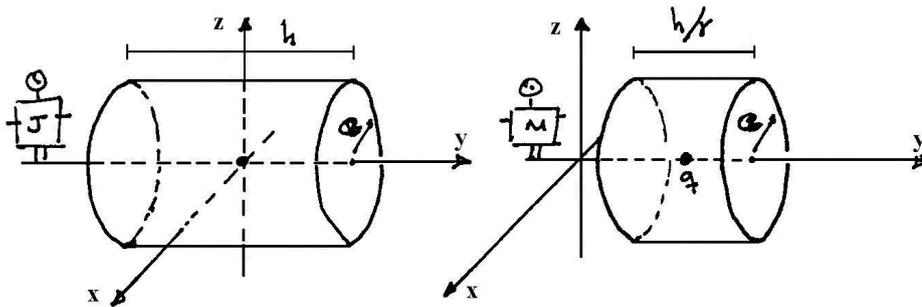


Figura 27.9: Superfícies gaussianas nos referenciais de João e Maria.

Consideremos, por exemplo, a Fig. 27.9, que mostra como João e Maria observam uma mesma caixa cilíndrica que envolve a carga  $q$ . Nos dois referenciais, as superfícies perpendiculares à direção do movimento são idênticas, enquanto que, em  $S_M$ , a superfície paralela à direção do movimento aparece contraída por um fator  $1/\gamma$ . Para estudar o comportamento dos fluxos do campo elétrico através dessas duas superfícies, consideramos, inicialmente, o que acontece com as "tampas" circulares.

No referencial  $S_J$ , o fluxo de  $\vec{E}^J$  sobre a “tampa” direita do cilindro é dado por

$$\phi_{\vec{E}^J}^{tampa} = \iint \vec{E}^J \cdot \vec{j} dS^J = \int_0^a d\alpha \alpha \int_0^{2\pi} d\phi \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{h}{[\alpha^2 + h^2]^{3/2}}, \quad (27.23)$$

onde  $\alpha = \sqrt{(x^J)^2 + (z^J)^2}$ . Efetuando a integração, obtemos

$$\phi_{\vec{E}^J}^{tampa} = \frac{q}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right]. \quad (27.24)$$

Já no referencial de Maria, o fluxo de  $\vec{E}^M$  sobre a superfície direita do cilindro é calculado usando-se a eq.(27.10) e obtemos

$$\phi_{\vec{E}^M}^{tampa} = \iint \vec{E}^M \cdot \vec{j} dS^M = \int_0^a d\alpha \alpha \int_0^{2\pi} d\phi \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma(h/\gamma)}{[\alpha^2 + \gamma^2(h/\gamma)^2]^{3/2}}, \quad (27.25)$$

onde usamos o fato de que, em  $S_M$ , a altura do cilindro é  $h/\gamma$ . Este resultado é idêntico à eq.(27.23) e podemos concluir que os fluxos sobre as tampas dos cilindros são iguais nos dois referenciais. Isto corresponde à idéia de que o mesmo “número” de linhas de campos atravessa as bases dos cilindros em ambos os casos.

Por outro lado, a lei de Gauss aplicada às duas superfícies fechadas nos fornece

$$\phi_{\vec{E}^J}^{cilindro} = \phi_{\vec{E}^M}^{cilindro} = \iint_{S_J} \vec{E}^J \cdot \vec{n}^J dS^J = \iint_{S_M} \vec{E}^M \cdot \vec{n}^M dS^M = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (27.26)$$

Para que isto aconteça, os fluxos através das superfícies laterais dos cilindros devem ser iguais e, portanto, as linhas de campo no referencial de Maria, devem ser “arrastadas” em direção ao plano perpendicular ao movimento.

## • o campo magnético

No referencial  $S_M$ , existe um campo magnético que, como discutimos anteriormente, pode ser obtido a partir do campo elétrico, por meio da eq.(27.10). Usando o resultado (27.10), obtemos

$$\begin{aligned} \vec{B}^M &= \frac{v\vec{j}}{c^2} \times \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma [X^M\vec{i} + Y^M\vec{j} + Z^M\vec{k}]}{[(X^M)^2 + \gamma^2(Y^M)^2 + (Z^M)^2]^{3/2}} \\ &= \frac{v}{c^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma [-X^M\vec{k} + Z^M\vec{i}]}{[(X^M)^2 + \gamma^2(Y^M)^2 + (Z^M)^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (27.26)$$

Esta expressão mostra que o campo magnético é sempre perpendicular a  $\vec{v}$  e  $\vec{E}^M$ . A simetria em torno do eixo  $y$ , direção do movimento, faz com que as linhas do campo magnético sejam círculos, com centro neste eixo. Por isso, a direção e o sentido de  $\vec{B}^M$  são coerentes com o uso da regra da mão direita. Para o módulo de  $\vec{B}^M$ , vale a relação

$$|\vec{B}^M| = |\vec{v}| |\vec{E}^M| \text{sen } \theta \quad (27.27)$$

Como o módulo de  $\vec{E}^M$  é maior nas direções perpendiculares à velocidade, o mesmo acontece com a intensidade do campo magnético, dada por

$$B^M = \frac{v}{c^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma\sqrt{(X^M)^2 + (Z^M)^2}}{[(X^M)^2 + \gamma^2(Y^M)^2 + (Z^M)^2]^{3/2}}. \quad (27.28)$$

O fato de  $B^M$  ser diretamente proporcional a  $v$  indica que, no sistema de repouso da partícula, temos um campo magnético nulo. Por outro lado, para qualquer velocidade  $v$  não nula, há um campo magnético em todo o espaço. No limite de partículas extremamente relativísticas, o campo magnético fica predominantemente confinado no plano perpendicular ao movimento, o que acontece também com o campo elétrico.

Para completar esta discussão, é interessante discutir como Maria explica a existência de um campo magnético no seu próprio referencial. Uma possibilidade seria usar a lei de Ampère. De fato, em  $S_M$ , o movimento da carga está associado a uma corrente elétrica  $I^M$ , que dá origem a  $\vec{B}^M$ . Entretanto, é difícil estabelecer a relação matemática entre  $I^M$  e  $\vec{B}^M$ , porque a corrente elétrica existe apenas no ponto onde a carga está, em um dado instante. Por isso, é mais conveniente usar a lei de Maxwell e associar o campo magnético à variação temporal do campo elétrico.

Para calcular o campo  $\vec{B}^M$  num ponto  $P$  genérico, tomamos um caminho fechado  $C$ , passando por este ponto, sobre o qual apoiamos uma superfície plana  $S$ , como mostra a Fig. 27.10. Como a direção e o sentido de  $\vec{B}^M$  são conhecidos de antemão pela regra da mão direita, a lei de Maxwell nos permite obter o módulo do campo, que está relacionado ao fluxo da variação temporal do campo elétrico através da superfície  $S$ .

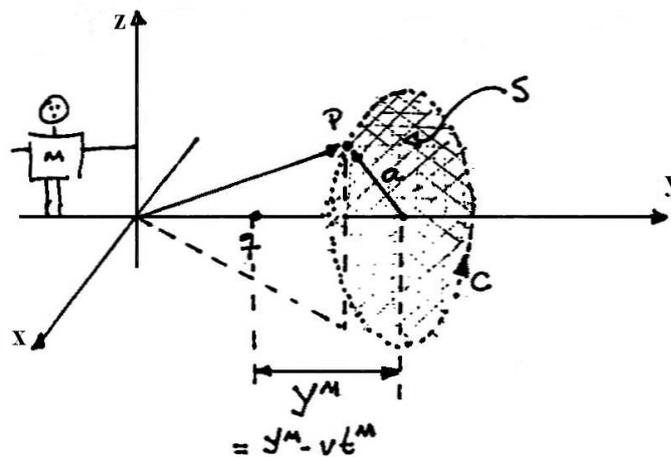


Figura 27.10: O caminho e a superfície usados no cálculo do campo magnético, no referencial  $S_M$ .

A eq.(27.9) nos permite escrever

$$\frac{d\vec{E}^M}{dt^M} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma v \left\{ \frac{3\gamma^2(y^M - vt^M) [x^M \vec{i} + (y^M - vt^M) \vec{j} + z^M \vec{k}]}{[(x^M)^2 + \gamma^2(y^M - vt^M)^2 + (z^M)^2]^{5/2}} - \frac{\vec{j}}{[(x^M)^2 + \gamma^2(y^M - vt^M)^2 + (z^M)^2]^{3/2}} \right\} \quad (27.28)$$

e o fluxo deste vetor através da superfície  $S$ , cuja normal é  $\vec{j}$ , é dado por

$$\begin{aligned} \Phi_{d\vec{E}^M/dt^M} &= \iint_S \frac{d\vec{E}^M}{dt^M} \cdot \vec{n} dS \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma v \iint_S dS \left\{ \frac{3\gamma^2(Y^M)^2}{[(X^M)^2 + \gamma^2(Y^M)^2 + (Z^M)^2]^{5/2}} - \frac{1}{[(X^M)^2 + \gamma^2(Y^M)^2 + (Z^M)^2]^{3/2}} \right\}, \end{aligned} \quad (27.27)$$

onde usamos as variáveis definidas na eq.(27.10). Para efetuar a integração, é conveniente utilizar as mesmas variáveis empregadas na eq.(27.23) e escrevemos

$$\begin{aligned} \Phi_{d\vec{E}^M/dt^M} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma v \int_0^a \alpha d\alpha \int_0^{2\pi} d\phi \left\{ \frac{3\gamma^2(Y^M)^2}{[\alpha^2 + \gamma^2(Y^M)^2]^{5/2}} - \frac{1}{[\alpha^2 + \gamma^2(Y^M)^2]^{3/2}} \right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma v \pi \int_{\gamma Y^M}^{\sqrt{a^2 + \gamma^2(Y^M)^2}} d\beta \left\{ \frac{3\gamma^2(Y^M)^2}{\beta^{5/2}} - \frac{1}{\beta^{3/2}} \right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma v 2\pi \frac{a^2}{[a^2 + \gamma^2(Y^M)^2]^{3/2}}, \end{aligned} \quad (27.26)$$

usando  $\beta = \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2(Y^M)^2}$ .

O fato de  $|\vec{B}^M|$  ser constante sobre o caminho  $C$  e a eq.(27.28) permite-nos escrever a lei de Maxwell como

$$\oint_C \vec{B}^M \cdot d\vec{c} = \mu_0 \epsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}^M}{\partial t^M} \cdot \vec{n} dS \quad \rightarrow \quad 2\pi a B^M = \mu_0 \epsilon_0 \Phi_{d\vec{E}^M/dt^M} \quad (27.27)$$

e, portanto,

$$B^M = \mu_0 \epsilon_0 v \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \gamma \frac{a}{[a^2 + \gamma^2(Y^M)^2]^{3/2}}. \quad (27.28)$$

Este resultado é idêntico ao da eq.(27.28), indicando que, de fato, Maria pode atribuir a existência de um campo magnético no seu referencial à variação temporal do campo elétrico.

• **exercícios**

1. Mostre que a direção e o sentido do campo magnético expresso pela eq.(27.10) são coerentes com a "regra da mão direita".

2. Considere a Fig. 27.3, suponha que os vetores  $\vec{r}^M$  e  $\vec{r}_q^M$  sejam conhecidos e calcule:

- a) a distância do ponto P à carga q;
- b) a distância da projeção do ponto P no plano  $xy$  à carga q;
- c)  $\cos \theta$ .

3. Considere as linhas de campo elétrico de uma carga em repouso, situadas sobre o plano  $yz$  e formando os ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$  com o eixo  $z$ . Determine as orientações destas mesmas linhas quando a carga se move com velocidade  $v = 0,95c$ , ao longo do eixo  $y$ .

4. Faça um desenho semelhante à Fig. 27.6 representando, em escala, o campo elétrico de uma carga que se move com velocidade  $v = 0,95c$ . Adote uma escala tal que a maior flecha possível tenha 10 cm.

5. Faça um desenho análogo ao da Fig. 27.6, representando o campo magnético por meio de flechas.

• **respostas**

2. a)  $\sqrt{(x^M)^2 + (y^M - V t^M)^2 + (z^M)^2}$

b)  $\sqrt{(x^M)^2 + (y^M - V t^M)^2}$

c)  $\cos \theta = \frac{y v t}{|v t| \sqrt{(x^M)^2 + (y^M)^2 + (z^M)^2}}$

3.  $\gamma = 3,2 \rightarrow 30^\circ \rightarrow \tan^{-1} \gamma / \sqrt{3} = 61,6^\circ$ ,  $45^\circ \rightarrow \tan^{-1} \gamma = 72,6^\circ$ ,  
 $60^\circ \rightarrow \tan^{-1} \gamma \sqrt{3} = 79,8^\circ$ .

# Capítulo 28

## cargas aceleradas

Uma carga elétrica puntiforme *em repouso* tem, ao seu redor, um campo eletrostático radial e esfericamente simétrico. Quando esta carga se move *com velocidade constante*, ela “arrasta” consigo um campo elétrico radial, que não apresenta mais simetria esférica e um campo magnético, como discutimos na aula anterior. O objetivo desta aula e da seguinte consiste em estudar como se comportam os campos desta carga quando ela é *acelerada*. Veremos que, neste caso, as linhas de campo elétrico deixam de ser retilíneas e que isto corresponde à existência de ondas eletromagnéticas. De modo muito geral, a aceleração de uma carga elétrica está sempre associada à produção de ondas eletromagnéticas, ou seja, à radiação. E a recíproca também é verdadeira: toda radiação eletromagnética é devida a cargas aceleradas. Para discutir este processo extremamente importante é preciso, inicialmente, compreender um pouco melhor como se comportam os campos de uma carga em movimento uniforme à medida que o tempo passa.

### • a direção do campo elétrico

Quando uma carga elétrica  $q$ , positiva, se move com velocidade *constante*  $v$  ao longo do eixo  $y$ , as suas linhas de campo têm, num dado instante, as características mostradas na figura 28.1a. Suponhamos que um observador, fixo em um ponto  $P$  do espaço, deseje medir, neste instante, a direção do campo elétrico. Para tanto, ele poderia usar uma “bússola elétrica”, como a da figura 28.1b, constituída por duas cargas pontuais de sinais opostos, separadas por uma barra isolante. Esse aparelho, que nada mais é do que um dipolo elétrico com centro fixo, tende a se alinhar paralelamente ao campo elétrico existente nas suas vizinhanças. Se a “bússola” tiver pouca inércia, este alinhamento pode ocorrer muito rapidamente.

Como o campo elétrico criado pela carga  $q$  em movimento uniforme é radial, esta carga e as duas do dipolo elétrico estão sempre alinhadas, como mostra a figura 27.2. À medida que a carga se move, a “bússola elétrica” acompanha esse movimento, girando em torno do ponto  $P$ . Como a “bússola” indica a direção de  $\vec{E}$ , o observador pode afirmar que

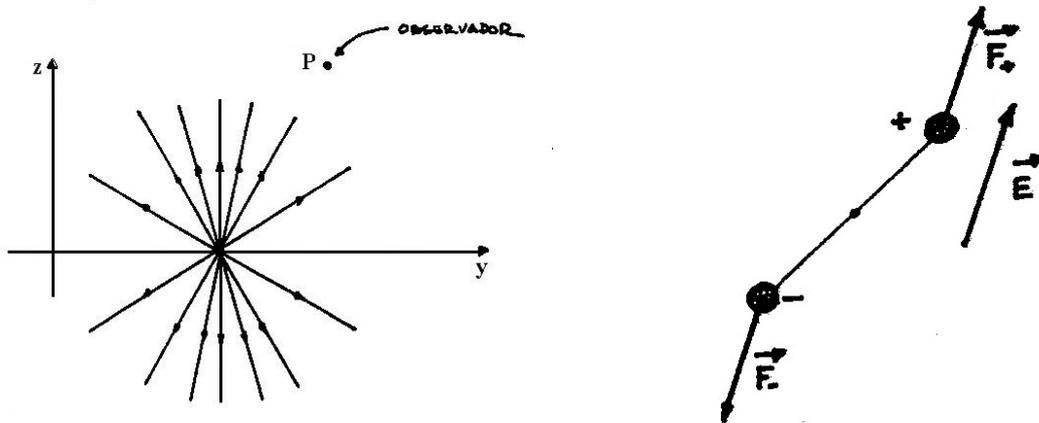


Figura 28.1: a) Linhas de campo de uma carga positiva em movimento uniforme e o ponto  $P$ , onde se encontra um observador. b) A "bússola elétrica": as forças sobre as cargas fazem com que a bússola se alinhe ao campo elétrico.

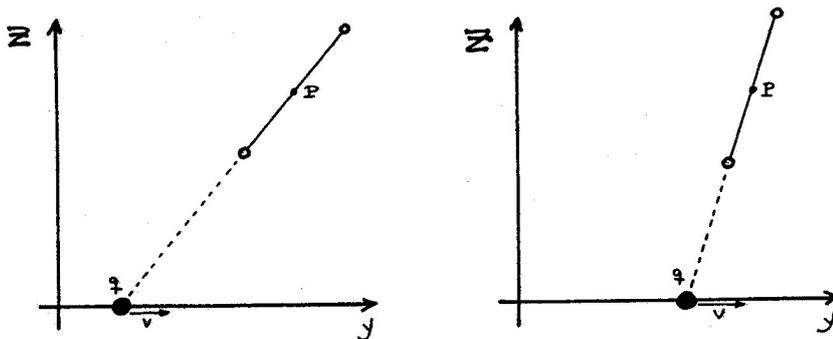


Figura 28.2: A "bússola elétrica" aponta para a carga em dois instantes diferentes.

o movimento da carga é acompanhado por uma rotação do campo elétrico em torno do ponto  $P$ .

Esta situação bastante simples dá margem a várias perguntas interessantes. Uma delas é a seguinte: num certo instante, a "bússola elétrica" aponta para onde a carga *está* ou para onde ela *esteve*? Para respondê-la, lembramos que, no caso de uma carga em movimento uniforme, o campo elétrico é radial, o que faz com que a sua direção no ponto  $P$  seja, em qualquer instante, a da reta que une este ponto à carga. Portanto, o dipolo aponta para onde a carga *está*. Isto ocorre porque a carga e as suas linhas de campo formam uma configuração, que se translada sem modificações. Assim, as linhas de campo não podem ser simultaneamente retilíneas e apontar para onde a carga esteve, já que isto corresponderia a desgrudar as linhas da carga, e a lei de Gauss seria violada.

É muito importante enfatizar que as linhas de campo elétrico de uma carga com velocidade constante **não** são análogas aos raios emitidos por uma fonte luminosa puntiforme,

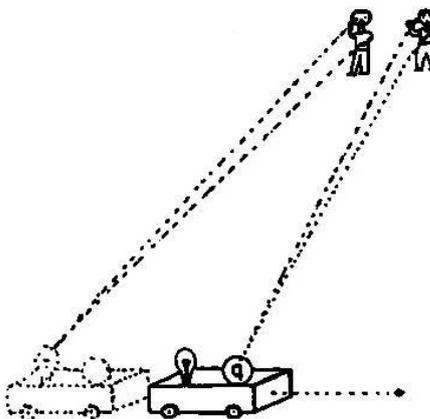


Figura 28.3: A lâmpada e a carga, observadas por meio de raios de luz e linha de campo elétrico.

tal com uma lâmpada pequena. A lâmpada emite luz, mas a carga **não** emite campo e, por isso, estas duas situações não são semelhantes. Por exemplo, se pusermos uma lâmpada acesa e uma carga elétrica num único carrinho pequeno, que se move com velocidade constante, aparelhos de medida das direções do campo e dos raios de luz, colocados num mesmo lugar, apontariam em direções diferentes. O detetor de luz apontaria para onde o carrinho havia estado alguns instantes antes, enquanto que o dipolo elétrico apontaria exatamente para onde ele está. As linhas de campo elétrico não se atrasam, como acontece com os raios de luz. Esta situação está ilustrada na figura 28.3.

O fato de as linhas de campo elétrico de uma carga em movimento uniforme serem retas que passam por ela, dá origem a uma outra questão: é possível que um observador, medindo apenas a direção deste campo elétrico num dado instante, possa saber com certeza a posição da carga neste mesmo instante, independentemente da distância dela ao ponto onde ele se encontra? A resposta é sim, ele pode. Para tanto, basta que ele calcule a interseção da direção do campo elétrico que ele mede, com o eixo  $y$ . Esta resposta parece ser paradoxal pois, no contexto da relatividade, não é possível a transmissão instantânea de informação entre dois pontos do espaço. A maior velocidade com que essa informação pode viajar é a velocidade da luz. Para entender porque este paradoxo é apenas aparente, é preciso saber o que acontece com os campos de uma carga quando ela é acelerada.

### • o efeito da aceleração

Para dramatizar um pouco a discussão, imagine um observador no interior de um laboratório, na forma de um cubo, com a localização indicada na figura 28.4. Na sua parede traseira, contida no plano  $yz$ , está instalada uma bússola elétrica e, nas paredes laterais esquerda e direita, existem orifícios juntos ao eixo  $y$ . Uma carga elétrica positiva move-se, com velocidade constante  $v$ , ao longo do eixo  $y$ , passando pela origem no instante

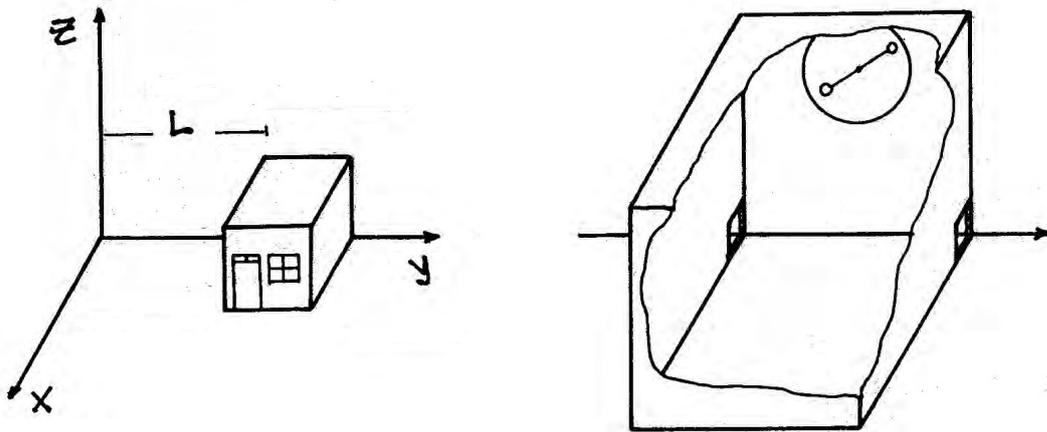


Figura 28.4: O laboratório é o cubo de lado  $\ell$  e o dipolo elétrico está pendurado na parede traseira.

$t = 0$ . É possível, numa situação como esta, que um observador no interior do laboratório, olhando apenas para o dipolo elétrico, possa prever o instante em que a carga entrará no laboratório, pelo buraco esquerdo na parede?

A resposta é **sim** e **não**. Isto é, não necessariamente. O que se pode afirmar é que, se não houver alteração no movimento da partícula até o instante  $t = L/v$ , a bússola estará apontando para o buraco da parede esquerda exatamente no instante em que a carga aparece nele. Mas, para que isso aconteça, é fundamental que a velocidade da carga não seja alterada. O nosso objetivo aqui é discutir o que acontece com a bússola quando essa condição não é satisfeita.

Suponha, por exemplo, que sobre o eixo  $y$ , um pouco antes do buraco na parede esquerda, haja um obstáculo capaz de parar a partícula, não permitindo que ela entre no laboratório. Quando a carga pára, o que acontece com a bússola elétrica? Será que ela pode parar de girar exatamente no mesmo instante? Para que isto ocorra, seria necessário que o dipolo elétrico fosse instantaneamente informado de que a carga parou. Entretanto, de acordo com a relatividade, isso não pode acontecer.

Uma das conseqüências mais importantes da teoria da relatividade é a impossibilidade de troca instantânea de informação entre dois pontos separados um do outro. Isto corresponderia à informação viajar com velocidade infinita enquanto que, segundo a relatividade, a maior velocidade com que um sinal pode ir de um ponto a outro é  $c$ , a velocidade da luz. Por isso, bússola elétrica leva necessariamente algum tempo para poder “saber” que a carga parou. O que ela faz desde que a carga pára até a chegada desta informação até ela?

Do ponto de vista lógico, a resposta a tal pergunta é simples: se a informação de que a carga parou ainda não chegou à bússola, então o campo elétrico na sua vizinhança se comporta como se a carga ainda estivesse em movimento. A bússola, portanto, continua

a girar, apontando para a posição em que a partícula *deveria estar* se a sua velocidade não houvesse sido alterada. Ou seja, pode acontecer de a bússola estar apontando para um ponto do eixo  $y$  no interior do laboratório e a carga ainda estar em outro ponto do eixo anterior ao laboratório, fora dele. Apesar de poder parecer estapafúrdia, tal resposta é consistente.

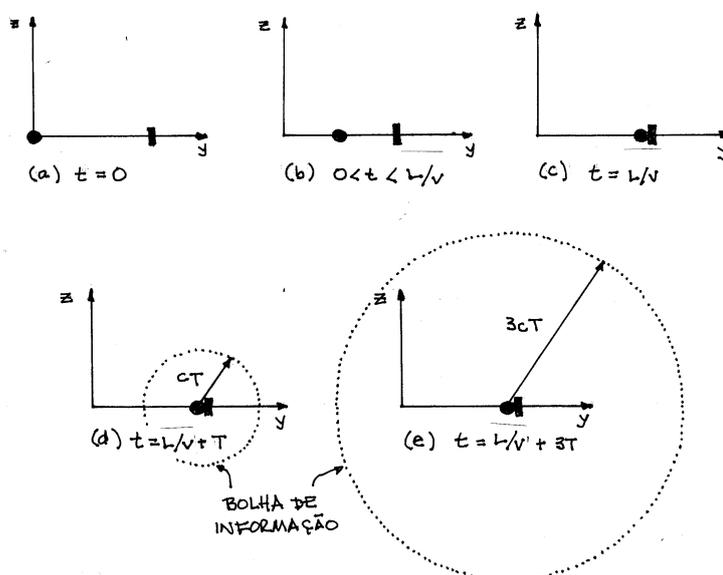


Figura 28.5: A propagação da informação: (a) e (b) a carga antes de atingir o obstáculo; (c) o instante do choque; (d) e (e) a carga em repouso a propagação da “bolha de informação”.

Para compreender melhor o que acontece numa situação destas, consideremos uma carga  $q$ , que se move com velocidade constante  $v$ , ao longo do eixo  $y$ , sobre o qual existe um obstáculo, num ponto distando  $L$  da origem, como mostram as figuras 28.5. Se chamarmos de  $t = 0$  o instante em que a partícula passa pela origem, o choque com o obstáculo ocorre em  $t_1 = L/v$ . A partir daí, a partícula permanece em repouso e a informação de que ela parou começa a viajar em todas as direções do espaço, com velocidade  $c$ . Assim, num instante  $t_2 = L/v + T$ , a superfície esférica que carrega esta informação tem centro na carga e raio  $cT$ . Esta superfície divide o espaço em torno da carga em três regiões distintas: o interior da esfera, onde todos os pontos já foram informados de que a carga parou, o seu exterior, onde isto ainda não aconteceu, e a própria superfície, que contém a informação acerca da variação de movimento da carga. À medida que o tempo passa, o raio desta *bolha de informação* vai aumentando e cada vez mais pontos vão sendo informados de que a carga foi acelerada.

Imagine, agora, que o campo elétrico da carga  $q$  seja monitorado por uma bússola elétrica, localizada no ponto  $P = (0, a, b)$ , sobre o plano  $yz$ , como na figura 28.6. Até o instante  $t_1 = L/v$ , a partícula move-se uniformemente para a direita, e a bússola aponta continuamente para ela. Neste instante, a carga encontra o obstáculo, e a sua velocidade passa a ser nula. A partir do instante do choque, a informação de que a velocidade da

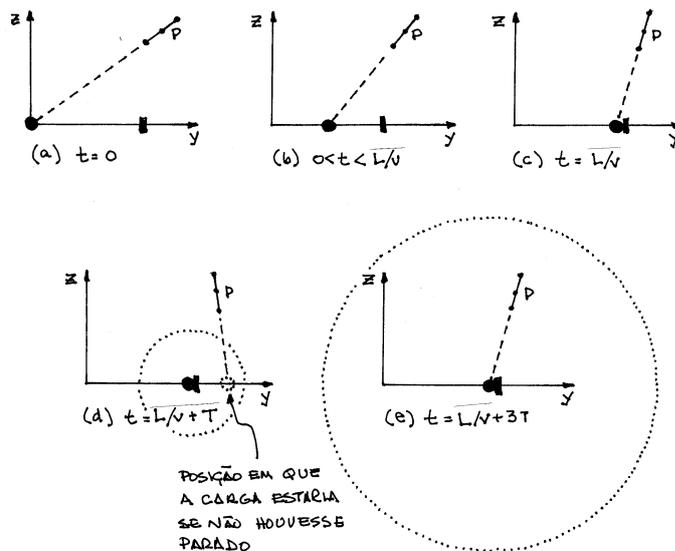


Figura 28.6: O comportamento da "bússola elétrica": em (a), (b) e (c) a bússola aponta para onde a carga está; em (d), ela aponta para onde a carga estaria; em (e), ela novamente aponta para onde a carga está.

carga foi alterada começa a viajar em todas as direções do espaço, com velocidade  $c$ . Assim, o intervalo de tempo entre a parada da partícula e a chegada desta informação ao ponto  $P$  é dado por

$$\Delta t = \frac{\sqrt{(a-L)^2 + b^2}}{c}. \quad (28.1)$$

Portanto, durante o intervalo  $L/v < t < L/v + \Delta t$ , a bússola continua a girar, apontando para a posição do eixo  $y$  em que a partícula *estaria* se não houvesse parado, como indicado na figura 28.6. No instante  $t + \Delta t$ , a informação de que a carga está parada chega ao ponto  $P$  e a bússola passa a apontar novamente para ela, como na figura 28.6e. Isso continua a acontecer para  $t > L/v + \Delta t$ .

Neste exemplo, a rotação da bússola no intervalo  $L/v < t < L/v + \Delta t$  parece ocorrer "sozinha", automaticamente. Isso nos leva à questão: o que causa esta rotação? Ou, o que é equivalente, por que a direção do campo elétrico no ponto  $P$  varia com o tempo? Uma resposta apenas parcialmente correta seria afirmar que o dipolo gira porque a carga se move.

Esta explicação pode ser boa para o caso em o movimento da partícula é uniforme. Quando este movimento é interrompido, vemos que o campo elétrico no ponto  $P$  deixa de apontar para a carga, durante um intervalo de tempo  $\Delta t$ . Isto indica que a variação temporal do campo elétrico em  $P$  é independente da posição da carga e deve, portanto, ser atribuída a causas eletromagnéticas locais. A situação é análoga ao caso do microlab no interior da linha de transmissão, discutido na aula 9, pois estas causas locais estão

relacionadas às leis de Faraday e Ampère-Maxwell. A primeira delas diz que um campo magnético variável com o tempo cria um campo elétrico, enquanto que a outra afirma que um campo elétrico dependente do tempo cria um campo magnético. O efeito coletivo das equações de Maxwell em uma região onde não existem cargas nem correntes é atribuir *inércia* aos campos elétricos e magnéticos.

### • campos e inércia

A idéia de que a energia localizada nos campos tem inércia foi mais uma das grandes contribuições do eletromagnetismo à física.

A noção de inércia foi introduzida por Newton, nos seus textos sobre mecânica, como uma das propriedades da massa. Nos dois séculos seguintes, esta associação entre inércia e massa passou a ser uma das grandes referências conceituais para o estudo do mundo material, que somente começou a ser questionada seriamente a partir da segunda metade do século 19, com o eletromagnetismo. Atualmente, é amplamente aceita na comunidade científica a idéia de que sistemas sem massa, como os fótons, possuem inércia e, por isso, podem ter momentos lineares e angulares. Situações em que cargas são aceleradas ilustram bem a inércia de campos eletromagnéticos.

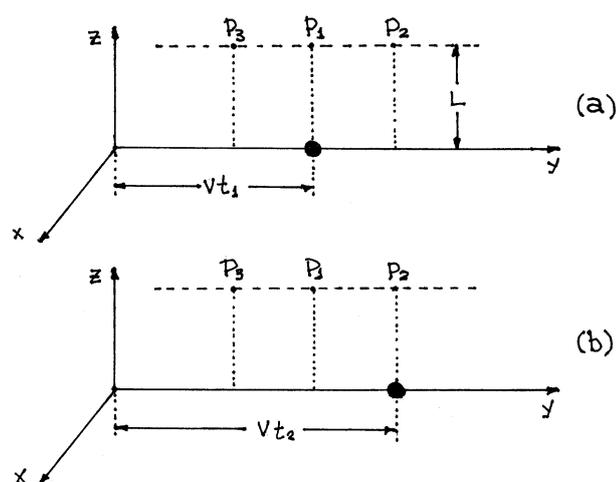


Figura 28.7:

Os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  de uma carga em movimento uniforme foram estudados na aula 27. O campo  $\vec{B}$  é relacionado a  $\vec{E}$  pela eq. (27.10)

$$\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E} \quad (28.2)$$

e, a uma distância  $R$  da carga, estes campos têm intensidade máxima nos pontos do plano que passa pela carga e é perpendicular a  $y$ . A figura 28.7a mostra, no instante  $t = t_1$ , uma carga com velocidade  $\vec{v} = \vec{j}$  que passou pela origem no instante  $t = 0$ . Nesta configuração,

existe uma densidade de energia eletromagnética em qualquer ponto  $P$  da vizinhança da carga, dada por

$$\left[ \frac{dU(t)}{dV} \right]_P = \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}_P^2(t) + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}_P^2, \quad (28.3)$$

onde  $\vec{E}_P(t)$  e  $\vec{B}_P(t)$  são os campos elétrico e magnético naquele ponto. Estes campos dependem do tempo porque a carga se move, e o mesmo acontece com a densidade de energia.

Ao longo da linha pontilhada paralela ao eixo  $y$ , mostrada na figura 28.7a, a densidade de energia é máxima no ponto  $P_1$  e, com o auxílio da eq. (28.3), pode ser expressa por

$$\left[ \frac{dU(t_1)}{dV} \right]_{P_1} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \right) E_{P_1}^2(t_1). \quad (28.4)$$

Nos pontos  $P_2$  e  $P_3$ , equidistantes de  $P_1$ , as densidades de energia são iguais entre si e menores do que em  $P_1$ :

$$\left[ \frac{dU(t_1)}{dV} \right]_{P_2} = \left[ \frac{dU(t_1)}{dV} \right]_{P_3} < \left[ \frac{dU(t_1)}{dV} \right]_{P_1} \quad (28.5)$$

Como a carga se desloca ao longo do eixo  $y$ , em um instante  $t_2$  ela estará alinhada com o ponto  $P_2$ , como mostra a figura 28.7b. Nesta nova situação, a densidade de energia é máxima em  $P_2$ . Como  $E_{P_2}(t_2) = E_{P_1}(t_1)$ , ela vale

$$\left[ \frac{dU(t_2)}{dV} \right]_{P_2} = \left[ \frac{dU(t_1)}{dV} \right]_{P_1}, \quad (28.6)$$

enquanto que, para o ponto  $P_1$ , temos

$$\left[ \frac{dU(t_2)}{dV} \right]_{P_1} = \left[ \frac{dU(t_2)}{dV} \right]_{P_3}. \quad (28.7)$$

Estes resultados indicam que a densidade de energia se move junto com a carga. A questão muito importante é determinar porque isto acontece.

Uma possibilidade seria pensar que a carga arrasta a energia consigo. Entretanto, este tipo de explicação esbarra em dois problemas. O primeiro deles é que precisariam existir forças ligando a energia em um certo ponto à carga. O segundo é que os deslocamentos das densidades de energia acompanham a carga, sem atrasos, mesmo em pontos muito distantes dela, o que sugere algum tipo de ação instantânea.

A outra possibilidade, aceita atualmente, consiste em pensar que a energia acompanha a carga porque o seu movimento é inercial. Este caráter inercial do movimento da energia torna-se mais plausível se lembrarmos que, na aula 27, os campos da carga em movimento uniforme foram obtidos, por meio de uma mudança de referencial, a partir do campo coulombiano de uma carga em repouso. A mesma mudança de referencial que dotou a

carga de movimento também dotou as densidades de energia associadas aos seus campos de movimento uniforme. Neste processo, a carga não precisa arrastar a densidade de energia.

A inércia da energia, que é menos evidente quando o movimento da carga é uniforme, aparece claramente quando a velocidade da carga é variada. No caso das figuras 28.5 e 28.6, quando a carga bate no obstáculo, a energia do exterior da bolha de informação segue em frente, inercialmente.

### • a inércia eletromagnética

De modo muito geral, uma carga é responsável por campos elétrico e magnético em um ponto  $P$  nas suas vizinhanças. Quando a carga se move, estes campos variam com o tempo. A variação de  $\vec{E}$  cria um campo magnético e, por sua vez, a variação de  $\vec{B}$  com o tempo recria um novo campo elétrico, que por sua vez recria um campo magnético, que por sua vez recria... Esta é uma situação totalmente análoga à das ondas eletromagnéticas, discutida em aulas anteriores. Assim, os campos elétrico e magnético de uma carga em movimento uniforme numa pequena região do espaço variam com o tempo de modo autônomo, “por conta própria”. No caso discutido nas figuras 28.5 e 28.6, isto é responsável pela rotação da bússola elétrica no intervalo  $L/v < t < L/v + \Delta t$ , entre a parada da partícula e a chegada desta informação ao ponto  $P$ .

Para tornar este fato mais claro, suponhamos que, num instante qualquer, designado por  $T$ , sejam conhecidos os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  numa região fora do eixo  $y$ . Este conhecimento determina, automaticamente, os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  na mesma região, no instante seguinte  $T + dt$ , sem que seja necessário fazer referência à posição da carga. De fato, a relação entre os campos elétricos, num mesmo ponto, em dois instantes consecutivos, pode ser expressa como

$$\vec{E}(\vec{r}, T + dt) = \vec{E}(\vec{r}, T) + dt \left[ \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right]_{t=T}. \quad (28.8)$$

Por isso, se soubermos  $\vec{E}(\vec{r}, T)$ , o conhecimento de  $\partial \vec{E} / \partial t$  permite o cálculo de  $\vec{E}(\vec{r}, T + dt)$ , o campo elétrico no instante seguinte. Por outro lado, a derivada temporal de  $\vec{E}$  está relacionada a  $\vec{B}$  pela lei de Ampère-Maxwell,

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (28.9)$$

Assim, podemos escrever

$$\vec{E}(\vec{r}, T + dt) = \vec{E}(\vec{r}, T) + c^2 [\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, T)] dt. \quad (28.10)$$

Conhecendo  $\vec{E}(\vec{r}, T)$  e  $\vec{B}(\vec{r}, T)$ , seremos capazes de calcular o campo elétrico no instante  $T + dt$ . Deste modo, o conhecimento de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  em um instante determina o campo elétrico no futuro imediato! Portanto, a rotação do campo elétrico com o tempo num ponto  $P$  é

causada pelos próprios campos nesse ponto e não é necessário saber o que a partícula está fazendo nesse instante. Ou seja,  $\vec{E}$  gira de forma autônoma e carrega a bússola consigo.

O campo elétrico gira por conta própria porque o movimento da partícula desencadeou um processo em que  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  variam com o tempo de forma a fazer com que, em um dado ponto, o campo elétrico  $\vec{E}$  sempre aponte para a posição onde a partícula está. Ou deveria estar, se o seu movimento for alterado. O comportamento do campo magnético pode ser explicado, de modo totalmente análogo, sem menção ao movimento da partícula, escrevendo

$$\vec{B}(\vec{r}, T + dt) = \vec{B}(\vec{r}, T) + dt \left[ \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right]_{t=T} \quad (28.11)$$

Usando a lei de Faraday,

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (28.12)$$

obtemos

$$\vec{B}(\vec{r}, T + dt) = \vec{B}(\vec{r}, T) - dt[\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t)] \quad (28.13)$$

E resumo: no caso da carga com velocidade constante, a bússola no ponto  $P$  aponta sempre para a carga, acompanhando seu movimento, porque os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}_i$  variam autonomamente em torno de  $P$ . Quando a carga é acelerada, esta variação autônoma dura algum tempo, até que a informação acerca da variação da velocidade da carga, que se propaga com  $c$ , chegue até o ponto  $P$ . Após a passagem da bolha de informação por este ponto, é estabelecido um *novo* comportamento temporal autônomo para os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  na sua vizinhança. De modo figurado, pode-se dizer que a bolha de informação vai passando os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  a limpo, substituindo variações temporais associadas ao estudo de movimento antigo da carga, por variações novas. Como veremos na próxima aula, a superfície da bolha de informação corresponde a um pulso de onda eletromagnética.

## • exercícios

1. Uma carga  $q$ , positiva, inicialmente em repouso no ponto  $(0, L, 0)$ , é empurrada no instante  $t = 0$  e passa a se mover ao longo do eixo  $y$ , com velocidade  $\vec{v} = v\vec{j}$ . No ponto  $P : (0, 2L, L)$  existe uma bússola elétrica, cuja direção é caracterizada pelo versor  $\vec{u}$ . Determine a posição  $P_q$  da carga e o versor  $\vec{u}$  nos instantes:

- a)  $t = 0$  ,
- b)  $t = L/c$  ,
- c)  $t = 2L/c$  .

2. Uma carga  $q$ , positiva, move-se ao longo do eixo  $y$  com velocidade  $\vec{v} = v\vec{j}$ . No instante  $t = 0$ , ela se choca com um obstáculo localizado em  $(0, L, 0)$  e passa a se mover com velocidade  $\vec{v} = -v\vec{k}$ , paralela ao eixo  $z$ . No ponto  $P : (0, 2L, L)$  existe uma bússola elétrica, cuja direção é caracterizada pelo versor  $\vec{u}$ . Determine a posição  $P_q$  da carga e o

versor  $\vec{u}$  nos instantes:

a)  $t = 0$  ,

b)  $t = L/c$  ,

c)  $t = 2L/c$  .

• respostas

1. a)  $P_q : (0, L, 0);$   $\vec{u} = -\frac{(\vec{j}+\vec{k})}{\sqrt{2}}$

b)  $P_q : (0, L(1 + v/c), 0);$   $\vec{u} = -\frac{(\vec{j}+\vec{k})}{\sqrt{2}}$

c)  $P_q : (0, L(1 + 2v/c), 0);$   $\vec{u} = -\frac{[(1-2v/c)\vec{j}+\vec{k}]}{\sqrt{2-4v/c+4v^2/c^2}}$

2. a)  $P_q : (0, L, 0);$   $\vec{u} = -\frac{(\vec{j}+\vec{k})}{\sqrt{2}}$

b)  $P_q : (0, L, -Lv/c);$   $\vec{u} = \frac{[(1-v/c)\vec{j}+\vec{k}]}{\sqrt{2+2v/c-v^2/c^2}}$

c)  $P_q : (0, L, -2Lv/c);$   $\vec{u} = -\frac{[\vec{j}+(1+2v/c)\vec{k}]}{\sqrt{2+4v/c+4v^2/L^2}}$



# Capítulo 29

## radiação

### • cargas aceleradas

De modo geral, as direções dos campos elétricos criados por cargas puntiformes dependem de como elas se movem. Quando as cargas estão em repouso ou têm movimento uniforme, as direções dos seus campos elétricos são determinadas por linhas retas, que passam pela carga. Já quando as cargas são aceleradas, as linhas de campo deixam de ser retilíneas, embora permaneçam contínuas, como discutimos na aula 28. Isto acontece devido à conjugação de dois fatores, a inércia da energia do campo eletromagnético e a impossibilidade de propagação instantânea da informação.

Nesta aula analisamos, de forma um pouco mais elaborada, o campo elétrico de uma carga positiva, em movimento uniforme, que é desacelerada até parar. Definimos como instante  $t = 0$  aquele em que a carga começa a ser desacelerada e, como  $t = \Delta T$ , aquele em que a carga pára completamente. Portanto, para valores negativos de  $t$ , as linhas de força do campo elétrico são como as mostradas na figura 29.1.

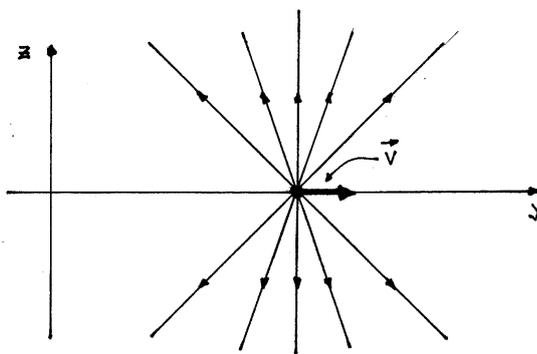


Figura 29.1:

Estamos interessados em determinar a forma das linhas de campo em todo o espaço,

em um instante  $t_1 > \Delta T$ . Para tanto, lembramos que as *informações* associadas à aceleração se propagam com velocidade  $c$  e, neste problema, existem duas bolhas de informação especialmente interessantes. A primeira delas corresponde à informação de que a carga começou a ser desacelerada e tem centro no ponto  $P_I$  do eixo  $y$ , onde isto ocorreu, e raio  $ct_1$ . A segunda está associada ao fim do processo de desaceleração, tem centro no ponto  $P_F$  onde a carga permanece parada, e raio  $c(t_1 - \Delta T)$ . Estas duas bolhas dividem o espaço em três regiões diferentes, como indicado na figura 29.2.

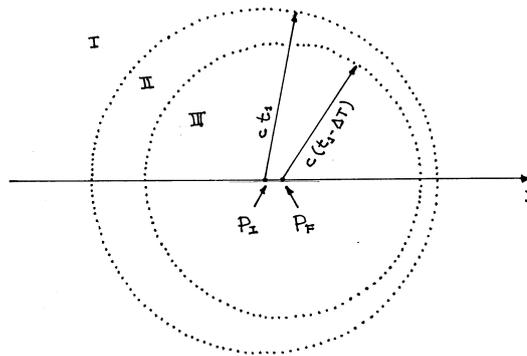


Figura 29.2:

A bolha externa é a mais antiga, associada à propagação da informação de que a carga começou a parar no instante  $t = 0$ . No instante  $t = t_1$ , esta bolha evolui, tem raio  $ct_1$ , e separa as regiões I e II. A bolha interna, por outro lado, foi gerada no instante  $t = \Delta T$  e corresponde à informação de que a carga já parou completamente. Em  $t = t_1$ , ela tem raio  $c(t_1 - \Delta t)$  e separa as regiões II e III. Como discutimos a seguir, o campo elétrico da carga se comporta de maneira diferente em cada uma das três regiões delimitadas pelas bolhas de informação.

A forma mais nova do campo está encerrada na região III. Como a carga já está parada há um tempo  $t = t_1 - \Delta T$ , nesta região não existe campo magnético e o campo elétrico é coulombiano, com linhas de campo que passem pela carga, como na figura 29.3a. Consequentemente, a densidade de energia, é esfericamente simétrica em relação à posição da carga.

Já as formas mais antigas de campo estão na região I. No instante  $t = t_1$ , nenhum ponto daquela região recebeu ainda qualquer informação que a velocidade inicial da carga foi alterada. Por isso, neste setor do espaço continuam a existir campos elétricos e magnéticos, que dependem do tempo e, por isso, se recriam continuamente. O resultado deste processo é que, na região I, as linhas de campo elétrico se movem continuamente para a direita, com velocidade  $v$ , e os seus prolongamentos se cruzam sempre no ponto  $P_V$ , onde a carga *deveria estar* se não houvesse sido desacelerada. De modo complementar, a densidade de energia associada aos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  também se move para a direita, inercialmente. Esta situação está indicada na figura 29.3b, onde as linhas contínuas na região I são físicas e as linhas tracejadas nas regiões II e III são hipotéticas, pois indicam o que aconteceria se a velocidade inicial da carga não houvesse sido alterada.

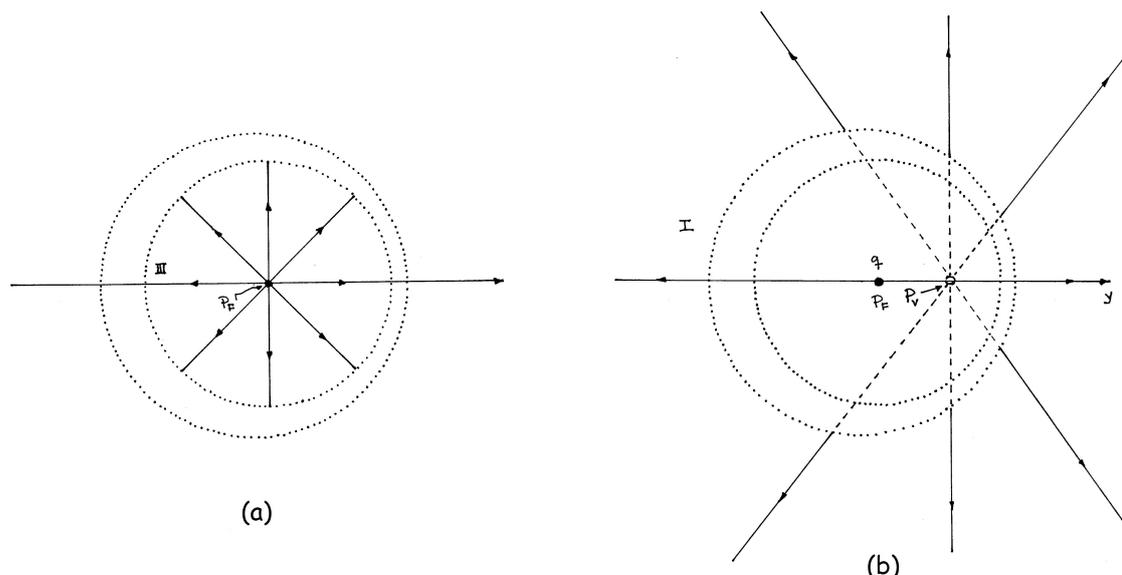


Figura 29.3:

O comportamento do campo na região II pode ser inferido considerando as figuras 29.3a e 29.3b em conjunto. Neste problema existe apenas uma carga positiva  $e$ , para que a lei de Gauss elétrica seja válida, as linhas de campo que nascem nela devem ir até o infinito. Em outras palavras, na situação que estamos considerando, as linhas de campo devem ser contínuas. Uma solução deste problema está mostrada na figura 29.4. É muito importante notar que o casamento entre as linhas da região I com as da região III foi feito de modo a evitar o cruzamento de linhas de campo no interior da região II. Este tipo de cuidado é sempre necessário, pois o cruzamento de linhas correspondente a uma indefinição da direção do campo elétrico. Por outro lado, as formas das linhas de campo mostradas na região II somente podem ser determinadas com precisão se conhecermos o processo de aceleração em detalhe. Assim, por exemplo, as linhas na região II decorrentes de um processo com aceleração constante são diferentes das produzidas por uma aceleração que varie com o tempo. Existem métodos matemáticos apropriados para tratar este tipo de problema, mas eles vão além das limitações da nossa discussão qualitativa. Por isso, as linhas da região II mostradas na figura 29.5 envolvem alguma arbitrariedade. Apesar disto, esta figura é um ótimo ponto de partida para estudar o efeito da aceleração sobre cargas elétricas.

Neste problema, não falamos muito do campo magnético, mas ele também está presente, sendo criado pelas variações temporais do campo elétrico. Na região I, ele aponta para fora da página e seu valor é dado por  $\vec{B} = \vec{v} \times \vec{E}/c^2$ , eq. (27.10), enquanto que ele é nulo na região III. Na região II, por outro lado, a forma de  $\vec{B}$  depende do processo de aceleração.

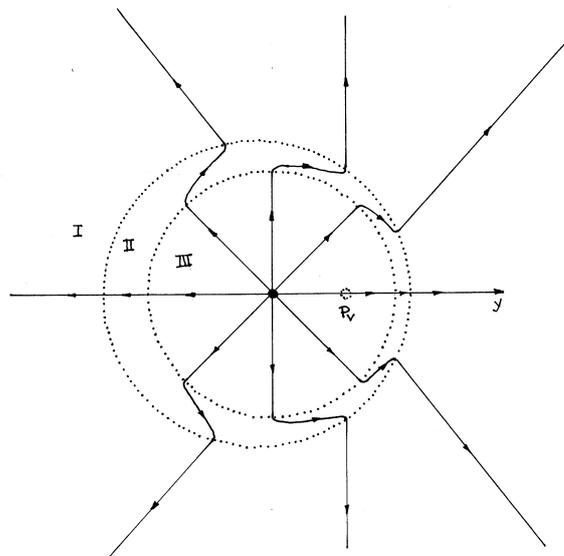


Figura 29.4:

### • radiação

A figura 29.4 permite pensar na evolução temporal do campo elétrico de uma partícula carregada que é desacelerada. Para tempos negativos, quando a velocidade da partícula era constante, apenas a região I existia e o campo tinha a forma mostrada na figura 29.1. A região II fica definida entre os instantes  $t = 0$  e  $t = \Delta T$ , pelo aparecimento sucessivo das suas superfícies externa e interna. A partir daí, estas duas bolhas não concêntricas crescem continuamente à medida que o tempo passa, com velocidade  $c$ . E, se não acontecerem novas acelerações, depois de um tempo infinitamente grande, todo o espaço em torno da carga estará preenchido pelo campo coulombiano. Deste modo, a região II, ao se expandir, vai passando o campo a limpo, substituindo o antigo pelo novo.

O volume da região II depende do modo como a partícula carregada foi desacelerada e, em particular, do intervalo de tempo  $\Delta T$ . Quanto menor for  $\Delta T$ , mais próximas estarão as bolhas externa e interna. No caso de uma aceleração muito grande, que age durante um intervalo de tempo  $\Delta T$  muito pequeno, as superfícies das duas bolhas praticamente coincidem e a situação mostrada na figura 29.4 passa a ter a forma mostrada na figura 29.5. Ela representa uma espécie de fotografia do campo elétrico no instante  $t_1$  e mostra que, nesta situação mais radical, as linhas de campo são *tangenciais* à bolha. Com o passar do tempo, cada ponto da bolha se move na direção radial e leva consigo um campo elétrico ortogonal a esta direção. Em outras palavras, sobre a bolha, o campo elétrico se propaga transversalmente, com a velocidade de expansão da bolha, que é  $c$ . Esta é a característica do campo elétrico de uma onda eletromagnética. Este campo elétrico, que varia com o tempo, é acompanhado por um campo magnético, com direção ortogonal tanto à direção radial como ao campo elétrico.

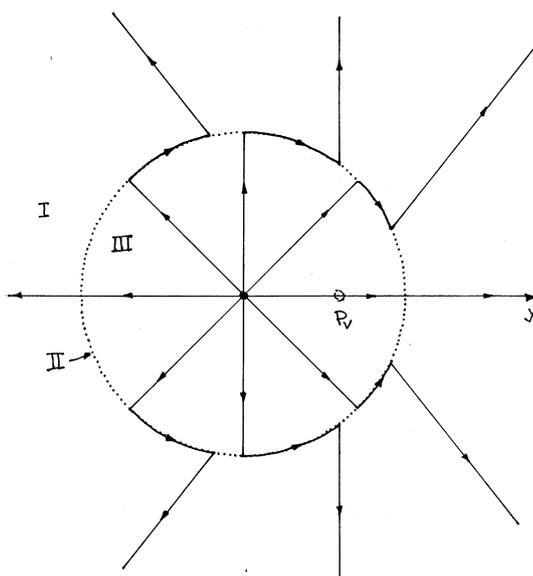


Figura 29.5:

Assim, de fato, no interior da região II existe um pulso de onda eletromagnética. Como esta região é devida à aceleração da carga, podemos considerar esta aceleração como causa da radiação. A nossa discussão do processo de produção de radiação foi bastante qualitativa, com o intuito de permitir uma intuição acerca deste processo. Deduções formais da forma dos campos na região II podem ser encontradas em livros-texto mais avançados ou, alternativamente, na referência [1].

De modo muito geral, sempre que uma carga é acelerada, ocorre radiação. Isto vale tanto para as variações temporais do módulo da velocidade como para as da sua direção, como discutimos nos exemplos a seguir.

### • exemplo 1

Uma partícula, inicialmente em repouso, é acelerada e passa a ter a velocidade  $\vec{v} = v \vec{j}$ , com  $v = 4/5c$ . Neste exemplo, estamos interessados em desenhar as linhas de campo elétrico em um instante posterior à aceleração. Como na seção anterior, supomos que o processo de aceleração tenha acontecido entre os instantes  $t = 0$  e  $t = \Delta T$ . Por isso, em um instante  $t_1$  qualquer, posterior a  $\Delta T$ , o espaço em torno da carga fica dividido em três regiões diferentes, separadas por duas bolhas de informação, cujos raios crescem com velocidade  $c$ . Neste instante genérico, a região I, externa à bolha maior, é preenchida pelo campo elétrico Coulombiano de uma carga parada, enquanto que a região III, interna à bolha menor, é preenchida pelos campos elétrico e magnético associados a uma carga que se move com velocidade  $v$ . A região II, entre as duas bolhas, é preenchida por campos elétricos e magnéticos, que se propagam como radiação.

Para simplificar o desenho, consideramos apenas o caso em que o processo de aceleração

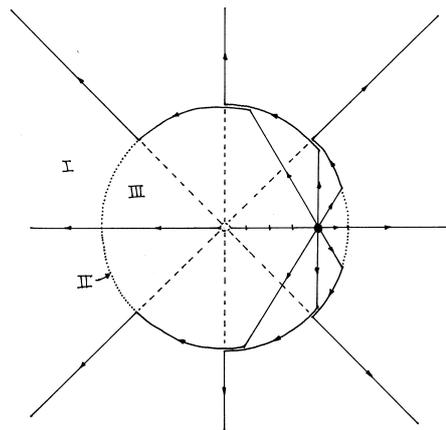


Figura 29.6:

tenha ocorrido durante um tempo muito curto. Neste caso, as superfícies das duas bolhas de informação ficam muito próximas, a região II fica espremida entre elas e a configuração das linhas de campo é a mostrada na figura 29.6. Para compreender claramente a lógica subjacente a este tipo de figura, é muito importante compará-la em detalhes com a 29.5 e, em particular, tentar enxergar em ambas a inércia do campo eletromagnético.

### • exemplo 2

Neste exemplo, exploramos o caso em que a aceleração é devida a mudanças na direção e sentido da velocidade. Para tanto, consideramos uma partícula que se move inicialmente com velocidade  $\vec{v}_I = v\vec{j}$  e que, no instante  $t = 0$ , sofre uma aceleração muito grande, passando a se mover com velocidade  $\vec{v}_F = -v\cdot\vec{k}$ . A configuração do campo elétrico, num instante posterior ao processo de aceleração, é mostrada na figura 29.7 onde, novamente, a região II tem espessura muito pequena.

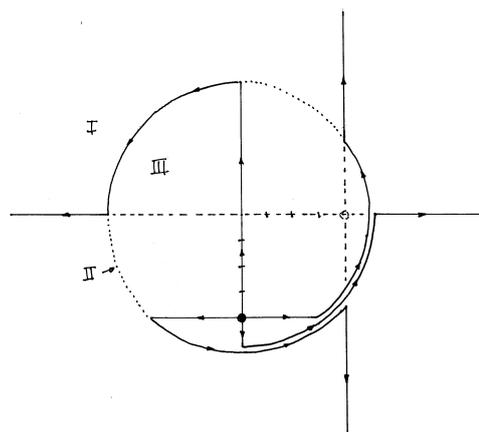


Figura 29.7:

## • processos usuais de produção de radiação

A produção de radiação por cargas aceleradas é importante na tecnologia e na pesquisa em Física. Como exemplos, temos os dipolos oscilantes, presentes na radiotecnica e as cargas uniformemente aceleradas em um acelerador de partículas. É possível, nestes casos, obter conclusões interessantes a respeito da radiação, discutindo apenas seus aspectos qualitativos.

Um dipolo oscilante é constituído por duas cargas de sinais opostos, oscilando entre dois pontos, com mesma frequência e em sentidos contrários. Este processo dá origem a correntes oscilantes, como as que existem em uma antena de uma estação de rádio. O campo deste dipolo é a superposição dos campos das duas cargas, e sua construção gráfica não é trivial. No entanto, podemos simular esta situação utilizando apenas os aspectos qualitativos do problema. Para isso, consideremos um modelo simplificado de dipolo, onde as cargas oscilam entre dois obstáculos, e no intervalo entre um choque e outro têm velocidades constantes. O campo de apenas uma das partículas está desenhado na figura 29.8a. Superpondo este campo ao da partícula de carga oposta, obtemos o campo do dipolo oscilante.

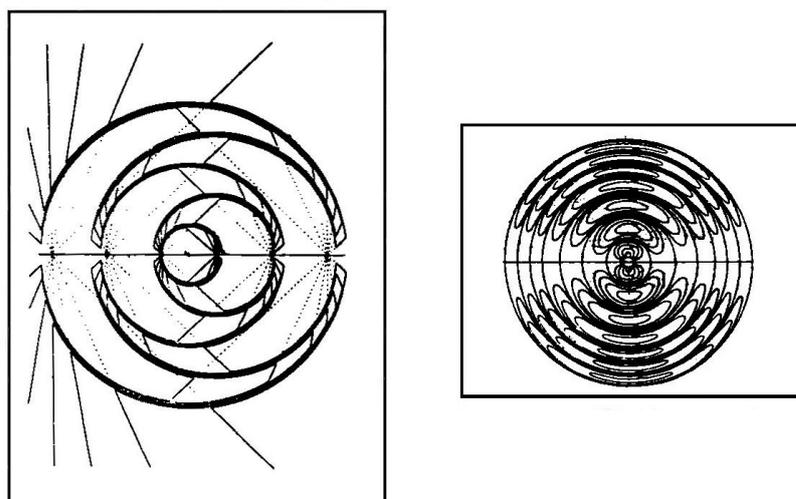


Figura 29.8: a) Linhas de campo elétrico de uma carga que oscila entre dois pontos com velocidade  $v = 0.9c$ . b) campo elétrico de um dipolo oscilante.

Se a aceleração destas partículas fosse uma função senoidal, as linhas de campo seriam mais arredondadas. Obteríamos, então, o campo do dipolo oscilante, mostrado na figura 29.8b. Nela, podemos verificar uma propriedade interessante da radiação do dipolo oscilante, qual seja, que sua intensidade possui uma dependência angular. Ela é máxima no plano perpendicular ao eixo do dipolo e nula ao longo dele. É esta a razão pela qual as antenas de radiotransmissão são verticais. Isto faz com que as direções onde a intensidade de radiação é nula seja apontada para o interior do planeta e para fora dele, onde não há receptores. Desta maneira, a potência irradiada é máxima na direção paralela à superfície da Terra. Na região intermediária entre o plano equatorial e a direção do eixo do dipolo,

o fluxo de energia irradiada depende do ângulo com a vertical.

Outro caso de interesse, é o da radiação devida a uma carga uniformemente acelerada. Para construir o campo elétrico desta partícula consideramos, inicialmente, uma situação simplificada, onde a velocidade aumenta em saltos de  $0,2c$  até atingir  $v = 0,8c$ . Este campo está representado na figura 29.9a.

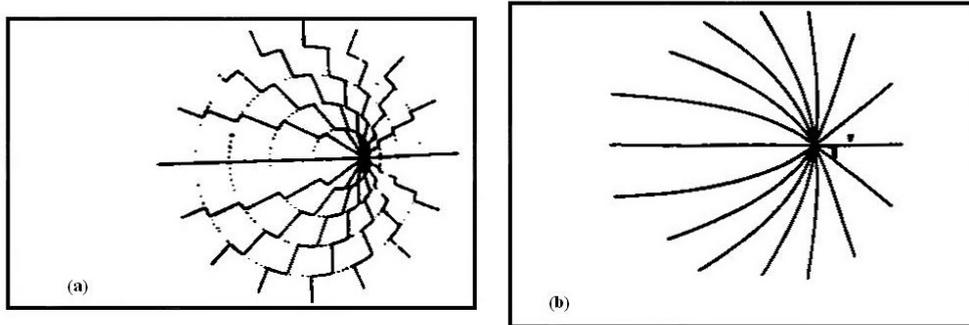


Figura 29.9: O campo elétrico de uma carga acelerada. (a) Em saltos de velocidade de  $0.2c$ . (b) Com aceleração constante.

No caso (a), a aceleração uniforme é simulada por sucessivas etapas, onde acelerações instantâneas e velocidades constantes se alternam, correspondendo às linhas quebradas. Numa simulação mais realística da aceleração uniforme, a distinção entre os dois tipos de etapas é imperceptível, e as linhas de campo são curvas contínuas, ilustradas na figura 29.9b. Estas linhas de campo têm componentes transversais, que levam a informação de que a carga foi acelerada e correspondem à componente elétrica de uma onda eletromagnética.

A energia irradiada por uma carga uniformemente acelerada possui o tipo de dependência angular representada na figura 29.10. Ela é simétrica em relação ao plano do movimento, sendo nula na direção da velocidade, e máxima sobre uma superfície cônica com vértice na partícula. Quando uma carga é acelerada em um acelerador linear, parte da energia que lhe é fornecida é perdida em forma de radiação. A intensidade de energia irradiada é significativa quando a carga atinge a velocidade próxima à da luz e, por isso, é necessário que se tenha cuidado com a blindagem do aparelho que a acelera, para evitar a contaminação do ambiente.

### • a importância do campo

Os fenômenos da radiação evidenciam a realidade física do campo. Este conceito, na relatividade tem significado profundo. A respeito da evolução do conceito de campo, Einstein e Infeld<sup>[2]</sup> escreveram o seguinte:

“[Nos primórdios do século XIX] o conceito de campo nada mais era do que um meio para facilitar a compreensão de fenômenos do ponto de vista mecânico. Na nova linguagem

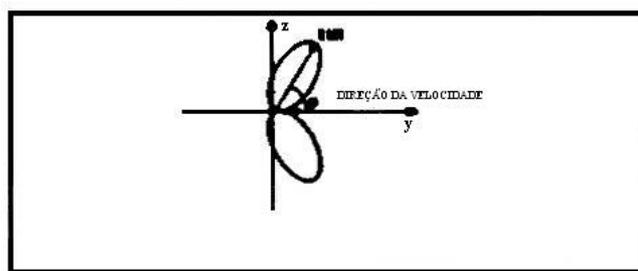


Figura 29.10: Dependência angular da radiação de uma carga uniformemente acelerada.

de campo, é a descrição do campo entre duas cargas, e não as cargas em si, o que é essencial para uma compreensão de sua ação. O reconhecimento dos novos conceitos cresceu consistentemente, até que a substância foi ocupada pelo campo. Percebeu-se que algo de grande importância havia aparecido em Física. Uma nova realidade foi criada, um novo conceito para o qual não havia lugar na descrição mecânica. Lentamente e com luta, o conceito de campo firmou para si um lugar de predominância em Física e permaneceu um dos conceitos físicos básicos. O campo eletromagnético é, para a Física moderna, tão real quanto a cadeira que sentamos.”

A introdução do conceito de campo na física, na segunda metade do século 19, permitiu o desenvolvimento de uma visão do mundo material que diferia bastante da produzida pela mecânica clássica. Uma das mudanças diz respeito à materialidade dos corpos. Na física clássica, os corpos são pensados como entidades sólidas, extensas, enquanto que, no eletromagnetismo, um corpo pode passear por dentro do campo produzido por outro....

Em alguns casos, as contradições entre as duas teorias aparecem de modo muito claro. Um exemplo deste tipo pode ser percebido no estudo da radiação <sup>1</sup>. Consideremos, por exemplo, duas cargas  $q$  e  $Q$ , positivas, situadas em pontos diferentes do espaço. Se ambas estiverem em repouso, em um dado referencial, elas se repelem com forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , de mesma intensidade, como mostra a figura 29.11a, e vale a relação  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ . Se, por outro lado, a carga  $q$  estivesse inicialmente em movimento e houvesse sido desacelerada bruscamente, suas linhas de campo poderiam ter a forma mostrada na figura 29.5. Nesta situação a carga  $q$  continuaria a sofrer a força  $\vec{F}_2$ , enquanto que a força sobre a carga  $Q$  mudaria. Esta força, chamada de  $\vec{F}'_1$  é diferente de  $\vec{F}_1$  por dois motivos. Um deles é que  $|\vec{F}'_1| > |\vec{F}_1|$  pois, na região considerada, o campo elétrico de uma carga em movimento é mais intenso do que o correspondente a uma carga em repouso. O outro é que as direções de  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}'_1$  são diferentes, devido às mudanças do campo elétrico causadas pela aceleração. É interessante notar que, neste exemplo, não existem forças de origem magnética, pois a carga  $Q$ , por estar em repouso, não cria nem sente  $\vec{B}$ . Por isso, na situação indicada na figura 29.11b,  $\vec{F}'_1 \neq \vec{F}_2$  e **não vale** a igualdade clássica entre ação e reação. Este tipo de contradição entre a mecânica clássica e o eletromagnetismo contribuiu para o surgimento da teoria da relatividade.

<sup>1</sup>Esta parte do texto contou com a colaboração de Fabiana B. Kneubil.

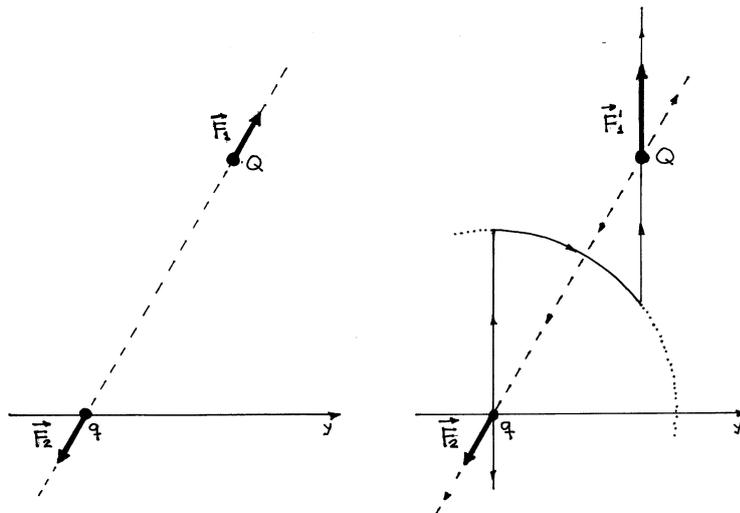


Figura 29.11:

### • referências

[1] J.R. Tessinan - American Journal of Physics 35 (1967) 523.

[2] “A evolução da Física”, A. Einstein e L. Infeld - Zahar editores, Rio de Janeiro, 2ª edição (1966) p. 125

### • exercícios

1. Desenhe, em escala, as linhas de campo elétrico de uma carga  $q$ , positiva, que se move inicialmente com velocidade  $\vec{v}_I = v\vec{j}$  e que, após o choque com um anteparo passa a se mover com

a)  $\vec{v}_F = -v\vec{j}$

b)  $\vec{v}_F = \frac{v}{\sqrt{2}}(\vec{j} + \vec{k})$

2. Desenhe as linhas de campo elétrico de uma carga  $q$ , positiva, que a cada intervalo de tempo  $\Delta t$ , muda a sua velocidade de acordo com a sequência:  $\vec{v}_1 = v\vec{j} \rightarrow \vec{v}_2 = -v\vec{j} \rightarrow \vec{v}_3 = v\vec{j} \rightarrow \vec{v}_4 = -v\vec{j}$ .

# Capítulo 30

## radiação: o espelho

### Espelho, espelho meu, existe alguém mais inteligente do que Eu?<sup>1</sup>

Você se olha no espelho e vê a sua própria imagem. Isso acontece porque o seu rosto é iluminado por alguma fonte de luz externa, como a do sol que entra pela janela ou a de uma lâmpada próxima. Essa luz é difundida no seu rosto e parte dela vai em direção ao espelho, “bate” nele e volta. Vivenciamos esta situação diariamente e tudo parece muito simples. Entretanto, se você refletir um pouco, o problema mostra uma face complexa. E podemos especular: como é que a luz “bate” no espelho? Porque ele reflete a luz?

Um espelho comum, tal como os que temos em casa, é constituído por uma fina camada de metal, depositada sobre uma lâmina de vidro. O vidro tem apenas a função de suporte mecânico, ou seja, serve para sustentar a camada metálica e impedir que ela oxide e se desfaça, não tendo papel óptico importante. A luz refletida é, de fato, produzida pelo metal. Mais precisamente, ela corresponde à radiação devida aos movimentos acelerados dos elétrons livres no seu interior.

Para discutir o lado eletromagnético deste fenômeno, nesta aula estudamos a radiação produzida por um plano infinito carregado, que oscila. Embora planos infinitos não existam na natureza, eles permitem capturar os aspectos essenciais do problema, por meio de um tratamento matemático simples.

#### • plano infinito sujeito a acelerações bruscas

Para simular o que acontece com os elétrons dentro do metal consideramos, inicialmente, um plano carregado negativamente, com densidade superficial de carga  $-\sigma^J$ , sendo  $\sigma^J > 0$ . Supomos que esse plano esteja em repouso no referencial  $S_J$  e que ele

---

<sup>1</sup>Fábula infantil adaptada à vaidade dos físicos...

esteja contido no plano  $z = 0$ . Nesse caso, as equações de Maxwell nos fornecem

$$z > 0 \rightarrow \vec{E}^J = -\frac{\sigma^J}{\epsilon_0} \vec{k}, \quad z < 0 \rightarrow \vec{E}^J = +\frac{\sigma^J}{\epsilon_0} \vec{k}, \quad (30.1)$$

$$\vec{B}^J = 0. \quad (30.2)$$

Os campos no referencial de Maria, em relação ao qual o de João se move com velocidade  $v\vec{j}$ , podem ser obtidos pelas regras mostradas na aula 24 e são dados por

$$z > 0 \rightarrow \vec{E}^M = -\frac{\sigma^M}{\epsilon_0} \vec{k}, \quad z < 0 \rightarrow \vec{E}^M = +\frac{\sigma^M}{\epsilon_0} \vec{k}, \quad (30.3)$$

$$\sigma^M = \gamma \sigma^J, \quad (30.4)$$

$$\vec{B}^M = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}^M, \quad (30.5)$$

onde  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ .

Esses resultados permitem-nos ter uma idéia da forma dos campos em torno de um plano carregado, que está em repouso e é acelerado, entre os intervalos  $T_1$  e  $T_2$ , até atingir uma velocidade constante  $\vec{v} = v\vec{j}$ . Como no caso de uma carga puntiforme acelerada, a variação da velocidade do plano carregado produz radiação. A principal diferença entre as duas situações é que, devido ao caráter extenso do plano, cargas localizadas em muitos pontos diferentes estão envolvidas e existem muitas bolhas de informação produzidas simultaneamente. Por isso, as transições entre as regiões de campos diferentes correspondem, agora, a planos infinitos paralelos ao plano carregado. Essa situação, no instante  $T_3$ , está representada na figura 30.1. Como o plano é infinito, é difícil usar linhas para representar o campo e, por isso, as intensidades são representadas pelas suas expressões matemáticas. À medida que o tempo avança, as regiões de transição se afastam do plano carregado, substituindo os campos mais antigos pelos mais novos. Casos mais complicados, onde existem várias alterações na velocidade, podem ser compreendidos pela aplicação repetida do mesmo tipo de raciocínio.

### • a luz incide sobre um espelho

No caso em que um espelho é iluminado por uma luz monocromática, de frequência  $\omega$ , polarizada linearmente segundo o eixo  $y$ , como na figura 30.2, os campos incidentes, denotados pelo índice  $i$ , tem a forma

$$\vec{E}_i = E_{0i} \cos(kz + \omega t) \vec{j}, \quad (30.6)$$

$$\vec{B}_i = \frac{E_{0i}}{c} \cos(kz + \omega t) \vec{i}. \quad (30.7)$$

Quando o metal do espelho é banhado por esses campos, eles causam sobre um dos seus elétrons livres, uma força dada por

$$\vec{F}_i = -e \left( \vec{E}_i + \vec{v} \times \vec{B}_i \right), \quad (30.8)$$

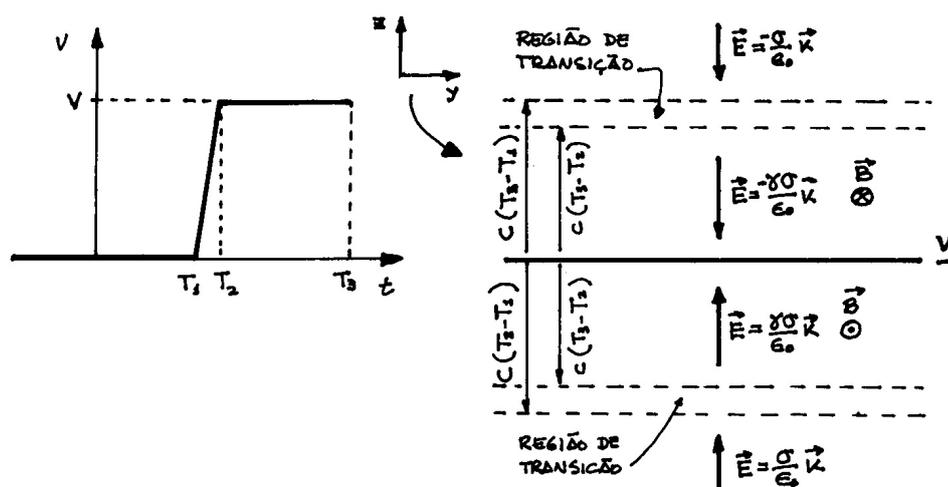


Figura 30.1: A velocidade do plano carregado e os campos à sua volta, em função do tempo.

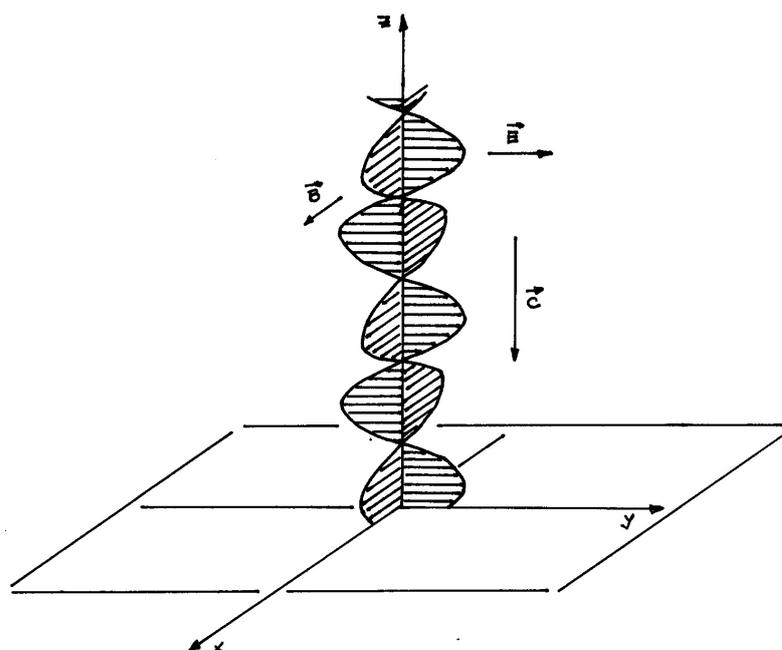


Figura 30.2: A luz incide sobre um espelho situado no plano  $z = 0$ .

onde  $e$  é o módulo da sua carga e  $\vec{v}$  é a sua velocidade.

Para determinar as importâncias relativas das componentes elétrica e magnética dessa força, lembramos que, num metal isolado à temperatura ambiente, os elétrons livres têm de movimentos desordenados, com velocidades típicas da ordem de  $10^5$  m/s. Quando o metal está em presença da onda, o campo elétrico desta orienta os movimentos dos elétrons, que passam a ter uma velocidade média  $\langle v \rangle \sim 10^{-3}$  m/s. Tanto esta velocidade como as

de origem térmica são muito menores do que  $c$ . Como os módulos dos campos magnético e elétrico são relacionados por  $|\vec{B}_i| = |\vec{E}_i|/c$ , podemos concluir que a força de origem magnética é totalmente desprezível. Por isso, a força que age sobre o elétron de um espelho localizado no plano  $z = 0$  é aproximada por

$$\vec{F}_i = -e E_{0i} \cos(\omega t) \vec{j}. \quad (30.9)$$

### • o movimento dos elétrons no interior do metal

A força  $\vec{F}_i$  faz com que os elétrons oscilem com a mesma frequência  $\omega$  da onda incidente. Os seus movimentos são acelerados e, portanto, eles irradiam. Isso significa que, no interior do metal, coexistem os campos associados a *duas* ondas diferentes, a incidente e a irradiada. Consequentemente, os elétrons livres estão sujeitos à força  $\vec{F}_i$ , dada pela eq. (30.9) e, também, a uma força  $\vec{F}_r$ , devida ao campo elétrico da onda refletida.

A lei de Newton permite-nos relacionar a velocidade  $\vec{v}$  de um elétron livre com as forças que agem sobre ele. Chamando de  $m$  a sua massa, escrevemos

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -b\vec{v} + \vec{F}_i + \vec{F}_r \quad (30.10)$$

onde  $b$  é o coeficiente da força dissipativa associada aos efeitos resistivos. Para determinar a onda refletida por um espelho real, é preciso resolver esta equação diferencial, juntamente com as equações de Maxwell.

Para simplificar o problema, consideramos o caso de um espelho ideal, baseado em duas aproximações. Inicialmente, desprezamos a inércia dos elétrons, fazendo  $m \rightarrow 0$ , e a lei de Newton passa a ser escrita como

$$-b\vec{v} = \vec{F}_i + \vec{F}_r. \quad (30.11)$$

A segunda aproximação consiste em supor que a resistência do metal seja muito pequena, o que equivale a  $\vec{F}_i$  e  $\vec{F}_r$  terem direções iguais e sentidos opostos. Nesta situação, os elétrons se movem porque  $|\vec{F}_i|$  é um pouquinho maior do que  $|\vec{F}_r|$  e a velocidade de um elétron livre é sempre paralela à força resultante, podendo ser escrita como

$$\vec{v} = -v_0 \cos(\omega t) \vec{j}. \quad (30.12)$$

### • radiação do espelho

Para determinar os campos *criados* pelas cargas no interior do espelho, designados pelo índice  $r$ , devemos somar as contribuições dos íons positivos com a dos elétrons livres que oscilam. Essa oscilação coletiva tem uma velocidade típica muito menor do que a da luz, da ordem de  $\langle v \rangle / c \sim 10^{-11}$ , o que nos permite adotar  $\gamma = 1$  e desprezar os efeitos associados à contração da densidade de cargas. Por isso, eliminamos os índices da densidade de carga e escrevemos  $\sigma^J = \sigma^M \equiv \sigma$ .

No interior da fina lâmina metálica, que supomos estar no vácuo, as densidades das cargas positivas dos íons e das cargas negativas dos elétrons livres são iguais, em módulo.

Entretanto, a densidade positiva está em repouso, enquanto que a negativa oscila. Esta oscilação dá origem a uma corrente  $I$ , cuja a intensidade é obtida a partir da eq.(30.12), que corresponde à velocidade todos os pontos do plano carregado negativamente. A corrente que atravessa um trecho de largura  $a$  de um plano matemático perpendicular ao eixo  $y$ , tem sentido contrário a  $v$ , pois a carga do elétron é negativa, e é mostrado na figura 30.3 e é dada por

$$I = \sigma a v = \sigma a v_0 \cos(\omega t), \quad (30.13)$$

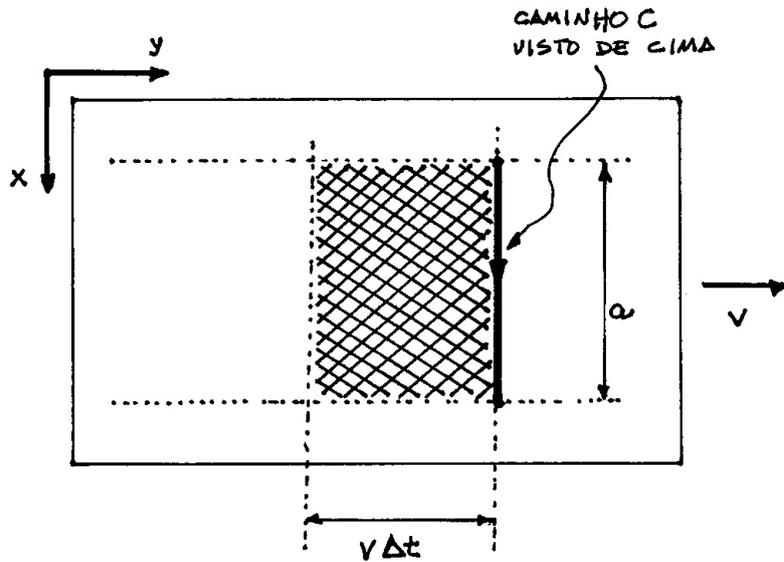


Figura 30.3: O trecho hachurado atravessa o caminho num tempo  $\Delta t$ .

Esta corrente faz com que exista um campo magnético nas proximidades do espelho. O módulo deste campo à distância  $\epsilon$  do plano, sendo  $\epsilon$  muito pequeno, é calculado a partir da lei de Ampère aplicada ao caminho mostrado na figura 30.4. A regra da mão direita determina a sua direção e sentido, e temos

$$z = +\epsilon \rightarrow \vec{B}_r = \frac{\mu_0 I}{2a} \vec{i}, \quad z = -\epsilon \rightarrow \vec{B}_r = -\frac{\mu_0 I}{2a} \vec{i}, \quad (30.14)$$

Usando a eq.(30.13), obtemos onde  $I$  é a corrente que atravessa o caminho matemático e  $a$  é o comprimento dos seus trechos horizontais.

$$z = +\epsilon \rightarrow \vec{B}_r = \frac{\mu_0 \sigma v_0}{2} \cos(\omega t) \vec{i}, \quad z = -\epsilon \rightarrow \vec{B}_r = -\frac{\mu_0 \sigma v_0}{2} \cos(\omega t) \vec{i}. \quad (30.15)$$

Esses resultados indicam que a oscilação dos elétrons livres no interior do metal produz, nas proximidades da sua superfície, campos magnéticos que variam com o tempo. De acordo com a lei de Faraday, essa variação temporal dá origem a campos elétricos, que

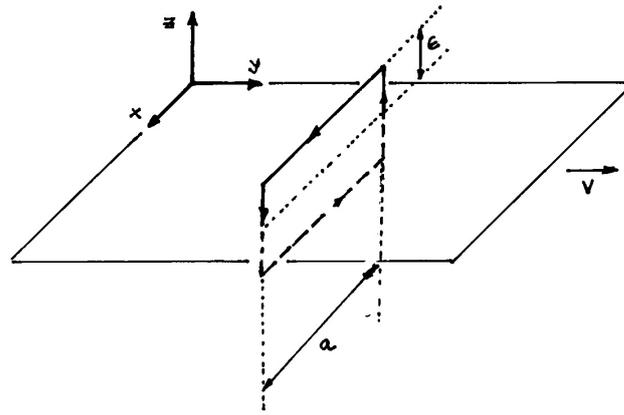


Figura 30.4: O caminho utilizado na lei de Ampère.

também variam com o tempo. Ou seja, a oscilação dos elétrons produz uma onda eletromagnética nas vizinhanças do metal, cujo campo magnético a uma distância  $\epsilon$  é dado pela eq.(30.13).

Como no caso de qualquer onda eletromagnética que se propaga no vácuo, os campos elétrico e magnético são ortogonais entre si e seus módulos relacionados por  $|\vec{E}| = |\vec{B}|/c$ . Como acontece sempre que ondas são *produzidas* por uma fonte, elas se propagam para longe da região onde a produção ocorre. Isto também vale no caso de ondas eletromagnéticas produzidas pelo movimento acelerado dos elétrons do metal do espelho. Assim, a velocidade da radiação produzida pelo espelho é dada por

$$z > 0 \rightarrow \vec{c}_r = c \vec{k}, \quad z < 0 \rightarrow \vec{c}_r = -c \vec{k} \quad (30.16)$$

Conseqüentemente, o campo elétrico à distância  $\epsilon$  do metal é expresso por

$$z = +\epsilon \rightarrow \vec{E}_r = -\frac{c \mu_0 \sigma v_0}{2} \cos(\omega t) \vec{j}, \quad z = -\epsilon \rightarrow \vec{E}_r = -\frac{c \mu_0 \sigma v_0}{2} \cos(\omega t) \vec{j} \quad (30.17)$$

As eqs.(30.16) e (30.17) descrevem os campos nas proximidades do espelho e dependem de  $\cos(\omega t)$ . Para pontos distantes dele, é preciso incorporar a esta fase os atrasos devidos à propagação da onda, como fizemos no caso da linha de transmissão. Assim, para valores positivos de  $z$ ,  $\cos(\omega t) \rightarrow \cos[\omega(t - z/c)]$  e, para valores negativos,  $\cos(\omega t) \rightarrow \cos[\omega(t + z/c)]$ . Juntando todos esses resultados, obtemos as expressões que descrevem os campos produzidos pela oscilação dos elétrons em qualquer ponto do espaço

$$z > 0 \rightarrow \vec{E}_r = -E_{0r} \cos(kz - \omega t) \vec{j}, \quad \vec{B}_r = E_{0r}/c \cos(kz - \omega t) \vec{i}, \quad (30.18)$$

$$z < 0 \rightarrow \vec{E}_r = -E_{0r} \cos(kz + \omega t) \vec{j}, \quad \vec{B}_r = -E_{0r}/c \cos(kz + \omega t) \vec{i}, \quad (30.19)$$

onde

$$E_{0r} = \frac{c \mu_0 \sigma v_0}{2}. \quad (30.20)$$

As intensidades destes campos dependem da velocidade  $v_0$ , que precisa ser determinada. No caso do nosso espelho ideal, o modo mais fácil de fazer isso é considerar o balanço energético do sistema.

### • o balanço energético

A energia que incide inicialmente sobre o espelho é carregada pelos seus campos elétrico e magnético. A densidade volumétrica desta energia é

$$\frac{dU_i}{dV} = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}_i^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}_i^2 = \epsilon_0 E_{0i}^2 \cos^2(\omega t) \quad (30.21)$$

e o seu fluxo é descrito pelo vetor de Poynting

$$\vec{S}_i = \frac{\vec{E}_i \times \vec{B}_i}{\mu_0} = -\frac{E_{0i}^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t) \vec{c}, \quad (30.22)$$

que é paralelo à velocidade da onda.

Quando esta energia atinge um espelho real, os elétrons livres do metal oscilam e, devido ao efeito Joule, ocorre dissipação em forma de calor. Consequentemente, a energia refletida pelo espelho tem de ser menor do que a incidente. Como a densidade da energia refletida é

$$\frac{dU_r}{dV} = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}_r^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}_r^2 = \epsilon_0 E_{0r}^2 \cos^2(\omega t) \quad (30.23)$$

e o seu fluxo é expresso por

$$\vec{S}_r = \frac{\vec{E}_r \times \vec{B}_r}{\mu_0} = \frac{E_{0r}^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t) \vec{c}. \quad (30.24)$$

Se houver energia dissipada no espelho devemos ter  $|\vec{E}_r| < |\vec{E}_i|$ . Esta condição faz com que a intensidade da onda refletida seja menor do que a da incidente. Por outro lado, no caso do espelho ideal, onde não há dissipação, toda a energia incidente é refletida e, portanto, as amplitudes das ondas estão relacionadas por

$$|\vec{E}_{0r}| = |\vec{E}_{0i}|. \quad (30.25)$$

### • a luz “bate” no espelho...

O resultado anterior permite-nos escrever  $E_{0i} = E_{0r} = E_0$ . Juntando as eqs. (30.6), (30.7), (30.18) e (30.19), expressamos os campos antes e depois do espelho como

#### • antes do espelho ( $z > 0$ ):

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(kz + \omega t) \vec{j}, \quad \vec{B}_i = \frac{E_0}{c} \cos(kz + \omega t) \vec{i}, \quad (30.26)$$

$$\vec{E}_r = E_0 \cos(kz - \omega t) \vec{j}, \quad \vec{B}_r = \frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t) \vec{i}, \quad (30.27)$$

sendo o campo resultante dado por

$$(\vec{E}_i + \vec{E}_r) = E_0[\cos(kz + \omega t) - \cos(kz - \omega t)]\vec{j}, \quad (30.28)$$

$$(\vec{B}_i + \vec{B}_r) = \frac{E_0}{c} [\cos(kz + \omega t) + \cos(kz - \omega t)]\vec{i}. \quad (30.29)$$

• **depois do espelho ( $z < 0$ ):**

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(kz + \omega t)\vec{j}, \quad \vec{B}_i = \frac{E_0}{c} \cos(kz + \omega t)\vec{i}, \quad (30.30)$$

$$\vec{E}_r = -E_0 \cos(kz + \omega t)\vec{j}, \quad \vec{B}_r = -\frac{E_0}{c} \cos(kz + \omega t)\vec{i}, \quad (30.31)$$

e, neste caso,

$$(\vec{E}_i + \vec{E}_r) = 0, \quad (30.32)$$

$$(\vec{B}_i + \vec{B}_r) = 0. \quad (30.33)$$

Note que as diferenças de fase entre as ondas tem papel determinante nestes resultados. Eles indicam que, na região à frente do espelho, existem duas ondas que se propagam em sentidos diferentes enquanto que os campos resultantes são nulos na parte de trás, como mostra a figura 30.5. É muito importante que você inspecione cuidadosamente esta figura, notando que:

1. os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são ortogonais entre si;
2. os campos  $\vec{E}_i$  e  $\vec{B}_i$  são contínuos sobre o espelho;
3. o campo  $\vec{E}_r$  é contínuo sobre o espelho;
4. o campo  $\vec{B}_r$  é descontínuo sobre o espelho.

É deste modo que o eletromagnetismo explica como a luz “bate” no espelho e não aparece atrás dele...

• **no interior do espelho**

As expressões obtidas para os campos elétricos e magnéticos das onda incidente e refletida nas regiões externas ao espelho permitem, também, conhecer os valores desses campos no interior da lâmina metálica.

Consideramos, inicialmente, o campo elétrico. A eq.(30.28) indica que, à frente do espelho, a soma  $\vec{E}_i + \vec{E}_r$  é, de modo geral, não nula. Entretanto, sobre o plano  $z = 0$ , temos  $\vec{E}_i + \vec{E}_r = 0$ . Por outro lado, na parte de trás do espelho, a condição  $\vec{E}_i + \vec{E}_r$  vale em todos os pontos, como mostra a eq. (30.32). Assim, o campo elétrico resultante é nulo em ambos os lados do espelho e, por continuidade, nulo também no seu interior.

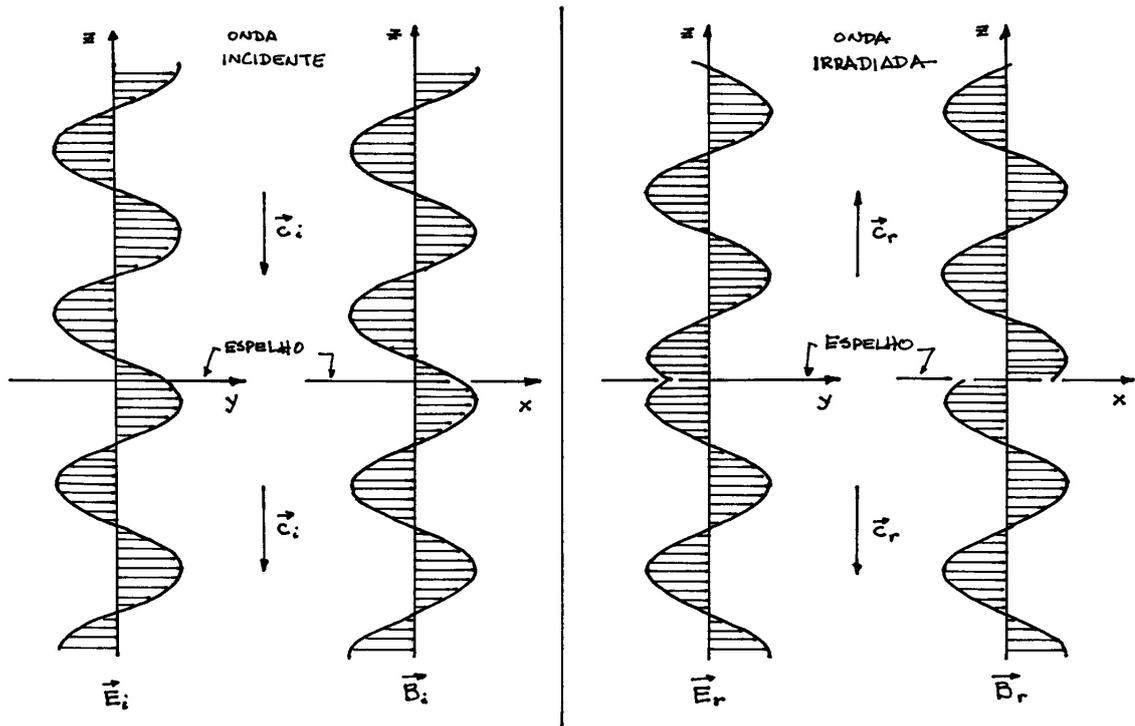


Figura 30.5: Campos elétricos e magnéticos das ondas incidente e irradiada.

No que diz respeito ao campo magnético, as eqs. (30.26) e (30.30) informam que os campos  $\vec{B}_i$ , da onda incidente, são iguais dos dois lados do espelho e, portanto, tem o mesmo valor no interior do metal. Já o campo  $\vec{B}_r$ , da onda refletida, é descontínuo quando se atravessa a superfície metálica. Usando as eqs. (30.27) e (30.31) temos, usando  $z = 0$

$$\text{na frente: } \vec{B}_r = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{i}, \quad (30.34)$$

$$\text{atrás: } \vec{B}_r = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{i}. \quad (30.35)$$

Agora, é preciso argumentar um pouco. Neste problema, a descontinuidade de  $\vec{B}_r$  decorre da aplicação da lei de Ampère sobre o caminho da figura 30.4, para o caso de uma distribuição de correntes *sem espessura*. Caso esta espessura houvesse sido considerada, o campo  $\vec{B}_r$  mudaria gradualmente do valor dado pela eq. (30.34) para o dado pela eq. (30.35) ao longo da placa metálica, passando por  $\vec{B}_r = 0$  no seu interior. Isso nos permite inferir que, no interior do nosso espelho ideal, podemos escrever

$$\text{sobre o espelho: } \vec{B}_r = 0. \quad (30.36)$$

Deste modo, o único campo não nulo no interior do espelho é o magnético da onda incidente, dado por

$$\text{sobre o espelho: } \vec{B}_i = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{i} \quad (30.37)$$

### • a luz empurra o espelho <sup>2</sup>

O espelho age sobre a luz, desviando o seu caminho. Reciprocamente, a luz também age sobre o espelho. Para estudar esta segunda ação, consideremos a força que atua sobre um elétron livre do metal, que oscila com a velocidade  $\vec{v}$  dada pela eq. (30.12). Como o único campo não nulo no interior do metal é  $\vec{B}_i$ , dado pela eq. (30.37), esta força é dada por

$$\begin{aligned}\vec{f} &= -e(\vec{v} \times \vec{B}_i) \\ &= -ev_0 \frac{E_0}{c} \cos^2(\omega t) \vec{k}\end{aligned}\quad (30.37)$$

e, usando a eq. (30.20), obtemos

$$\vec{f} = -\frac{2e}{\mu_0 c^2 \sigma} E_0^2 \cos^2(\omega t) \vec{k}\quad (30.38)$$

Em uma área  $A$  da placa, existem

$$N = \frac{\sigma A}{e}\quad (30.39)$$

elétrons livres e, por isso a força que age nesta área é dada por

$$\vec{F}_A = N \vec{f} = -2\epsilon_0 A E_0^2 \cos^2(\omega t) \vec{k},\quad (30.40)$$

onde usamos  $\mu_0 c^2 = 1/\epsilon_0$ . Esta força varia com o tempo proporcionalmente ao fator  $\cos^2(\omega t)$ , que é sempre positivo ou nulo. Por isso, a força  $\vec{F}_A$  é paralela à velocidade da luz incidente e empurra o espelho para trás.

A segunda lei de Newton, escrita na forma

$$\vec{F}_A = \frac{d\vec{P}_E}{dt},\quad (30.41)$$

onde  $\vec{P}_E$  é o momento do espelho, permite escrever,

$$d\vec{P}_E = -2\epsilon_0 A E_0^2 \cos^2(\omega t) dt \vec{k}.\quad (30.42)$$

Este resultado indica que a luz, ao interagir com o espelho, fornece continuamente momento a ele. Ou seja, que está ocorrendo a *transferência* de momento da luz para o espelho. Isto indica que, mesmo sem ter massa, a luz carrega momento.

### • o momento da luz

O impacto do eletromagnetismo sobre a física do século 20 foi enorme, pois ele propiciou uma nova maneira de olhar para o mundo, bastante diferente da baseada na mecânica newtoniana.

<sup>2</sup>Escrito em colaboração com Fabiana B. Kneubil.

Segundo Newton, a inércia de um corpo é caracterizada pela sua massa e incorporada no seu momento  $\vec{P} = m \vec{v}$ . No eletromagnetismo, as ondas não têm massa. Entretanto, elas possuem momento e, também, inércia. Na luz, a entidade que se move inercialmente é a sua energia.

A energia incidente contida em uma caixa matemática de lado  $c dt$  paralelo ao eixo  $z$  e área transversal  $A$  é obtida a partir da eq. (30.21) e dada por

$$dU_i = \epsilon_0 E_{0i}^2 \cos^2(\omega t) A c dt. \quad (30.43)$$

Esta energia se move, inercialmente, na direção da velocidade  $\vec{c}_i = -c \vec{k}$  da luz incidente. No caso de ondas eletromagnéticas, o momento contido no interior da caixa matemática é escrito como

$$d\vec{P}_i = \left[ \frac{dU_i}{c^2} \right] \left[ -c \vec{k} \right], \quad (30.44)$$

onde o termo  $dU_i$  representa a inércia da onda e o fator  $-1/c^2$  foi introduzido para acertar as unidades. Assim, o momento incidente no interior da caixa matemática é dado por

$$d\vec{P}_i = -\epsilon_0 A E_{0i}^2 \cos^2(\omega t) dt \vec{k}. \quad (30.45)$$

No caso do espelho ideal, o momento da onda refletida tem módulo e direção iguais a  $d\vec{P}_i$ , mas sentido diferente, devido à inversão da velocidade da onda:

$$d\vec{P}_r = -d\vec{P}_i. \quad (30.46)$$

O momento fornecido pela onda ao espelho é

$$d\vec{P}_r - d\vec{P}_i = 2\epsilon_0 A E_{0i}^2 \cos^2(\omega t) dt \vec{k}. \quad (30.47)$$

Comparando este resultado com a eq. (30.41), obtemos

$$d\vec{P}_i = d\vec{P}_r + d\vec{P}_E, \quad (30.48)$$

que representa a conservação do momento linear para o sistema luz-espelho.

## • o vetor de Poynting

Neste problema, o vetor de Poynting associado à onda incidente é dado pela eq. (30.22) e, comparando-a com a eq. (30.44), podemos escrever a relação

$$d\vec{P}_i = \frac{1}{c} \left[ \vec{S} A dt \right]. \quad (30.49)$$

Apesar de ter sido obtido no âmbito de um problema específico, este resultado é muito geral. Existe sempre uma relação direta entre o momento de uma onda e o seu vetor de Poynting.



# Capítulo 31

## diamagnetismo e paramagnetismo

### • campos no vácuo e campos na matéria

Na forma diferencial, as equações de Maxwell são dadas por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r}, t), \quad (31.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (31.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (31.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad (31.4)$$

onde  $\vec{r}$  e  $t$  indicam as coordenadas espacial e temporal do ponto considerado. Estas equações são ditas locais, porque as mesmas coordenadas espaço-temporais aparecem dos seus dois lados. Do ponto de vista físico, este fato expressa a idéia que as densidades de carga e corrente, em um dado ponto e em um dado instante, determinam os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , nos mesmos ponto e instante.

No eletromagnetismo, costuma-se falar em *campos no vácuo* e *campos na matéria*. Neste contexto, a palavra vácuo designa uma região onde não existem nem cargas nem correntes, o que nos permite trabalhar com uma versão simplificada das equações de Maxwell, na qual  $\rho(\vec{r}, t) = 0$  e  $\vec{j}(\vec{r}, t) = 0$ .

Neste sentido, o conceito de vácuo é um pouco diferente do associado à ausência de gases no interior de campânulas ou tubulações. Consideremos, por exemplo, o caso de uma bolinha de material dielétrico, carregada com uma densidade uniforme de carga, colocada no interior de uma campânula de vidro, e suponhamos que seja possível retirar todo o ar do seu interior, por meio de uma bomba de vácuo.

Na linguagem comum, seria correto dizer que existe vácuo no interior da campânula e

que a bolinha está no vácuo. Como esta bolinha está carregada, existem campos elétricos tanto o seu interior como no seu exterior e, no contexto do eletromagnetismo, dizemos que os campos nos pontos da região externa à bolinha estão no vácuo, enquanto que os no seu interior estão *na matéria*. No jargão do eletromagnetismo, a palavra *matéria* é, muitas vezes, usada em contraposição a *vácuo*.

É importante notar que esta distinção entre vácuo e matéria seria mantida, mesmo que a bolinha não estivesse carregada, já que no interior do material que a constitui existem distribuições de cargas e correntes, que produzem efeitos eletromagnéticos. Evidência disto é que a luz que atravessa a campânula, não atravessa a bolinha. Como a luz é um fenómeno eletromagnético, a opacidade da bolinha também o é e, para explicá-la, precisamos usar as equações de Maxwell com  $\vec{j}(\vec{r}, t) \neq 0$ , como veremos ao estudar o modelo Drude, dentro de algumas aulas.

Até este ponto do curso, estudamos a criação de campos por cargas elétricas, os seus efeitos sobre outras cargas e a propagação deles através do espaço vazio, concentrando-nos principalmente na estrutura dos fenómenos básicos. Entretanto, o estudo do comportamento eletromagnético da matéria também é extremamente rico e interessante e passamos, agora, a discutir alguns efeitos importantes.

## • perturbando a matéria

As principais propriedades da matéria, numa escala que vai desde o tamanho da Terra até o das menores partículas elementares conhecidas, são determinadas ou fortemente influenciadas pelo eletromagnetismo. Cargas elétricas estão presentes nos átomos, nos núcleos atômicos, nos prótons e neutrons que existem nos núcleos e, também nos quarks, que constituem prótons e nêutrons. Em geral, as cargas elétricas existentes nos vários entes materiais não estão paradas. Ao contrário, elas estão se movendo, e as propriedades dos vários materiais resultam de um equilíbrio dinâmico, envolvendo trocas de energia potencial e cinética. Estas cargas elétricas em movimento dão origem a campos elétricos e magnéticos, que são sentidos por outras cargas em movimento. Por isso, o comportamento de qualquer pedaço de matéria, seja ele um grão de areia, uma molécula, um átomo, um núcleo ou mesmo um próton, é o resultado de um complexo conjunto de interações elétricas e magnéticas.

Nós, aqui, estamos interessados em estudar apenas os comportamentos eletromagnéticos de corpos macroscópicos. Uma amostra de um material qualquer, mesmo de dimensões pequenas, da ordem de milímetros, pode ser considerada macroscópica, porque ela contém um número muito grande de átomos. E isto é importante, porque as propriedades características do material podem ser estudadas considerando apenas grandezas médias.

Vários tipos de experimentos, realizados em laboratório, visam a determinação das respostas de amostras de materiais a campos externos, criados por instrumentos grandes e potentes. Estes campos costumam ser chamados de *externos*, porque supomos que eles sejam pouco influenciados pelas cargas e correntes no interior do corpo analisado. De modo

geral, os campos externos usados para estudar amostras de matéria podem ser estáticos ou dependentes do tempo. Como uma dependência temporal acopla os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , apenas em situações estáticas é possível estudar separadamente os efeitos de campos elétricos ou magnéticos sobre a matéria. Na prática, as respostas a campos elétricos estáticos são estudadas colocando amostras no interior de capacitores carregados, enquanto que os efeitos devidos a campos magnéticos estáticos são observados por meio de amostras colocadas em presença de eletroímãs fortes ou no interior de solenóides.

O que acontece quando uma amostra é imersa em um campo externo depende muito do tipo de material considerado, dos particulares átomos envolvidos, e do modo como eles estão organizados. Os átomos são constituídos por núcleos positivos, cercados por elétrons negativos, e a matéria é formada por agrupamentos de átomos, que ocorrem de formas bastante diferentes em metais e dielétricos. Enquanto que, nos metais, existem elétrons livres e íons positivos, organizados em redes cristalinas, nos dielétricos os átomos são mantidos coesos por meio de ligações químicas. Apesar das grandes diferenças entre os dois casos, as principais propriedades de ambos são determinadas pelo modo como os elétrons estão organizados.

É importante notar que estes padrões de organização não podem ser observados diretamente, por meio de instrumentos colocados no interior da amostra. Tais instrumentos seriam, simplesmente, grandes demais. Por outro lado, campos podem penetrar no interior da matéria! Por isso, a alternativa consiste em perturbar o comportamento normal da amostra por meio de campos externos, medir os efeitos induzidos nela e elaborar modelos teóricos que possam explicar as observações feitas. Se estes modelos funcionarem bem, passamos a ter confiança neles e estendemos suas características à natureza.

O comportamento dos elétrons nos átomos é determinado pela mecânica quântica. Entretanto, neste curso estamos interessados apenas em descrições qualitativas e podemos pensar no átomo classicamente, empregando uma analogia simples com o sistema solar, onde o Sol corresponde ao núcleo atômico e os planetas, aos elétrons. Estes estão presos ao núcleo por forças elétricas e têm dois tipos de movimento. Um deles, chamado de orbital, é análogo ao movimento anual da Terra em torno do Sol. O outro, análogo à rotação diária da Terra em torno do seu próprio eixo, é conhecido pelo nome inglês *spin*, que significa girar.

As interações básicas das cargas de um átomo com campos externos são sempre determinadas pela força de Lorentz,  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ . Quando o átomo é colocado em presença de um campo elétrico estático, o núcleo e os elétrons são puxados em direções opostas e o átomo se deforma, ficando polarizado. Quando o campo externo é magnético, as forças são devidas aos movimentos orbitais e de spin.

Consideramos, inicialmente, as respostas de vários materiais a *estímulos magnéticos estáticos*.

### • fenômenos magnéticos

Mesmo na ausência de campos externos, existem efeitos magnéticos importantes no interior da matéria, pois tanto os movimentos orbitais dos elétrons quanto os seus spins correspondem a correntes que produzem campos magnéticos. No átomo de hidrogênio, por exemplo, a força elétrica que prende o elétron ao próton é dominante mas, não única. No interior deste sistema existem, também, dois tipos de interações magnéticas: uma entre os spins do próton e do elétron e a outra do spin do próton com o movimento orbital do elétron. Essas interações são conhecidas, no jargão da física atômica, como interações spin-spin e spin-órbita e produzem efeitos pequenos, na forma de deslocamentos nas linhas espectrais do átomo, mas que podem ser bem medidos experimentalmente.

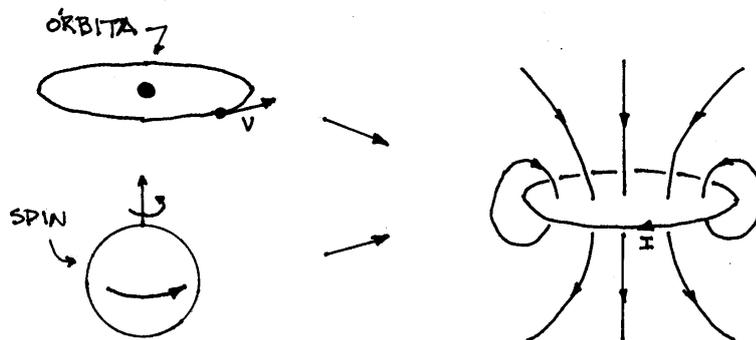


Figura 31.1:

No caso de descrições qualitativas, podemos pensar os movimentos orbitais e de spin dos elétrons atômicos como sendo análogos a pequenas espiras de corrente, como na figura 31.1. Por isso, em qualquer amostra estudada, existem muitas fontes de campos magnéticos internos. Entretanto, na enorme maioria das substâncias, com exceção de ferro, cobalto e níquel, que serão discutidas na próxima aula, estes campos magnéticos internos não são percebidos em escala macroscópica. Isto ocorre por dois motivos principais. O primeiro deles é que, em cada átomo, muitos efeitos magnéticos se cancelam mutuamente. Por exemplo, no interior de um dado átomo, podem haver movimentos orbitais tanto em um sentido como no sentido oposto. O mesmo pode ocorrer com os movimentos de spin. Nestes casos, os efeitos magnéticos dos dois tipos de movimento tendem a se anular. O outro mecanismo importante é a temperatura, que tende a desordenar o sistema e fazer com que a probabilidade de orientação dos campos magnéticos internos de um dado átomo seja a mesma para qualquer direção considerada. Por este motivo, valores médios, tomados sobre um grande número de átomos, se anulam.

Quando amostras são colocadas em campos externos, a componente  $q\vec{v} \times \vec{B}$  da força de Lorentz tende a aumentar os movimentos dos elétrons em um dado sentido e suprimir os de sentido oposto. Com isso, os campos magnéticos internos se tornam assimétricos e deixam de se cancelar totalmente. O resultado deste processo é o aparecimento de efeitos macroscópicos. No interior da amostra passam a coexistir, então, o campo externo  $\vec{B}_{ext}$  e um campo de origem interna, normalmente representado por  $\vec{B}_M$ , sendo o campo

resultante dado por

$$\vec{B} = \vec{B}_{ext} + \vec{B}_M, \quad (31.5)$$

Esta é uma soma vetorial e, dependendo do caso,  $\vec{B}_M$  pode ser paralelo ou anti-paralelo a  $\vec{B}_{ext}$ .

Em muitas substâncias, as respostas magnéticas são *lineares* e podem ser expressas pela relação

$$\vec{B}_M = \chi_M \vec{B}_{ext}, \quad (31.6)$$

onde  $\chi_M$  é uma constante, conhecida como *susceptibilidade magnética* do material. Nestes casos, o campo  $\vec{B}$  no interior da amostra é dado por

$$\vec{B} = (1 + \chi_M) \vec{B}_{ext}. \quad (31.7)$$

Experimentalmente, são conhecidas três grandes classes de substâncias, de acordo com suas respostas magnéticas:

- **substâncias diamagnéticas**, com valores de  $\chi_M$  *negativos* e da ordem de  $10^{-5}$ ;
- **substâncias paramagnéticas**, com valores de  $\chi_M$  *positivos* e da ordem de  $10^{-4}$ ;
- **substâncias ferromagnéticas**, com valores de  $\chi_M$  *positivos* e da ordem de 1.000.

Estas características magnéticas da matéria se manifestam quando amostras são colocadas em presença de campos magnéticos *intensos* e *não uniformes*, criados por eletro-ímãs potentes.

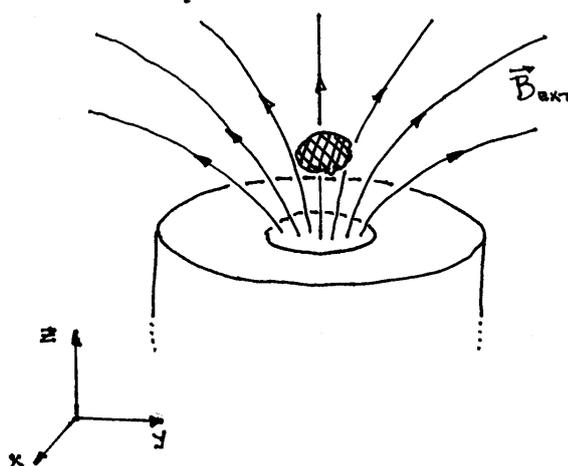


Figura 31.2:

Esta situação é mostrada na figura 31.2, onde o campo é mais intenso nas proximidades do eletro-ímã e decresce à medida que nos afastamos dele. Quando uma substância

diamagnética é colocada em presença de tal campo, ela sofre uma força que tende a empurrá-la para as regiões onde  $\vec{B}$  decresce (para cima, na figura). Já uma substância paramagnética é puxada para as regiões onde  $\vec{B}$  cresce (para baixo, na figura), e o mesmo acontece com materiais ferromagnéticos.

Uma característica importante das respostas de amostras de materiais a campos magnéticos estáticos é que elas não dependem do sentido de  $\vec{B}$ . Assim, por exemplo, se invertêssemos a corrente no eletro-ímã da figura 31.2, os sentidos das linhas de campo mudariam, mas o mesmo **não** aconteceria com os sentidos das forças que agem sobre a amostra.

O principal material ferromagnético é o ferro. Quem já brincou com um pequeno ímã permanente, sabe que os seus efeitos sobre pedaços de ferro são facilmente perceptíveis. Já as forças sobre materiais diamagnéticos e paramagnéticos são bastante fracas e somente podem ser percebidas com o auxílio de instrumentos delicados. De modo geral, as forças sobre as substâncias paramagnéticas são, em módulo, maiores do que as que agem sobre substâncias diamagnéticas.

Exemplos de substâncias diamagnéticas são: água ( $\text{H}_2\text{O}$ ), cobre ( $\text{Cu}$ ), chumbo ( $\text{Pb}$ ), cloreto de sódio ( $\text{NaCl}$ ), enxofre ( $\text{S}$ ), diamante ( $\text{C}$ ), nitrogênio líquido ( $\text{N}_2$ ). São substâncias paramagnéticas: sódio ( $\text{Na}$ ), alumínio ( $\text{Al}$ ), cloreto de cobre ( $\text{CuCl}_2$ ), sulfato de níquel ( $\text{NiSO}_4$ ), oxigênio líquido ( $\text{O}_2$ ). Dentre os materiais ferromagnéticos pode-se mencionar o ferro ( $\text{Fe}$ ), a magnetita ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ), o cobalto e o níquel.

Veremos, em nosso estudo, que *todas* as substâncias apresentam diamagnetismo. Materiais paramagnéticos ou ferromagnéticos possuem outras características que se sobrepõem e superam os efeitos do diamagnetismo.

## • diamagnetismo

O efeito conhecido como *diamagnetismo* se manifesta em qualquer tipo de substância. Ele ocorre como reação do movimento orbital dos elétrons dos átomos a um campo magnético externo, estático e não uniforme. Em geral, os comportamentos dos átomos no interior da matéria são determinados pela mecânica quântica. Para trazer a discussão para o contexto clássico, mais apropriado a este curso, consideramos um modelo muito simplificado, onde o átomo é representado por elétrons que giram em torno do núcleo. Um desses elétrons, que se move em uma órbita circular, é mostrado na figura 31.3. Nesta situação, o momento angular  $\vec{L}$  do elétron é ortogonal ao plano da órbita e aponta para fora da folha.

Imaginemos que, inicialmente, não exista campo magnético externo na amostra considerada. Neste caso, o raio  $r_0$  da órbita do elétron e a sua velocidade  $v_0$  são determinadas pela energia total  $E_0$  sistema elétron-núcleo. Sendo  $m$  a massa do elétron e  $-e$ , a sua

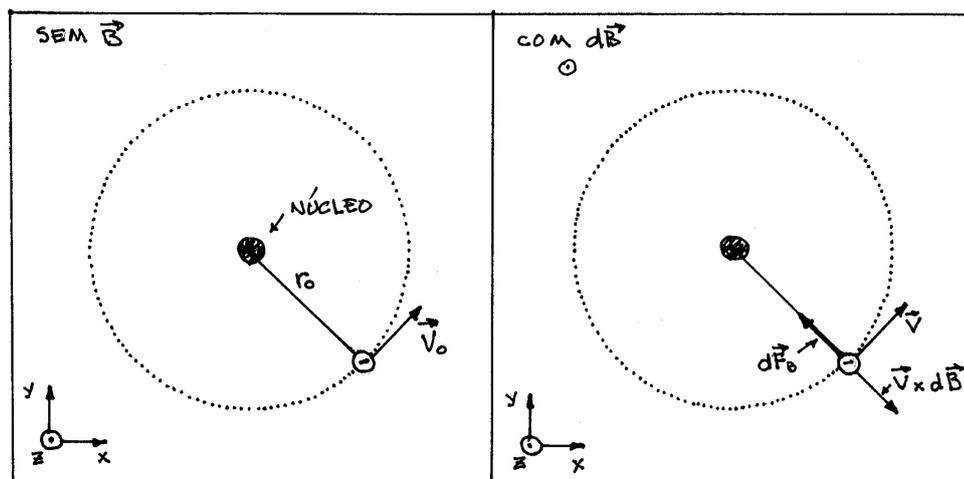


Figura 31.3:

carga, a lei de Newton fornece

$$\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \frac{m v_0^2}{r_0} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_0^2}. \quad (31.8)$$

A energia total  $E_0$ , determinada pela soma das energias cinética e potencial, é escrita como

$$E_0 = \frac{m v_0^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r_0}. \quad (31.9)$$

Como o átomo é um sistema ligado, a energia  $E_0$  é negativa. De fato, multiplicando a eq.(31.8) por  $r_0/2$  e usando o resultado em (31.9), encontramos

$$E_0 = -\frac{e^2}{8\pi \epsilon_0 r_0}. \quad (31.10)$$

Assim,

$$r_0 = \frac{e^2}{8\pi \epsilon_0 |E_0|}, \quad (31.11)$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 |E_0|}{m}}. \quad (31.12)$$

Consideremos, agora, o que acontece com o elétron quando um campo magnético externo é introduzido na região onde a amostra se encontra. Para simplificar a discussão, supomos que este campo  $d\vec{B}_{ext}$  seja pequeno e paralelo ao momento angular  $\vec{L}$  do elétron. Este campo  $d\vec{B}_{ext}$  altera a energia do sistema para um novo valor  $E$ , associado a uma nova velocidade  $v$ , em uma órbita com um novo raio  $r$ .

A situação considerada na figura 31.3 mostra o que acontece quando este pequeno campo externo  $d\vec{B}_{ext}$ , paralelo ao eixo  $z$ , é introduzido. Ele dá origem a uma força radial  $d\vec{F}_B$ , que se soma à atração coulombiana. A lei de Newton fornece, então

$$\vec{F} = m\vec{a} \longrightarrow \frac{m v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r^2} + e v dB_{ext}. \quad (31.13)$$

Já a energia do sistema é dada por

$$E = \frac{m v^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r}. \quad (31.14)$$

Como  $d\vec{B}_{ext}$  é pequeno, podemos supor que  $r = r_0 + dr$ ,  $v = v_0 + dv$ . Empregando a expansão

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0(1 + \frac{dr}{r_0})} \simeq \frac{1}{r_0} \left(1 - \frac{dr}{r_0}\right), \quad (31.15)$$

e guardando apenas diferenciais de primeira ordem, a lei de Newton pode ser reexpressa como

$$\frac{m v_0^2}{r_0} + \frac{2m v_0}{r_0} dv - \frac{m v_0^2}{r_0^2} dr = \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r_0^2} - 2 \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r_0^3} dr + e v_0 dB_{ext}. \quad (31.16)$$

Usando a eq. (31.8), obtemos uma relação entre diferenciais, dada por

$$\frac{2 m v_0}{r_0} dv + \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r_0^3} dr = e v_0 dB_{ext}. \quad (31.17)$$

Analogamente, a eq. (31.14) para a energia fornece, em primeira ordem,

$$\begin{aligned} E &= \frac{m v_0^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r_0} + m v_0 dv + \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r_0^2} dr \\ &= E_0 + m v_0 dv + \frac{e}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r_0^2} dr. \end{aligned} \quad (31.17)$$

A variação de energia  $dE = E - E_0$  também pode ser expressa em função de  $dB_{ext}$ . Para tanto, notamos que a introdução do campo magnético na região onde o átomo se encontra envolve um intervalo de tempo  $dt$ , durante o qual ele varia de zero até o valor  $dB_{ext}$ . Pela lei de Faraday, neste intervalo, haverá um campo elétrico induzido  $\vec{E}_{ind}$ , originado pela variação temporal de  $\vec{B}_{ext}$ . Na situação da figura 31.3, este campo elétrico induzido tem a forma de linhas circulares concêntricas, mostrada na figura 31.4.

O valor de  $\vec{E}_{ind}$  é obtido a partir da lei de Faraday, escrita na forma

$$\oint_L \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{\ell} = - \iint \frac{\partial \vec{B}_{ext}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS, \quad (31.18)$$

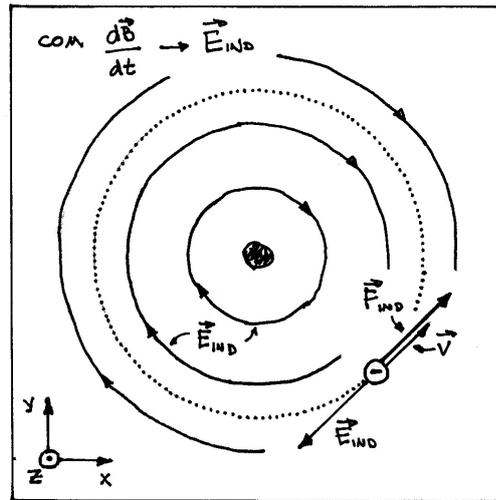


Figura 31.4:

e considerando a linha fechada  $L$  coincidente com a órbita do elétron. Como o átomo é pequeno, a dependência de  $\vec{B}$  nas coordenadas espaciais pode ser ignorada e escrevemos  $\partial B/\partial t = dB/dt$ . Assim, obtemos

$$E_{ind} 2\pi r = -\frac{dB_{ext}}{dt} \pi r^2 \longrightarrow E_{ind} = -\frac{r}{2} \frac{dB_{ext}}{dt}. \quad (31.19)$$

Este campo  $E_{ind}$  é responsável por uma força de intensidade  $F_{ind} = -eE_{ind}$  sobre o elétron, que é paralela ao seu movimento e, portanto, aumenta a sua energia cinética.

Esta variação  $dE$  de energia é dada pelo trabalho realizado pela força  $F_{ind}$  durante o tempo  $dt$  e vale, em primeira ordem,

$$dE = F_{ind} v_0 dt = -e E_{ind} v_0 dt = \frac{1}{2} e r_0 v_0 dB_{ext}. \quad (31.20)$$

Comparando esta expressão com (31.18), encontramos

$$m v_0 dv + \frac{e}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r_0^2} dr = \frac{1}{2} e r_0 v_0 dB_{ext}. \quad (31.21)$$

Multiplicando por  $2/r_0$  e subtraindo a eq.(31.17), obtemos

$$\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r_0^3} dr = 0. \quad (31.22)$$

Este resultado é interessante, porque indica que  $dr = 0$ , ou seja, que a introdução do campo magnético *não altera* o raio da órbita do elétron. Agora, voltando à eq.(31.17), podemos escrever

$$dv = \frac{e r_0}{2m} dB_{ext}. \quad (31.23)$$

Esta relação foi obtida para uma variação infinitesimal  $d\vec{B}_{ext}$  do campo magnético externo. Entretanto, a relação linear entre  $dv$  e  $dB_{ext}$  permite-nos generalizá-la para variações finitas do campo, escrevendo

$$v_A = v_0 + \frac{e r_0}{2m} B_{ext} , \quad (31.24)$$

onde  $v_0$  e  $v_A$  são, respectivamente, as velocidades do elétron, no sentido anti-horário, antes e depois da introdução do campo externo. Assim, no caso do movimento considerado na figura 31.3, a introdução do campo magnético *augmenta* o módulo da velocidade do elétron em sua trajetória circular. Isto ocorre porque, como mostra a figura 31.4, a força  $\vec{F}_{ind}$  é paralela à velocidade.

Por outro lado, se a velocidade inicial  $v_0$  fosse invertida e correspondesse a um movimento horário, a força  $\vec{F}_{ind}$ , que não muda, tenderia a desacelerar o elétron. Fazendo  $v_0 \rightarrow -v_0$  na eq.(31.24), teríamos

$$v_H = v_0 - \frac{e r_0}{2m} B_{ext} , \quad (31.25)$$

onde  $v_H$  é a velocidade, no sentido horário, após a introdução de  $\vec{B}_{ext}$ . Esta assimetria entre  $v_A$  e  $v_H$  está por trás dos comportamentos diamagnéticos da matéria.

### • a susceptibilidade negativa

De modo geral, o movimento orbital de um elétron simula uma corrente elétrica, dada por

$$I = \frac{n^\circ \text{ de vezes que o eletron passa por um ponto}}{\text{tempo}} \times \text{carga do eletron} ,$$

ou seja, em termos do período  $T$  de uma volta, temos

$$I = \frac{-e}{T} = \frac{-e v}{2\pi r} . \quad (31.25)$$

É importante notar que, devido ao fato de a carga do elétron ser negativa, o sentido da corrente é contrário ao da velocidade.

Como indicado na figura 31.1, os movimentos orbitais dos elétrons atômicos podem ser pensados como espiras percorridas por correntes, que criam campos magnéticos nas vizinhanças dos átomos. Numa amostra típica de material, as rotações dos elétrons estão distribuídas estatisticamente em todos os planos e sentidos. Por isso, na ausência de  $\vec{B}_{ext}$ , os campos magnéticos criados por estes movimentos são, em média, nulos.

Na situação descrita anteriormente, por outro lado, a presença de  $\vec{B}_{ext}$  faz com que  $v_A$  seja maior do que  $v_H$  e a eq.(31.25) permite-nos concluir que as correntes associadas a estes movimentos são diferentes entre si. Como a carga do elétron é negativa,  $I$  e  $v$  têm sentidos opostos, e escrevemos

$$v_A \longrightarrow I_H = -\frac{e v_A}{2\pi r} \quad e \quad v_H \longrightarrow I_A = -\frac{e v_H}{2\pi r} . \quad (31.26)$$

A regra da mão direita indica que os campos magnéticos criados por  $I_H$  e  $I_A$  na região central do átomo são, respectivamente,  $\vec{B}_H = -B_H \vec{k}$  e  $\vec{B}_A = B_A \vec{k}$ , sendo  $\vec{k}$  o versor da direção  $z$  na figura 31.3. Como  $B_H > B_A$ , a média  $\vec{B}_M$  dos campos criados pelos átomos aponta na direção *contrária* a  $\vec{B}_{ext}$ . Por isso, em termos da eq.(31.6), a susceptibilidade  $\chi_M$  dos materiais diamagnéticos é negativa.

Os valores empíricos de  $\chi_M$  para os diversos materiais são da ordem de  $10^{-5}$  e os campos totais nos seus interiores são ligeiramente *menores* que  $\vec{B}_{ext}$ . Por isso, eles somente podem ser observados com instrumentos precisos.

### • as forças

A situação ilustrada na figura 31.3 mostra o que acontece com os átomos de uma amostra quando ela é embebida em um campo  $d\vec{B}_{ext}$  na direção  $z$ . Campos nesta direção produzem apenas forças contidas no plano da órbita, que não são capazes de *deslocar* os átomos ao longo do eixo  $z$ . Para que isto aconteça, é preciso que  $\vec{B}_{ext}$  tenha, também, componentes  $\vec{B}'_{ext}$ , no plano da órbita, e é por este motivo que os experimentos são feitos com campos não uniformes.

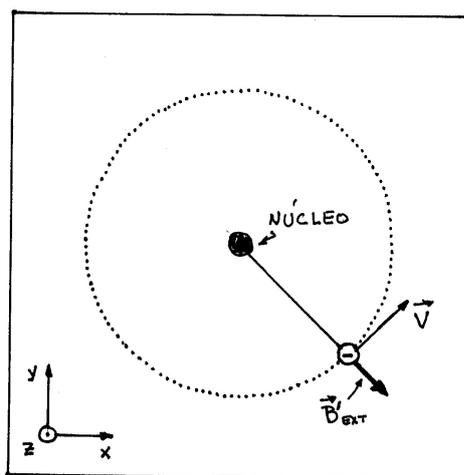


Figura 31.5:

Se os campos forem divergentes ao longo do eixo  $z$ , como mostra a figura 31.2, as componentes relevantes de  $\vec{B}'_{ext}$  têm a direção mostrada na figura 31.5. Por isto,  $\vec{v} \times \vec{B}'_{ext} = -v B'_{ext} \vec{k}$ , o que corresponde a uma força  $\vec{F} = e v B'_{ext} \vec{k}$ . Como os módulos das velocidades dos elétrons dependem dos seus sentidos de rotação, as eq.(31.24) e (31.25) levam a

$$v_A \longrightarrow \vec{F}_A = e v_A B'_{ext} \vec{k} \quad e \quad v_H \longrightarrow \vec{F}_H = -e v_H B'_{ext} \vec{k}. \quad (31.27)$$

Como  $|\vec{F}_A| > |\vec{F}_H|$ , a força resultante sobre a amostra tem a direção  $\vec{k}$ , ou seja, ela é empurrada para as regiões em que  $|\vec{B}_{ext}|$  decresce.

- ocorre sempre

O efeito conhecido como diamagnetismo ocorre em todos os materiais, já que ele só depende da existência de elétrons em movimento...

- paramagnetismo

Um outro fenômeno importante, relacionado à resposta da matéria a campos magnéticos externos, é o **paramagnetismo**. Ele é associado às reações dos *spins* dos elétrons ao campo magnético externo  $\vec{B}_{ext}$ .

No âmbito desta discussão qualitativa, o spin do elétron pode ser pensado como uma rotação em torno do seu próprio eixo, como a de um pião. Sendo o elétron carregado, este tipo de movimento dá origem a correntes que, por sua vez, criam campos magnéticos. Por isto, nesta discussão, podemos pensar o elétron girante como uma espécie de espira microscópica, como indicado na figura 31.1. Note que a corrente na espira é contrária à rotação do elétron, devido à sua carga negativa.

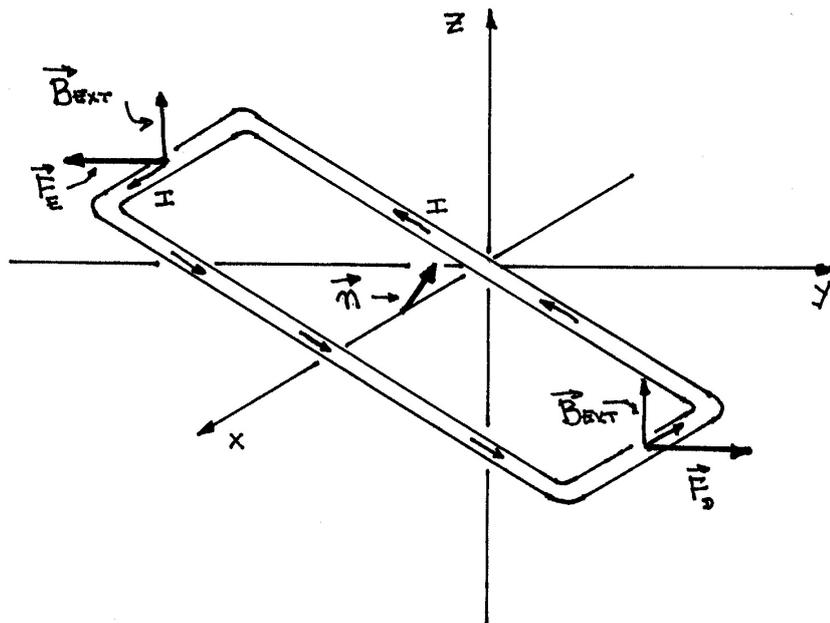


Figura 31.6:

Para caracterizar a orientação espacial de uma espira, é conveniente usar um versor  $\vec{n}$ , normal ao plano que a contém, apoiado no seu centro e orientado, relativamente ao sentido da corrente, pela regra da mão direita. Quando esta espira é colocada em presença de um campo magnético externo não paralelo a  $\vec{n}$ , aparece um torque sobre ela. Tal situação é mostrada na figura 31.6, para o caso de um  $\vec{B}_{ext}$ , paralelo ao eixo  $z$  e uniforme na região onde a espira se encontra.

As forças  $\vec{F}_E$  e  $\vec{F}_D$ , que agem nos lados esquerdo e direito da espira, são paralelas ao eixo  $y$  e causam um torque sobre ela. Se a espira puder girar livremente, este torque tende a alinhar a normal  $\vec{n}$  ao campo externo  $\vec{B}_{ext}$ . Quando ambos estão paralelos, a espira fica em equilíbrio estável e o campo  $\vec{B}_{spin}$ , criado pela espira, fica paralelo a  $\vec{B}_{ext}$ . Aqui, é preciso enfatizar que este resultado **não** decorre da ação direta de  $\vec{B}_{ext}$  sobre  $\vec{B}_{spin}$ , pois campo não age sobre campo! Esta analogia com a espira indica que um campo externo  $\vec{B}_{ext}$ , ao ser introduzido no interior de um material, causa torques sobre todos os seus elétrons e estes recebem um tranco, uma sacudidela. No jargão da física, este tranco é designado pela palavra "flip", em inglês.

Numa amostra de matéria *sem* campo externo, os spins dos elétrons estão, estatisticamente, orientados igualmente em todas as direções e, conseqüentemente, a média dos  $\vec{B}_{spin}$  é nula. Por outro lado, quando o campo externo está presente, os flips que ele causa sobre os elétrons permitem que eles reorientem as suas rotações, fazendo com que  $\vec{B}_{spin}$  e  $\vec{B}_{ext}$  fiquem paralelos. Conseqüentemente, o campo  $\vec{B}_M$ , que representa a soma de todos os  $\vec{B}_{spin}$  numa região do material é, também, paralelo a  $\vec{B}_{ext}$ . Isto indica que o mecanismo de spin flip leva a um campo resultante no interior da matéria que é maior do que  $\vec{B}_{ext}$  e, em termos da eq.(31.6), produz uma susceptibilidade  $\chi_M > 0$ .

### • a intensidade do paramagnetismo

A intensidade dos efeitos paramagnéticos em um dado material está diretamente associada à eficiência do mecanismo de spin flip. Dois efeitos contribuem para que esta eficiência seja baixa.

A primeira delas é a *temperatura*, associada a interações ao acaso, que desordenam os sistemas. Por isso, ela compete com  $\vec{B}_{ext}$ , que tende a ordenar os spins do material e  $\chi_M$  decresce com o aumento da temperatura.

O segundo efeito é devido ao *princípio de exclusão de Pauli*, que é parte da mecânica quântica e afirma que dois elétrons não podem ocupar, simultaneamente, o mesmo estado. No caso de elétrons em átomos ou moléculas, este princípio faz com que as eletrosferas destes sistemas sejam formadas, predominantemente, por elétrons agrupados em pares, com spins opostos. Mesmo quando há flips devidos a campos magnéticos externos, estes emparelhamentos persistem e os elétrons não conseguem reverter os seus sentidos de rotação. Por este motivo, a grande maioria dos sistemas com números pares de elétrons não tem características paramagnéticas e é diamagnética.

Por outro lado, quando átomos ou moléculas têm um número ímpar de elétrons, um deles está sempre desemparelhado. Nestes casos, ele pode sofrer a ação do flip devido ao campo externo e reorientar o seu campo magnético  $\vec{B}_{spin}$ . Quando isto acontece, os efeitos deste mecanismo são mais intensos do que os devidos à alteração das velocidades das órbitas e o material é paramagnético. A ordem de magnitude da susceptibilidade  $\chi_M$  de substâncias paramagnéticas é de  $10^{-4}$ .

- as forças

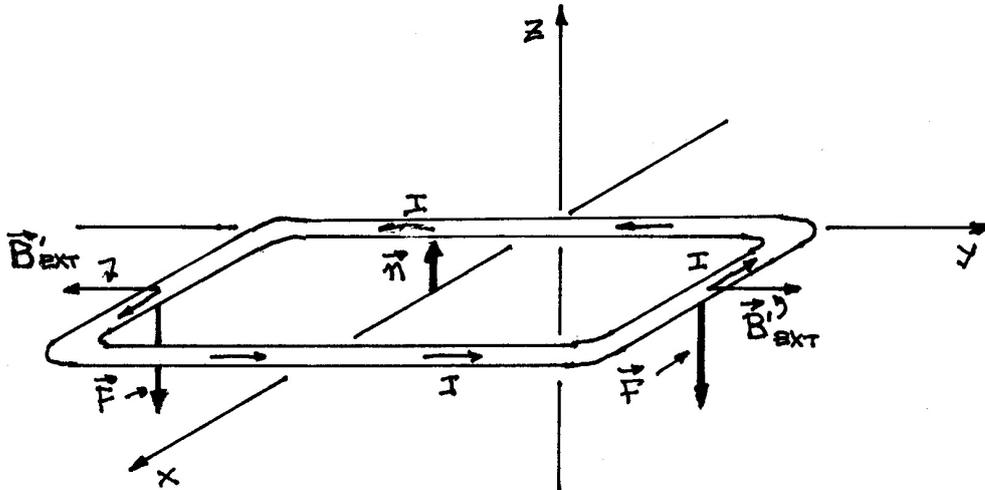


Figura 31.7:

Como no caso do diamagnetismo, é preciso que  $\vec{B}_{ext}$  seja não uniforme para que possamos observar forças sobre amostras. Na situação mostrada na figura 31.2, o campo externo é divergente ao longo do eixo  $z$  e as componentes relevantes do campo ortogonais a este eixo, representadas por  $\vec{B}'_{ext}$ , têm a forma mostrada na figura 31.7. No caso de uma espira em equilíbrio, com a normal paralela a  $\vec{B}_{ext}$ , as forças que agem sobre os portadores de carga em movimento apontam na direção  $-\vec{k}$  e tendem a puxar a amostra para as regiões em que  $|\vec{B}_{ext}|$  cresce. Esta propriedade não se altera quando o sentido de  $\vec{B}_{ext}$  é invertido.

- exercícios

1. Considere o caso de uma amostra diamagnética submetida a um campo externo  $\vec{B}_{ext} = -B_0 \vec{k}$ , com  $B_0 > 0$ .
  - a) Refaça as figuras 31.3 e 31.4;
  - b) Chamando os módulos das velocidades dos elétrons que giram em sentidos horário e anti-horário em relação ao eixo  $z$  de  $v_H$  e  $v_A$ , respectivamente, é correto afirmar que  $v_H < v_A$ ?
  - c) É correto afirmar que, neste caso, a susceptibilidade magnética  $\chi_M$  é positiva?
2. Considere a figura 31.2 com os sentidos das linhas de campo  $\vec{B}_{ext}$  invertidos. É correto afirmar que, neste caso, uma amostra de material diamagnético, colocada em presença de tal campo, seria puxada para a região na qual  $|\vec{B}_{ext}|$  cresce? Justifique a sua resposta.
3. Considere a figura 31.2, com o sentido das linhas de campo invertidos. É correto afirmar que, neste caso, uma amostra de material paramagnético, colocada em presença de tal campo, seria puxada para a região na qual  $|\vec{B}_{ext}|$  cresce? Justifique a sua resposta.

# Capítulo 32

## ferromagnetismo

### • introdução

A resposta de um material a campos magnéticos externos pode ser estudada colocando amostras desse material no interior de um solenóide, como mostra a figura 32.1. Ao passar uma corrente  $I$  pelo solenóide, aparece um campo magnético no ponto  $P$ , que pode ser medido. Se o interior do solenóide estiver vazio, o campo em  $P$  tem um valor  $\vec{B}_P$ . Quando uma amostra de material é introduzida no interior do solenóide, para o mesmo valor de  $I$ , o valor do campo magnético no ponto  $P$  muda, passando a ser  $\vec{B}'_P$ . Deste modo, a diferença  $\vec{B}'_P - \vec{B}_P$  fornece indícios importantes sobre a resposta do material ao campo externo.

No caso de materiais ferromagnéticos, essas respostas são muito intensas. Os campos  $\vec{B}_P$  e  $\vec{B}'_P$  são paralelos e o módulo de  $\vec{B}'_P$  pode chegar a ser milhares de vezes maior do que o de  $\vec{B}_P$ . Os principais materiais ferromagnéticos são ferro (Fe), cobalto (Co) e níquel (Ni). A figura 32.2 mostra um gráfico da relação típica dentre  $\vec{B}'_P$  e  $\vec{B}_P$ , para esses materiais.

As escalas são omitidas propositalmente, pois os aspectos quantitativos variam de um material para outro. A característica importante a ser notada é que, inicialmente,  $\vec{B}'_P$  cresce com o aumento de  $\vec{B}_P$ , até se estabilizar em um patamar, a partir de um valor



Figura 32.1:

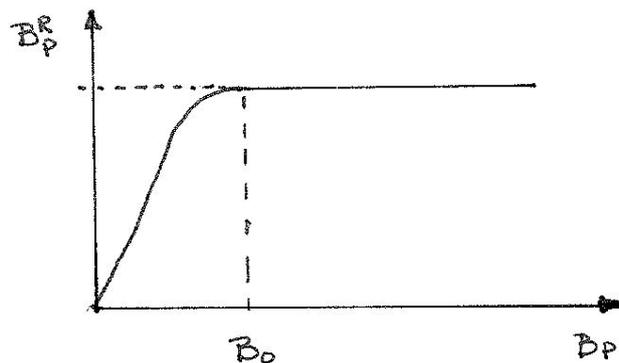


Figura 32.2:

$\vec{B}_0$ . Daí em diante, aumentos de  $\vec{B}_P$  não conseguem mais aumentar  $\vec{B}'_P$ , indicando uma saturação. Esse tipo de comportamento, observado nos vários materiais ferromagnéticos, levou o físico francês Pierre Weiss a propor, em 1906-1907, um modelo para a organização da matéria no interior de amostras ferromagnéticas, que permanece válido até hoje.

### • átomos de ferro e efeitos coletivos

Weiss propôs *que* os átomos de Fe tendem a se organizar coletivamente, quando colocados juntos uns aos outros. Entretanto, na sua época a mecânica quântica não era conhecida e, portanto, não era possível entender *porque* isso ocorre. Atualmente, sabemos que um átomo de Fe possui um núcleo com 26 prótons e um número de neutrons que pode variar entre 28 e 31, dependendo do isótopo. Um átomo neutro também possui, portanto, 26 elétrons, organizados em 6 camadas como mostra a tabela.

camada	número de elétrons
1S	2
2S	2
2P	6
3S	2
3P	6
3D	6
4S	2

Nessa configuração, as 5 primeiras camadas estão completas e contêm sempre números pares de elétrons, com spins opostos. De acordo com a mecânica quântica, a camada 3D, mais externa, poderia acomodar até 10 elétrons. Entretanto, no átomo de Fe existem apenas 6, o que permite a eles que se organizem de vários modos diferentes. Em particular, existem configurações nas quais o momento angular do sistema é não nulo. Como esse momento angular é devido a elétrons em movimento, ele indica a presença de correntes

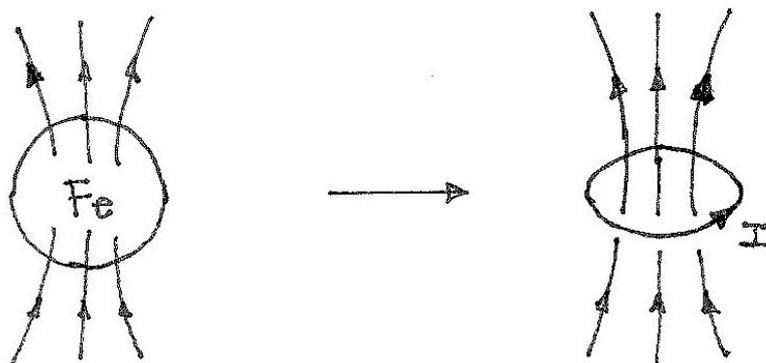


Figura 32.3:

e, conseqüentemente, que o átomo gera campo magnético. Por isso, do ponto de vista eletromagnético, um átomo de Fe pode ser pensado como sendo análogo a uma espira com corrente, como sugere a figura 32.3.

Quando dois átomos de Fe são colocados próximos um ao outro, ocorrem interações eletromagnéticas entre todos os pares de partículas carregadas, estejam elas em um único átomo ou em átomos diferentes. Assim, por exemplo, cada elétron interage com 26 prótons e 25 elétrons do seu átomo e, também, com os 26 prótons e 26 elétrons do outro átomo. Como os elétrons da camada  $3D$  são mais externos e podem estar em várias configurações diferentes, eles são mais sensíveis à presença do átomo vizinho. Por isso, os elétrons da camada  $3D$  de um átomo influem significativamente sobre o comportamento dos elétrons da camada  $3D$  do vizinho.

O mesmo tipo de efeito ocorre na ligação entre os dois átomos de hidrogênio que formam a molécula de  $H_2$ , como discutimos na aula 4 do curso de Física 3. No caso do  $H_2$ , que envolve apenas 4 partículas, dois prótons e dois elétrons, a estrutura da molécula pode ser calculada com precisão e fica claro o papel do princípio de Pauli. Esse princípio afirma que dois elétrons não podem ocupar o mesmo estado quântico e a sua influência sobre os resultados dos cálculos pode ser seguida. O caso de uma amostra de Fe é muito mais complexo, tanto devido à existência de 26 elétrons em cada átomo como pelo fato de a amostra conter muitos átomos. Por isso não existem, até o momento, cálculos de sistemas ferromagnéticos a partir de primeiros princípios. Apesar dessa limitação, sabemos que o efeito do princípio de Pauli em sistemas que contêm muitos átomos de Fe é fazer com que os seus momentos angulares se alinhem. Esse alinhamento faz com que as contribuições de cada átomo ao campo magnético se somem e deem origem espontaneamente, na região da amostra, a um campo magnético macroscópico  $\vec{B}^E$ . Tal situação está indicada na figura 32.4. Existem, também, interações magnéticas entre átomos vizinhos, mas eles são cerca de 1000 vezes menores que as devidas ao princípio de Pauli.

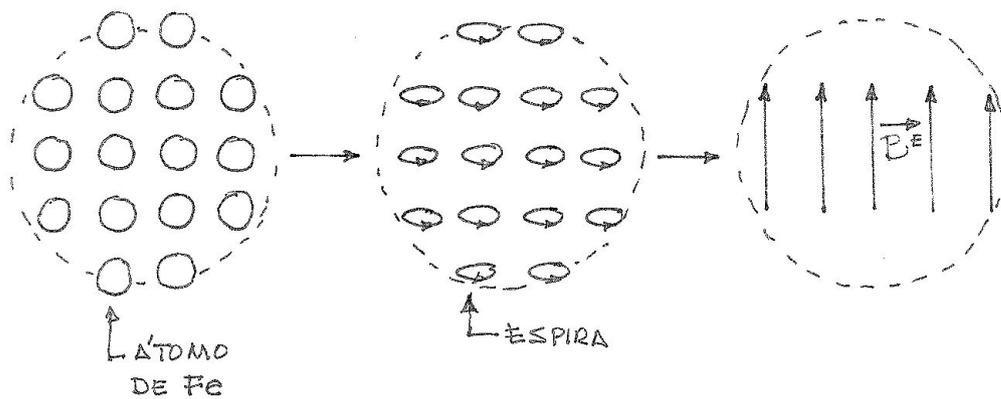


Figura 32.4:

### • domínios magnéticos

O modelo proposto por Weiss, bem antes da mecânica quântica, é baseado na idéia de que os átomos no interior de uma substância ferromagnética agrupam-se espontaneamente, em regiões ou *domínios*, sendo que, em cada um deles, o campo magnético é praticamente uniforme.

Para explicar a inexistência de efeitos magnéticos macroscópios, o modelo admite, também, que os campos em regiões próximas entre si estão orientados em sentidos opostos, de modo que os efeitos magnéticos produzidos pelas várias regiões tendem, em conjunto, a se anular. Tal situação está mostrada esquematicamente na figura 32.5, para o caso de uma amostra de Fe sem campo magnético externo. A parte ampliada da figura mostra dois domínios vizinhos, separados por uma região de transição, chamada *parede do domínio*.

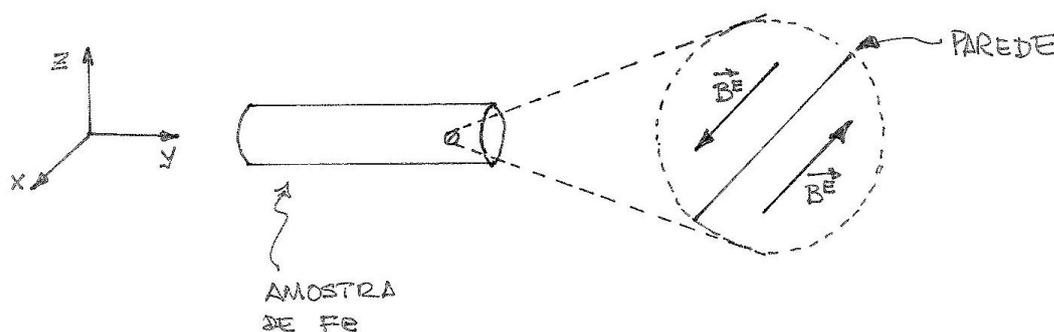


Figura 32.5:

Essas paredes são....

Para explicar o comportamento descrito na figura 32.2, Weiss supôs que, ao se colocar a amostra de Fe em presença de um campo magnético externo, o equilíbrio mostrado na

figura anterior é alterado. Se esse campo for da forma  $\vec{B}_{ext} = B_{ext} \vec{j}$ , com  $B_{ext} > 0$ , ele tenderá a aumentar a magnetização na direção mais paralela ao eixo  $y$  e diminuí-la na direção mais antiparalela.

As orientações dos átomos da parede são menos estáveis do que os do interior do domínio e, por isso, elas são mais influenciáveis pelo campo externo. Isso faz com que, à medida que  $\vec{B}_{ext}$  é introduzido, esses átomos das paredes se reorientem e a parede, entendida como a região de transição, se mova. Essa idéia é sugerida na figura 32.6. Esse mecanismo produz um aumento nas populações dos domínios nos quais  $\vec{B}^E$  é predominantemente paralelo a  $\vec{B}_{ext}$ , e comecem a aparecer efeitos macroscópicos. À medida que  $\vec{B}_{ext}$  aumenta, a parede continua a se mover até que a região de magnetização predominantemente antiparalela desapareça e, com ela, a parede.

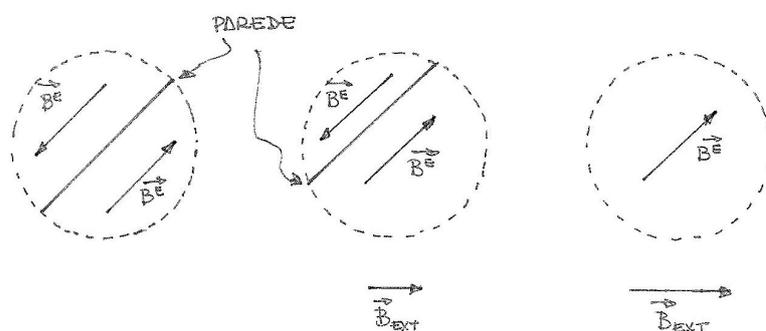


Figura 32.6:

A partir desse ponto, aumentos subsequentes de  $\vec{B}_{ext}$  começam a fazer com que os átomos passem a girar, de modo a tornar o campo espontâneo  $\vec{B}^E$  gradativamente paralelo ao campo externo. Quando esse paralelismo é alcançado, ocorre a saturação, pois  $\vec{B}_{ext}$  não consegue mais induzir aumentos na magnetização da amostra. Essa idéia é sugerida pela figura 32.7. Assim, o modelo proposto por Weiss, baseado na existência de domínios de magnetização no interior do Fe, permite-nos compreender a saturação da resposta de uma amostra de material ferromagnético a um campo magnético externo, mostrada na figura 32.2.

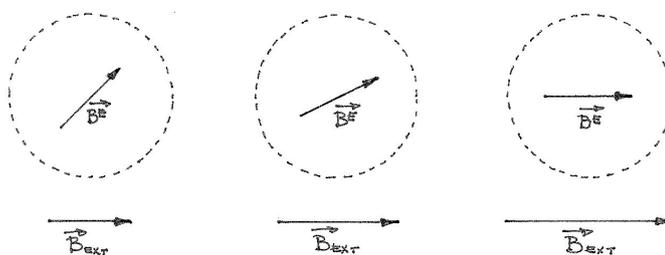


Figura 32.7:

### • histerese

Um outro fenômeno interessante, associado à existência de domínios, é o conhecido como histerese, nome derivado da palavra grega *memória*. Como discutimos anteriormente, quando uma amostra de Fe é submetida a um campo magnético muito intenso, ocorre a saturação da resposta magnética. O fenômeno da histerese está associado à irreversibilidade deste processo e está descrito na figura 32.8.

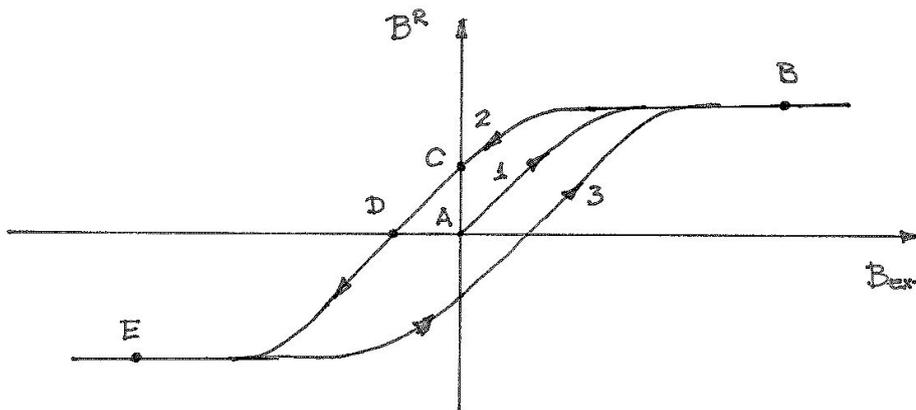


Figura 32.8:

Uma amostra de Fe, totalmente desmagnetizada e sem campo externo, corresponde ao ponto A da figura. À medida que  $\vec{B}_{ext}$  é aplicado, as paredes entre os domínios se movem, os spins atômicos se orientam, e o sistema se comporta como na curva (1), até ocorrer a saturação, no patamar onde está o ponto B. Se, a partir daí, passarmos a diminuir o campo externo, a amostra começa a se desmagnetizar. Entretanto, nesse processo de volta, o sistema percorre o caminho (2) e, mesmo na ausência completa de campo externo, existe um efeito residual de magnetização, representado pelo ponto C. Por isso, para desmagnetizar completamente a amostra, é preciso colocá-la em presença de um campo magnético externo de sentido o oposto ao anterior, até o ponto D ser atingido. A partir desse ponto, se a intensidade do campo externo continuar a ser aumentada, o sistema tende a uma nova saturação, na região do ponto E. Uma nova reversão de  $\vec{B}_{ext}$  leva o sistema a percorrer o caminho (3), até uma eventual nova saturação, na região do ponto B. A figura 32.8 descreve um processo irreversível, pois as curvas (1), (2) e (3) não se superpõem. Elas são conhecidas como curvas de histerese dos materiais ferromagnéticos.

### • efeito da temperatura

As propriedades de materiais ferromagnéticos que descrevemos acima envolvem o ordenamento de átomos nos seus interiores. Sabemos, por outro lado, que a temperatura, associada às energias cinéticas desses átomos, tende a desorganizar os sistemas, promovendo distribuições estatísticas. No interior do Fe esses dois efeitos competem e, por isso, a resposta de uma amostra desse material ao campo externo depende bastante da temperatura. A temperatura da amostra determina, em particular, o valor máximo da resposta

a um campo externo. Quanto maior a temperatura, menor será o valor de saturação do campo, como sugere a figura 32.9.

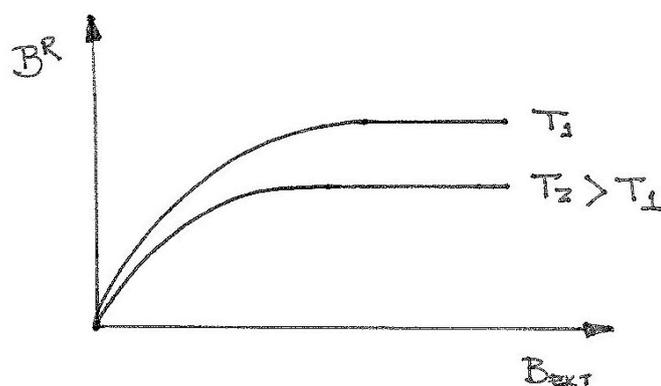


Figura 32.9:

Por esse motivo, respostas altas ocorrem a temperaturas muito baixas. De modo complementar, a resposta tenderá a se tornar pequena para temperaturas altas. A temperatura para a qual a resposta se anula é conhecida como temperatura de Curie, em homenagem ao físico francês Pierre Curie, que estudou esse fenômeno. As temperaturas de Curie para o Fe e para o Ni são, respectivamente  $770^\circ C$  e  $358^\circ C$ . Acima dessas temperaturas, esses materiais tornam-se paramagnéticos.



# Capítulo 33

## campos elétricos estáticos na matéria

A matéria à nossa volta é constituída por átomos, moléculas ou, como os metais, por íons positivos e elétrons livres, e as características de todos estes sistemas dependem do modo como as cargas elétricas estão organizadas neles. Por isso, o comportamento de amostras de matéria em presença de campos externos é determinado pela força de Lorentz  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ . Consequentemente, campos magnéticos influem sobre os movimentos de cargas, sejam eles orbitais ou de spin, enquanto que campos elétrico estáticos perturbam as posições das cargas, deslocando-as das suas posições de equilíbrio.

### • o campo eletrostático em presença da matéria

Calcular o campo eletrostático criado por um sistema de cargas em presença de amostras de matéria não é, em geral, uma tarefa fácil. Considere, por exemplo, as duas situações ilustradas nas figuras 33.1. Na primeira delas, uma carga puntiforme  $Q$ , positiva, está no vácuo e cria, em todo o espaço, um campo coulombiano. A outra figura representa a mesma carga, em presença de uma amostra de dielétrico, tal como um grão de arroz.

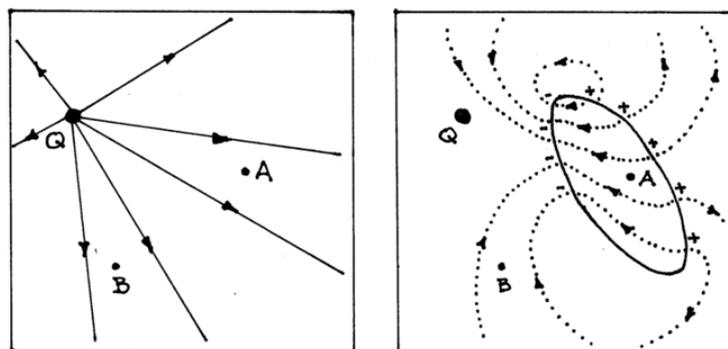


Figura 33.1:

Nas duas situações, a relação entre a carga  $Q$  e o *seu* campo é a mesma, já que ela é dada pela lei de Coulomb. Por isso, as linhas de campo da figura da esquerda deveriam ter sido reproduzidas na figura da direita. Isto só não foi feito para não poluir demais o desenho.

Um grão de arroz é constituído por elétrons e núcleos atômicos e, na ausência de campos externos, estes elementos estão aglomerados, devido a campos elétricos internos aos átomos e moléculas. Por outro lado, quando o grão de arroz é colocado em presença da carga  $Q$ , novas forças aparecem sobre elétrons e núcleos, que sofrem pequenos deslocamentos relativos, até se reequilibrarem novamente. Estes deslocamentos, por sua vez, provocam pequenos, mas significativos, acúmulos de cargas na superfície do dielétrico, que passam a criar campos elétricos em todo o espaço, como indica a figura da direita.

Deste modo, o dielétrico *reage* ao campo da carga  $Q$ , dando origem a um campo elétrico induzido  $\vec{E}_{ind}$ , que existe tanto dentro como fora dele, como nos pontos  $A$  e  $B$  da figura. Assim, o campo resultante  $\vec{E}$ , do sistema carga-dielétrico, é dado em todo o espaço por

$$\vec{E} = \vec{E}_Q + \vec{E}_{ind}. \quad (33.1)$$

Este exemplo sugere que não há nenhuma relação simples ou direta entre os campos elétricos no vácuo e em presença ou no interior de um dielétrico. Como a resposta de um corpo a campos elétricos externos depende tanto do material específico que o constitui como da sua geometria, o cálculo de  $\vec{E}_{ind}$  é, em geral, bastante complicado.

### • polarização

Na ausência de campos externos, a matéria que constitui os dielétricos está organizada na forma de átomos, nos quais elétrons orbitam em torno de núcleos. Estes átomos, por sua vez, se agrupam em moléculas e estas, também, se aglomeram em estruturas maiores, que definem as características do material, tais como densidade de massa, dureza, etc. Assim, as propriedades específicas de um dado material são determinadas por muitas interações diferentes, nas quais as cargas elétricas têm papel importante.

As dimensões típicas de átomos e moléculas variam entre  $10^{-10} - 10^{-9}$  m, enquanto que amostras macroscópicas são medidas em milímetros ou centímetros. Isto faz com que um elemento de volume  $dV$  de uma amostra, considerado pequeno em escala macroscópica, tenha um número muito grande de moléculas no seu interior. Por exemplo, um cubo de um milésimo de milímetro de lado, contém da ordem de um bilhão de moléculas. Por isso, para estudar as propriedades elétricas de uma amostra de material, é conveniente trabalhar com grandezas macroscópicas, que descrevam o comportamento médio de um número muito grande de moléculas.

Trabalhamos, em geral, com duas densidades de carga,  $\rho_-$  e  $\rho_+$ . A primeira delas é dada por  $\rho_- = dQ_-/dV$ , onde  $dQ_-$  corresponde a *toda* a carga negativa contida no volume  $dV$ . Esta carga  $dQ_-$  está diretamente associadas aos elétrons e, na sua conceituação, não fazemos distinção entre elétrons de um átomo ou de outro, de camadas externas ou

internas, simplesmente incluímos todos eles. Analogamente, a densidade  $\rho_+$  é dada por  $dQ_+/dV$ , onde  $dQ_+$  representa todas as cargas contidas nos prótons encerrados em  $dV$ , não importando em que átomos eles estejam.

Nós aqui, consideramos apenas o caso de amostras neutras de dielétricos, nas quais a carga total é nula. Na ausência de campos externos, em cada ponto de seu interior, vale a relação

$$\rho_- + \rho_+ = 0 \quad (33.2)$$

e, por isso, dizemos que o dielétrico é *localmente neutro*. Esta neutralidade decorre do fato de as densidades  $\rho_-$  e  $\rho_+$  estarem vinculadas entre si, já que representam aspectos diferentes de estruturas moleculares neutras.

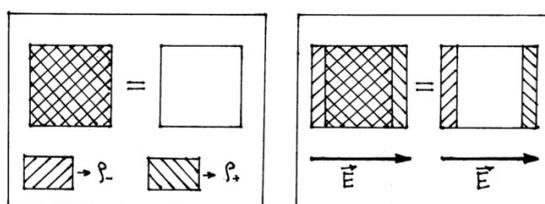


Figura 33.2:

Quando a amostra de dielétricos é colocada em presença de um campo elétrico externo, aparecem forças que tendem a puxar os elétrons em um sentido e as cargas positivas no sentido oposto. Neste caso, o dielétrico está *polarizado*. Isto se reflete também nas propriedades médias do sistema e as densidades  $\rho_-$  e  $\rho_+$  deslocam-se relativamente, como indicado na figura 33.2. No caso em que estes deslocamentos ocorrem no interior da amostra, as densidades de sinais opostos se superpõem, e o sistema continua localmente neutro, como sugere a figura 33.3. Entretanto, tal superposição não pode ocorrer nas bordas do corpo, o que dá origem a distribuições de cargas de sinais opostos em lados opostos da sua superfície. Tal como no grão de arroz da figura 33.1. É importante notar que as densidades de carga  $\rho_-$  e  $\rho_+$  são volumétricas e, por isso, os corpos representados nas figuras 33.1-33.3 devem ser pensados como sendo tridimensionais.

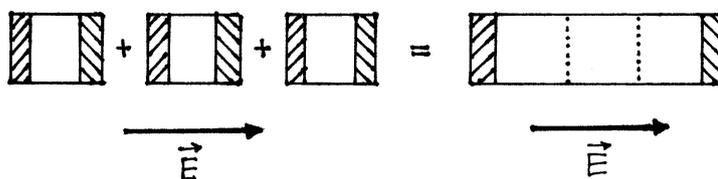


Figura 33.3:

No processo de polarização, as cargas contidas nas moléculas são tiradas das suas posições de equilíbrio pelo campo externo  $\vec{E}_{ext}$ . Se este campo for muito forte, ele pode

causar alterações grandes e irreversíveis no sistema, que permanecem mesmo depois que  $\vec{E}_{ext}$  é retirado. Entretanto, esta não é a situação mais comum, na qual as alterações causadas por  $\vec{E}_{ext}$  são reversíveis: tirada a perturbação externa, o sistema volta a ser o que era antes. Isto indica a existência de forças entre os componentes do dielétrico que tendem a puxá-los de volta para a situação de equilíbrio. Por este motivo, tais forças são chamadas de *forças restauradoras*. Neste aspecto, a matéria que constitui o dielétrico é análoga a uma mola, que tende a buscar novamente o equilíbrio, depois de esticada ou comprimida.

### • molas matemáticas

A analogia entre dielétricos polarizados e molas é bem mais do que uma mera coincidência, pois ela é sustentada por razões matemáticas bastante sólidas. A seguir, esboçamos tais razões para o caso de uma deformação unidimensional.

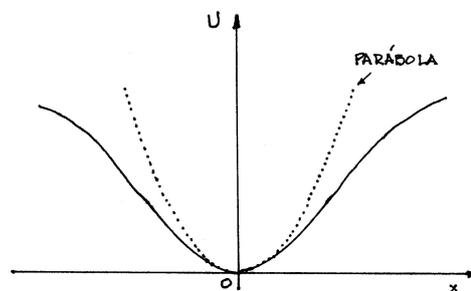


Figura 33.4:

1. Sistemas aglomerados envolvem forças conservativas e atrativas. Por isso, a energia potencial  $U$  destes sistemas tem a forma de um poço, como o mostrado na figura 33.4, onde a coordenada  $x$  representa o tamanho das deformações, dos desvios da posição de equilíbrio.
2. Na situação de equilíbrio o sistema não é deformado e a sua energia potencial é a menor possível, o que ocorre em  $x = 0$ . Por isso, deformações são sempre acompanhadas por *aumentos* de energia potencial.
3. Em cada ponto, a força restauradora  $F$ , que tende a trazer de volta o sistema à posição de equilíbrio, está relacionada à energia potencial por

$$F = -\frac{dU}{dx}. \quad (33.3)$$

4. A forma do poço de potencial da figura 33.4 depende do particular material dielétrico considerado. Se o material fosse outro, a forma seria outra. Entretanto, nas vizinhanças do ponto de equilíbrio, para valores pequenos de  $x$ , o problema tem algumas características universais. Isto acontece porque, para pequenas deformações, a função  $U(x)$  é muito bem descrita pelos primeiros termos da sua série de Taylor. Formalmente, esta série é escrita

como

$$U(x) = U(0) + x \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=0} + \frac{x^2}{2!} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=0} + \frac{x^3}{3!} \left. \frac{d^3U}{dx^3} \right|_{x=0} + \dots, \quad (33.4)$$

o que corresponde a uma força restauradora dada por

$$F(x) = - \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=0} - x \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=0} - \frac{x^2}{2!} \left. \frac{d^3U}{dx^3} \right|_{x=0} + \dots. \quad (33.5)$$

5. Na posição de equilíbrio,  $x = 0$ , a força restauradora é nula, o que nos permite concluir que

$$\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=0} = 0. \quad (33.6)$$

A mesma conclusão poderia ser obtida notando que  $dU/dx$  representa a inclinação da tangente à curva e que, no ponto de mínimo, esta inclinação é nula.

6. Em muitos problemas, a força restauradora é aproximada por uma função linear de  $x$  e escrita como

$$F = -kx, \quad (33.7)$$

sendo  $k$  uma constante que vale

$$k = \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=0}. \quad (33.8)$$

Assim, para pequenas deformações, um dielétrico polarizado é matematicamente análogo a uma mola. Esta analogia vai deixando de valer à medida que as deformações se tornam maiores, pois os termos proporcionais a potências mais altas de  $x$  na eq. (33.5) podem se tornar importantes.

7. A energia potencial de uma mola é dada por

$$U = \frac{1}{2}kx^2, \quad (33.9)$$

e na figura 33.4 podemos observar que, para pequenos valores de  $x$ , esta parábola é praticamente coincidente com a função  $U(x)$ . Assim, também no caso da energia potencial, fica clara a proximidade entre os comportamentos do dielétrico e de uma mola, para pequenas deformações.

### • susceptibilidade elétrica

Um campo elétrico  $\vec{E}$ , no interior de um dielétrico, provoca deformações nas suas estruturas, caracterizadas por um deslocamento  $\vec{\Delta}$  entre  $\rho_-$  e  $\rho_+$ . Por isso, no espírito das

molhas matemáticas, é costume supor uma relação linear entre  $\vec{E}$  e  $\vec{\Delta}$ . Esta é uma relação local, pois se aplica a qualquer ponto  $P$  no interior do dielétrico, e é escrita como

$$\rho_+ \vec{\Delta} = \chi_E \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (33.10)$$

onde  $\rho_+$  é a densidade de cargas positivas,  $\vec{\Delta}$  é o deslocamento relativo entre  $\rho_-$  e  $\rho_+$ ,  $\chi_E$  é a *susceptibilidade elétrica* e  $\vec{E}$  é o campo elétrico **resultante** no ponto  $P$ .

A susceptibilidade  $\chi_E$  é um parâmetro característico do material, que quantifica sua resposta ao campo. O seu valor é *sempre positivo* e, para os vários materiais, existem desde susceptibilidades muito pequenas, próximas de zero, até muito grandes, da ordem de 100.

Finalmente, é preciso enfatizar:  $\vec{E}$  não é o campo externo aplicado à amostra. Considere, por exemplo, a região em torno do ponto  $A$  no interior do grão de arroz da figura 33.1. É impossível para as moléculas naquele ponto distinguirem entre o campo  $\vec{E}_{ext}$  criado pela carga  $Q$  e o campo induzido  $\vec{E}_{ind}$ , criado pelas cargas na superfície do grão. Por isso, elas somente podem reagir ao campo resultante  $\vec{E} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{ind}$  naquele ponto. Deste modo, o que acontece em um ponto do dielétrico depende do que acontece em todos os outros pontos dele, porque o deslocamento de cargas num ponto depende dos deslocamentos de todas as outras cargas do sistema. Visto deste modo, fica claro que estamos em presença de um fenômeno bastante complexo.

Existem, porém, situações onde o problema se simplifica. Algumas dessas situações são discutidas a seguir, por meio de exemplos.

### • exemplo 1: capacitor plano com dielétrico: campos e cargas

É dado um capacitor plano, de placas circulares de raio  $R$ , separadas pela distância  $d$ ,  $d \ll R$ , e carregadas com cargas  $+Q$  e  $-Q$ . Entre as placas desse capacitor é colocada uma lâmina de material dielétrico, de susceptibilidade  $\chi_E$ , espessura  $e < d$ , equidistante das placas, como mostra a figura 33.5. O nosso problema consiste em calcular o campo elétrico em todo o espaço e as cargas induzidas nas superfícies do dielétrico.

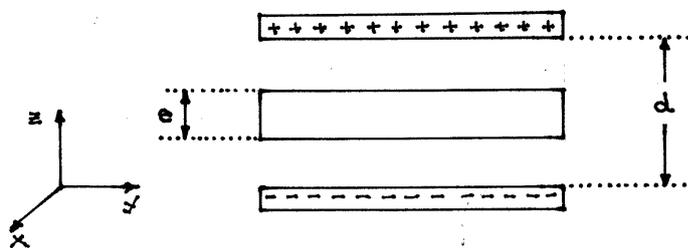


Figura 33.5:

Quando o dielétrico não está presente, o campo no interior do capacitor pode ser calculado

supondo suas placas como sendo infinitas, e vale

$$\vec{E}_Q = -E_Q \vec{k}, \quad (33.11)$$

$$E_Q = \frac{\sigma_Q}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\pi R^2 \varepsilon_0}. \quad (33.12)$$

Ao introduzirmos o dielétrico, ocorre uma indução de cargas nas suas superfícies, gerando uma densidade superficial  $\sigma_{ind} < \sigma_Q$ , a ser determinada como uma função de  $\chi_E$ .

A simetria do problema permite-nos concluir que  $\sigma_{ind}$  é uniforme sobre as superfícies do dielétrico, levando à situação da figura 33.6.

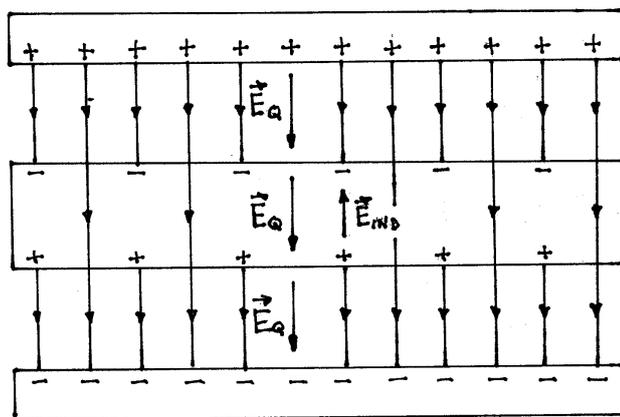


Figura 33.6:

O raio  $R$  da lâmina dielétrica é muito maior do que sua espessura e, por isso, podemos calcular  $\vec{E}_{ind}$  pensando em superfícies infinitas. Assim, concluímos que o campo induzido é nulo fora do dielétrico e, no seu interior vale

$$\vec{E}_{ind} = \frac{\sigma_{ind}}{\varepsilon_0} \vec{k}. \quad (33.13)$$

O campo resultante no interior do capacitor é, portanto, dado por

$$\vec{E} = \vec{E}_Q = -\frac{\sigma_Q}{\varepsilon_0} \vec{k} = -\frac{Q}{\pi R^2 \varepsilon_0} \vec{k} \quad \text{fora do dielétrico} \quad (33.14)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_Q + \vec{E}_{ind} = \left[ -\frac{\sigma_Q}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma_{ind}}{\varepsilon_0} \right] \vec{k} \quad \text{dentro do dielétrico} \quad (33.15)$$

No interior do dielétrico, o campo  $\vec{E}$ , dado pela eq.(33.15), é uniforme e provoca deslocamentos das densidades de carga  $\rho_-$  e  $\rho_+$  do dielétrico, como mostra a figura 33.7, onde a escala do deslocamento  $\Delta$  está muito exagerada.

Para terminar o problema, usamos a eq. (33.10). No presente problema, como  $\vec{E}$  é uniforme, todas as cargas negativas do dielétrico deslocam-se de uma quantidade  $\Delta$  para cima, relativamente às cargas positivas. Este deslocamento expõe cargas negativas na

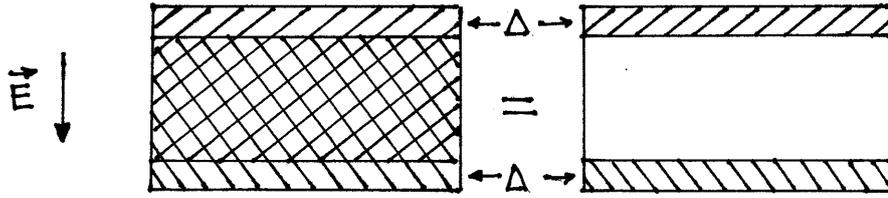


Figura 33.7:

superfície superior e cargas positivas na superfície inferior, cuja quantidade total é dada por

$$q_{ind} = \rho \pi R^2 \Delta, \quad (33.16)$$

onde  $\pi R^2 \Delta$  é o volume ocupado pelas cargas expostas. Como o deslocamento  $\Delta$  é muito pequeno, podemos também escrever

$$q_{ind} = \sigma_{ind} \pi R^2, \quad (33.17)$$

com,

$$\sigma_{ind} = \rho \Delta. \quad (33.18)$$

Usando a eq. (33.10), temos

$$\rho \Delta = \sigma_{ind} = \chi_E \varepsilon_0 E. \quad (33.19)$$

Substituindo esse resultado na eq. (33.15), obtemos, em módulo,

$$E = \frac{\sigma_Q}{\varepsilon_0} - \chi_E E \rightarrow (1 + \chi_E) E = \frac{\sigma_Q}{\varepsilon_0}, \quad (33.20)$$

e o campo no interior do dielétrico é dado por

$$\vec{E} = -\frac{1}{(1 + \chi_E)} \frac{Q}{\pi R^2 \varepsilon_0} \vec{k}. \quad (33.21)$$

Substituindo esse resultado na eq. (33.19), obtemos a densidade de cargas induzidas

$$\sigma_{ind} = \frac{\chi_E}{1 + \chi_E} \sigma_Q = \frac{\chi_E}{1 + \chi_E} \frac{Q}{\pi R^2}. \quad (33.22)$$

Assim, a carga total induzida vale

$$Q_{ind} = \sigma_{ind} \pi R^2 = \frac{\chi_E}{1 + \chi_E} Q. \quad (33.23)$$

As equações (33.21-33.23) são as resposta ao nosso problema, a elas estão resumidas na figura 33.8.

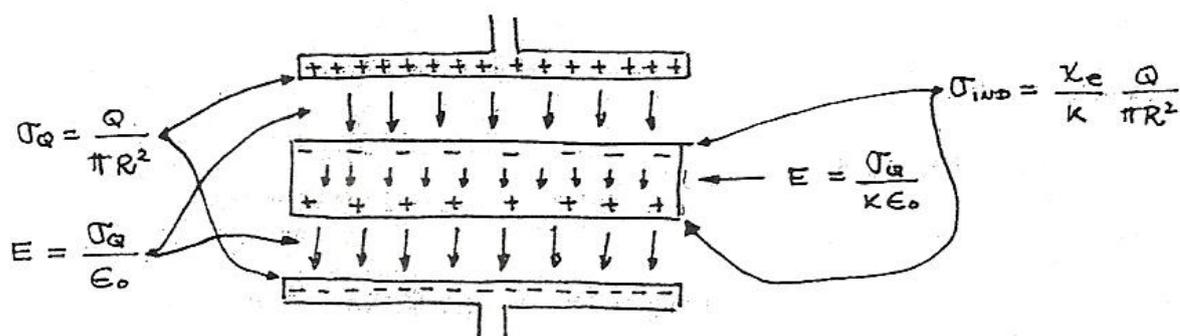


Figura 33.8:

### • a escala das deformações

No processo de polarização, as deformações de um dielétrico são caracterizadas pelo deslocamento  $\Delta$ , introduzido na eq. (33.10). O seu valor varia de um caso para outro e, para estimar a sua ordem de grandeza, tomamos o caso de um capacitor de placas planas, separadas por  $d = 1 \text{ mm}$  e sujeitas a uma tensão de  $1.000 \text{ V}$ . Se o capacitor estivesse vazio, esta tensão corresponderia a um campo elétrico  $E_0 = V/d = 10^6 \text{ V/m}$ . Caso ele esteja totalmente preenchido por um dielétrico de susceptibilidade  $\chi_E$ , o campo no seu interior, dado pel eq.(33.21), passa a ser  $E = E_0/(1 + \chi_E)$ . Para usar este resultado na eq. (33.10), é preciso estimar o valor de  $\rho$ . Esta densidade é dada por  $\rho = e N$ , onde  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$  é o módulo da carga do elétron e  $N$  é a densidade volumétrica de elétrons na matéria, que é da ordem do número de Avogadro. Nós, aqui, supomos  $N \sim 10^{30} \text{ elétrons/m}^3$ . Sabendo que  $\epsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12} \text{ C/(Vm)}$ , escrevemos

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\chi_E}{1 + \chi_E} \frac{1}{\rho} \epsilon_0 E \\ &= \frac{\chi_E}{1 + \chi_E} \times \frac{1}{1,6 \times 10^{11}} \frac{\text{m}^3}{\text{C}} \times 8,9 \times 10^{-12} \frac{\text{C}}{\text{Vm}} \times 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}} \simeq \frac{\chi_E}{1 + \chi_E} \times 5 \times 10^{-17} \text{ m}. \end{aligned}$$

Como  $0 < \chi_E/(1 + \chi_E) < 1$ , a escala de  $\Delta$  é da ordem de um centésimo do raio do próton, que é da ordem de  $10^{-15} \text{ m}$ . Ou seja, as deformações associadas à polarização são, de fato, muito pequenas!

### • exemplo 2: capacitor plano com dielétrico: diferença de potencial

A diferença de potencial entre as placas do capacitor estudado no exemplo 1 é dada por

$$V = \frac{\sigma_Q}{\epsilon_0} \left[ d - e + \frac{e}{(1 + \chi_E)} \right] = \frac{Q}{\pi R^2 \epsilon_0} \left[ d - \frac{\chi_E e}{(1 + \chi_E)} \right]. \quad (33.22)$$

É interessante comparar este resultado com o que seria obtido com o mesmo capacitor

vazio. Para eliminar o dielétrico, basta fazer  $e \rightarrow 0$ , e encontramos

$$V_0 = \frac{\sigma_Q}{\varepsilon_0} d = \frac{Q}{\pi R^2 \varepsilon_0} d, \quad (33.23)$$

e a diferença

$$V - V_0 = -\frac{\sigma_Q}{\varepsilon_0} \frac{\chi_E e}{1 + \chi_E} = -\frac{Q}{\pi R^2 \varepsilon_0} \frac{\chi_E e}{1 + \chi_E} \quad (33.24)$$

é negativa. Ou seja, para a mesma carga  $Q$ , a diferença de potencial entre as placas do capacitor é menor quando ele é preenchido por um dielétrico, e será tanto menor quanto maior for a sua espessura. A explicação para este fato é que, no volume ocupado pelo dielétrico, o campo  $\vec{E}$ , eq. (33.21), é menor do que o do vácuo. Esta diferença é proporcional a  $e$  e, por isso, ela aumenta à medida que a espessura do dielétrico cresce.

A capacitância do capacitor, também, depende do tipo e da espessura do dielétrico considerado. Ela é dada por

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\pi R^2 \varepsilon_0}{d - e \chi_E / (1 + \chi_E)}. \quad (33.25)$$

### • exemplo 3: capacitor plano com dielétrico: energia

Consideramos, novamente, o capacitor do exemplo 1, com o intuito de estudar como a energia eletrostática está distribuídas no seu interior. Neste capacitor, os campos são uniformes na várias regiões. Por isso, o cálculo da energia é relativamente simples e, para as contribuições dos campos, usamos a densidade volumétrica, dada por  $dU/dV = \varepsilon_0 \vec{E}^2/2$ .

Usando a eq. (33.14), obtemos a energia contida entre as placas do capacitor, mas fora do dielétrico, que é dada por

$$U = \frac{Q^2}{2\pi R^2 \varepsilon_0} (d - e). \quad (33.26)$$

No interior do dielétrico, existem *dois tipos* de energia potencial. Um deles,  $U_E$ , é devido diretamente ao campo elétrico  $\vec{E}$  existente nesta região e o outro,  $U_P$ , é devido ao fato de o dielétrico estar deformado. A contribuição do campo é dada por

$$U_E = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 [\pi R^2 e] \quad (33.27)$$

onde  $\vec{E}$  é dado pela eq. (33.21).

Para calcular  $U_P$ , pensamos no dielétrico deformado como uma mola matemática e, usando a eq. (33.9), escrevemos

$$U_P = \frac{1}{2}k\Delta^2. \quad (33.28)$$

A constante  $k$  é determinada explorando a compatibilidade entre as eqs. (33.7) e (33.10). Para tanto, notamos que o campo  $\vec{E}$ , que aparece nesta última, é responsável pela força que desloca uma densidade de cargas relativamente à de sinal oposto. Por isso, neste exemplo, a resultante das forças que agem em todas as cargas de um dado sinal é, em módulo

$$F = E \times [\sigma\pi R^2 e]. \quad (33.29)$$

Usando a eq.(33.10), obtemos

$$F = \frac{\rho\Delta}{\chi_E\epsilon_0} [\rho\pi R^2 e] = \frac{\rho^2\pi R^2 e}{\chi_E\epsilon_0} \Delta. \quad (33.30)$$

Comparando com a eq. (33.7), concluímos que

$$k = \frac{\rho^2\pi R^2 e}{\chi_E \epsilon_0} \quad (33.31)$$

e que, portanto,

$$U_P = \frac{1}{2} \frac{\rho^2\pi R^2 e}{\chi_E \epsilon_0} \Delta^2 \quad (33.32)$$

Este resultado pode ser reexpresso em termos do campo  $E$ , por meio da eq. (33.10), e obtemos

$$U_P = \chi_E \frac{\epsilon_0}{2} E^2 [\pi R^2 e]. \quad (33.33)$$

A energia potencial *no interior* do dielétrico é dada pela soma das eqs. (33.27) e (33.33) e vale

$$U = (1 + \chi_E) \frac{\epsilon_0}{2} E^2 [\pi R^2 e] \quad (33.34)$$

A eq. (33.22) permite-nos escrever

$$U = \frac{Q^2}{2\pi R^2 \epsilon_0} \frac{e}{1 + \chi_E}. \quad (33.35)$$

Finalmente, somando eqs. (33.26) e (33.35), obtemos a energia potencial total contida no capacitor, que é dada por

$$U = \frac{Q^2}{2\pi R^2 \epsilon_0} \left[ d - \frac{e \chi_E}{1 + \chi_E} \right]. \quad (33.36)$$

Para comparar este resultado com o correspondente ao capacitor vazio, fazemos  $e \rightarrow 0$  e temos

$$U_0 = \frac{Q^2}{2\pi R^2 \varepsilon_0} d. \quad (33.37)$$

A diferença de energia  $U - U_0$ , associada à presença do dielétrico, vale

$$U - U_0 = -\frac{Q^2}{2\pi R^2 \varepsilon_0} \frac{e \chi_E}{1 + \chi_E} \quad (33.38)$$

e é negativa, indicando que a sua introdução no capacitor diminui a energia potencial do sistema.

#### • exemplo 4: capacitor ligado a bateria

Neste exemplo, consideramos o mesmo capacitor dos exemplos anteriores, mas supomos, agora, que ele esteja continuamente ligado a uma bateria de tensão  $V$ . Inicialmente, o capacitor está vazio e, em seguida, o mesmo dielétrico é introduzido entre as placas.

Nos exemplos anteriores, a carga  $Q$  do capacitor era uma constante dada e, por isso, a introdução do dielétrico causava uma variação da tensão entre as placas, indicada pelas eqs. (33.22) e (33.23). A novidade, neste caso, é que a tensão é fixa e as cargas variam. Nós, aqui, queremos determinar estas cargas.

No caso do capacitor vazio, a carga  $Q_0$  nas placas pode ser obtida a partir da eq. (33.37), e encontramos

$$Q_0 = \frac{\pi R^2 \varepsilon_0}{d} V. \quad (33.39)$$

Quando o dielétrico está presente, usamos a eq. (33.22), que fornece

$$Q = \frac{\pi R^2 \varepsilon_0}{d - e \chi_E / (1 + \chi_E)} V. \quad (33.40)$$

Como  $d - e \chi_E / (1 + \chi_E) < d$ , concluímos que  $Q > Q_0$ , ou seja, com a bateria ligada, a introdução do dielétrico aumenta as cargas nas placas do capacitor. No caso de todo o espaço no interior estar preenchido pelo dielétrico, que corresponde a  $e = d$ , encontramos

$$Q = (1 + \chi_E) Q_0. \quad (33.41)$$

A discussão de outros detalhes deste problema é deixada para os exercícios.

#### • exercícios

1. Na situação do exemplo 1, a carga induzida no dielétrico pode ser maior do que a carga no capacitor? Justifique a sua resposta.

2. A susceptibilidade elétrica de uma substância  $A$  é maior que a da substância  $B$ ; qual delas fica mais polarizada quando introduzida no interior do capacitor? Justifique sua resposta do ponto de vista físico.

3. A discussão feita no exemplo 1 refere-se a uma lâmina de dielétrico, de susceptibilidade  $\chi_E$ .

a) O que muda naquela discussão se o dielétrico foi substituído por uma placa metálica?

b) Do ponto de vista formal, os resultados para o caso do metal podem ser obtidos a partir dos do dielétrico?

4. Alguém abandona uma lâmina de dielétrico meio inserida em um capacitor carregado, como mostra a figura 33.9. A tendência do dielétrico é entrar ou sair do capacitor?

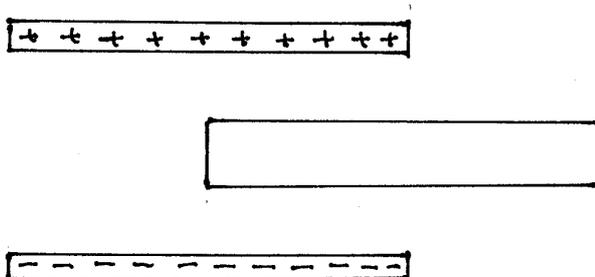


Figura 33.9:

5. No estudo de circuitos, usamos a expressão  $U = Q^2/2C$  para a energia de um capacitor, onde  $C$  é a sua capacitância. Use esta expressão para obter a capacitância  $C$  a partir da eq. (33.36). Compare o seu resultado com a eq. (33.25).

6. No caso do exemplo 4, determine o valor do campo elétrico:

a) no interior do capacitor, mas fora do dielétrico;

b) no interior do dielétrico;

c) mostre que os resultados anteriores, de fato, correspondem a uma diferença de potencial  $V$  entre as placas do capacitor.

### • respostas

1. Não; veja a eq. (33.22).

2. A substância  $A$  fica mais polarizada.

3. a) O campo resultante no interior do metal passa a ser nulo.

b) Sim, fazendo  $\chi_E \rightarrow \infty$ .

4. O dielétrico é atraído para dentro do capacitor pois, nesta configuração, a energia potencial do sistema é mais baixa. Compare as eqs. (33.36) e (33.37).

6. a)  $E = \frac{V}{d - e \frac{\chi_E}{1 + \chi_E}}$       b)  $E = \frac{V}{d + \chi_E(d - e)}$ .

# Capítulo 34

## um dielétrico esférico

As propriedades elétricas de um capacitor preenchido por um dielétrico, tais como capacitância e energia acumulada, dependem do material envolvido, através da sua susceptibilidade  $\chi_E$ . O propósito desta aula é evidenciar, por meio de um exemplo, que estas propriedades dependem, também, da forma da amostra dielétrica, da sua geometria

### • a esfera dielétrica

Consideramos, novamente, o capacitor plano, de placas circulares de raio  $R$ , separadas pela distância  $d$ ,  $d \ll R$ , e carregado com carga  $Q$ , do exemplo 1 da aula anterior. Entretanto, ao invés da placa dielétrica, colocamos em seu interior uma esfera de mesmo material, com raio  $a$ ,  $a < d/2$ . Vamos ver que, neste caso, o campo no interior da esfera é diferente do campo no interior da placa plana, porque as cargas induzidas nas superfícies destas duas amostras são diferentes. Assim, este exemplo mostra que o campo no interior de um corpo dielétrico depende não somente do material de que ele é feito mas, também, da sua forma geométrica.

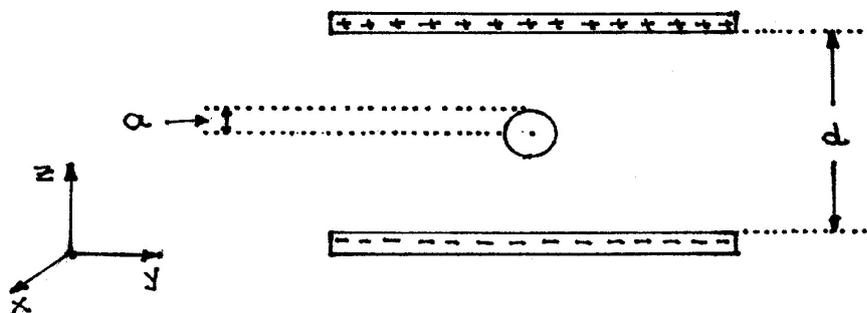


Figura 34.1: Esfera dielétrica entre as placas de um capacitor

Ao introduzirmos a esfera no campo do capacitor, como na figura 34.1, este polariza

seus átomos e moléculas, fazendo com que apareçam cargas negativas na sua face superior e cargas positivas na sua face inferior. Essas cargas induzidas, por sua vez, criam um campo induzido  $\vec{E}_{ind}$  em todo o espaço, tanto dentro como fora da esfera. Como o campo da esfera não é uniforme, ele age de modo diferente sobre as várias cargas das placas do capacitor, fazendo com que a densidade de carga em cada placa não seja mais a mesma em todos os seus pontos. Por isso, o campo criado pelas placas deixa de ser o dado pelas eqs. (33.11) e (33.12), e o problema fica bastante complicado. Para evitar estas complicações, supomos que a esfera esteja equidistante das placas do capacitor e que o seu raio  $a$  seja pequeno quando comparado a  $d$ , de modo que a influência da esfera sobre as placas possa ser desprezada.

Além disso, supomos que as deformações do dielétrico ocorram apenas na direção vertical, o que é equivalente a dizer que a densidade de carga negativa se desloca para cima, sem perder a forma esférica, como mostra a figura 34.2. Deste modo, o problema de calcular  $\vec{E}_{ind}$  reduz-se ao cálculo do campo elétrico criado por duas esferas carregadas, de cargas opostas, e parcialmente superpostas, já que seus centros estão separados pela distância  $\Delta$ , onde  $\Delta \ll a$ .

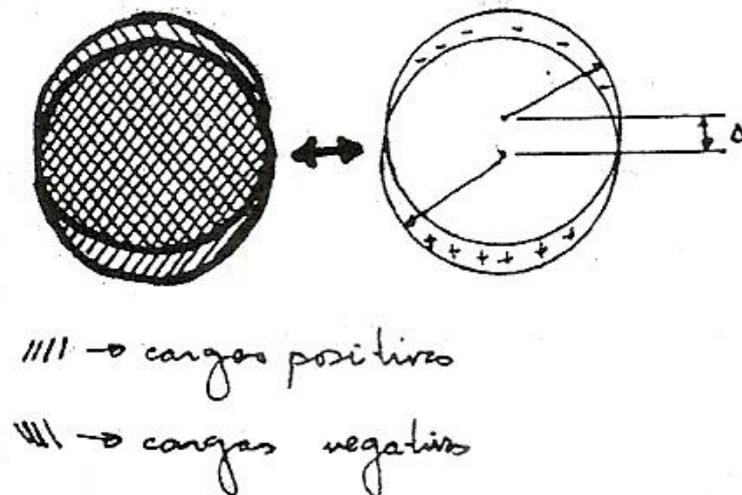


Figura 34.2: Deslocamento das cargas da esfera dielétrica

#### • cálculo de $\vec{E}_{ind}$

Para efetuar este cálculo, tomamos um sistema de coordenadas com origem sobre o centro da esfera positiva. Desejamos calcular  $\vec{E}_{ind}$  no ponto  $P$ , que tem coordenadas genéricas  $(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$ .

Consideramos, inicialmente, a distribuição positiva, cuja densidade de carga é  $\rho_+ = \rho$ . Usando a lei de Gauss, obtemos o seu campo elétrico, tanto para pontos *dentro* como *fora*

da esfera, que é dado por

$$\vec{E}_+ = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} \quad \longrightarrow \quad \text{dentro ,} \quad (34.1)$$

$$= \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{r^3} \vec{r} \quad \longrightarrow \quad \text{fora .} \quad (34.2)$$

O campo da distribuição negativa é obtido a partir deste resultado, usando  $\rho_- = -\rho$  e fazendo  $\vec{r} \rightarrow \vec{r} - \Delta\vec{k}$ , para incorporar o deslocamento da sua origem. Assim

$$\vec{E}_- = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r} - \Delta\vec{k}) \quad \longrightarrow \quad \text{dentro ,} \quad (34.3)$$

$$= -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{|\vec{r} - \Delta\vec{k}|^3} (\vec{r} - \Delta\vec{k}) \quad \longrightarrow \quad \text{fora .} \quad (34.4)$$

O campo  $\vec{E}_{ind}$  é, então, dado por

$$\begin{aligned} \vec{E}_{ind} &= \vec{E}_+ + \vec{E}_- \\ &= \frac{\rho}{3\epsilon_0} \Delta\vec{k} \quad \longrightarrow \quad \text{dentro ,} \end{aligned} \quad (34.4)$$

$$= \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{(\vec{r} - \Delta\vec{k})}{|\vec{r} - \Delta\vec{k}|^3} \right] \quad \longrightarrow \quad \text{fora .} \quad (34.5)$$

Este resultado mostra que, no interior da esfera,  $\vec{E}_{ind}$  tem o mesmo módulo, direção e sentido em todos os pontos do dielétrico. Em outras palavras, ele é uniforme nesta região, e aponta no sentido oposto ao do campo externo. Outra característica importante de  $\vec{E}_{ind}$  é que ele é proporcional a  $\Delta$ , o deslocamento relativo entre as densidades de carga negativa e positiva.

O valor do campo no exterior da esfera também é proporcional a  $\Delta$ . Para deixar isto claro, usamos o fato que este deslocamento é muito pequeno e consideramos apenas termos lineares em  $\Delta$ , nas igualdades aproximadas,

$$|\vec{r} - \Delta\vec{k}| \cong \sqrt{r^2 - 2\Delta r \cos\theta} = r \sqrt{1 - 2\Delta \cos\theta / r}, \quad (34.6)$$

e

$$\frac{1}{|r - \Delta\vec{k}|^3} \cong \frac{1}{r^3 \left[ 1 - 2\Delta \cos\theta / r \right]^{3/2}} \cong \frac{1}{r^3} \left[ 1 + \frac{3\Delta \cos\theta}{r} \right]. \quad (34.7)$$

Substituindo o resultado (34.7) na eq.(34.5), obtemos

$$\vec{E}_{ind} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{r^3} \Delta \left[ \vec{k} - 3 \cos\theta \frac{\vec{r}}{r} \right] \quad \longrightarrow \quad \text{fora .} \quad (34.8)$$

• o campo resultante no interior do dielétrico

O campo resultante  $\vec{E}$  dentro do dielétrico é dado pela soma dos campos  $\vec{E}_{ext}$ , criado pelo capacitor, com  $\vec{E}_{ind}$ , eq.(34.4). Assim, quando a esfera é muito pequena,

$$\vec{E} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{ind} = -E \vec{k}, \quad (34.9)$$

$$E = \frac{Q}{\pi R^2 \varepsilon_0} - \frac{\rho \Delta}{3\varepsilon_0}. \quad (34.10)$$

Usando a eq.(33.10) para eliminar  $\rho \Delta$ , obtemos

$$E = \frac{Q}{\pi R^2 \varepsilon_0} - \frac{\chi_E}{3} E \quad (34.11)$$

e, portanto,

$$\vec{E} = -\frac{1}{(1 + \chi_E/3)} \frac{Q}{\pi R^2 \varepsilon_0} \vec{k}. \quad (34.12)$$

Este resultado, válido para o interior da esfera dielétrica, deve ser comparado com a eq. (33.21), obtida para uma placa plana. Os termos proporcionais a  $\chi_E$  são diferentes nos dois casos, indicando que a forma do dielétrico influi decisivamente no modo como ele responde ao campo externo.

• exercícios

1. A partir da eq. (34.8), desenhe os vetores que representam o campo  $\vec{E}_{ind}$  criado pela esfera dielétrica na sua região externa, ao longo de uma circunferência de raio  $r > a$ , sobre o plano  $yz$ , variando  $\theta$  em passos de  $30^\circ$ , no intervalo  $0 \leq \theta \leq 360^\circ$ . Verifique a compatibilidade entre o seu desenho e a distribuição de cargas na superfície do dielétrico.

2. Mostre que a densidade superficial de cargas sobre a esfera dielétrica é dada por  $\sigma_{ind} = -\rho \Delta \cos\theta$ . Sugestão: use a lei de Gauss, para uma superfície gaussiana na forma de um cilindro com eixo paralelo à normal à superfície e altura muito pequena, metade dentro e metade fora do dielétrico. Mostre que a expressão para  $\sigma_{ind}$  descreve bem a situação mostrada na figura 34.2 para todos os valores de  $\theta$  entre 0 e  $2\pi$ .

# Capítulo 35

## ondas em meios materiais: condutores

### • óptica e eletromagnetismo

O estudo dos fenômenos ópticos vem sendo feito há vários milênios e recebeu importantes contribuições de gregos e árabes. Na Europa do século 16, a óptica já era reconhecida como disciplina independente e a publicação, por Newton, do seu *Optics: or a treatise on the reflexions, refractions, inflexions and colours of light*, em 1704, é uma clara indicação de maturidade. Mesmo assim, muitos fenômenos da óptica somente puderam ser compreendidos quando ela foi incorporada pelo eletromagnetismo, no fim do século 19.

Como mencionamos na aula 14, existem três abordagens tradicionais e complementares para a explicação de fenômenos ópticos. A primeira delas corresponde à *óptica geométrica*, apoiada no conceito de raio de luz, que enfatiza apenas as direções de propagação das ondas luminosas. Raios de luz, ainda que não existam na natureza como entidades autônomas, são úteis quando estudamos problemas envolvendo reflexão e refração, em espelhos, lentes, vidro, água ou vários outros meios. A óptica geométrica tem, entretanto, importantes limitações e não permite, por exemplo, compreender fenômenos de interferência em difrações por fendas, como os discutidos nas aulas 14-16.

De modo geral, fenômenos de interferência são característicos de quaisquer ondas, sejam elas sejam elas luminosas, sonoras ou mecânicas, em sólidos e em superfícies de água. Fenômenos ondulatórios envolvem fases e superposições de efeitos com fases diferentes, regidos pelo princípio de Huygens. Estas idéias permitem explicar os padrões de distribuição de energia em regiões nas quais duas ou mais ondas coexistem. No caso particular da luz, a *óptica ondulatória* é mais geral do que a óptica geométrica porque, além de descrever as direções de propagação, incorpora as fases. Ela foi bastante estudada na primeira metade do século 19, o que permitiu a explicação de um número muito grande de fenômenos. Apesar disto, este tipo de abordagem também tem limitações.

Uma das principais diz respeito ao modo como muitos fenômenos dependem da frequência das ondas envolvidas. Por exemplo, como explicar porque, em um prisma, a luz azul é desviada de modo diferente da vermelha? Podemos estar acostumados a atribuir este tipo de diferença à existência de vários índices de refração. Neste caso, entretanto, porque estes índices de refração dependem da frequência da luz? Respostas a este tipo de questão somente puderam ser produzidas com o desenvolvimento da chamada *óptica física*, na qual o eletromagnetismo é acoplado ao conhecimento mais detalhado da estrutura microscópica da matéria.

A incorporação da óptica ao eletromagnetismo foi acompanhada por uma grande generalização, pois ela não ficou restrita apenas a fenômenos visíveis e foi estendida a todo o espectro de ondas eletromagnéticas.

### • meios materiais

Ondas eletromagnéticas podem se propagar em uma variedade enorme de meios diferentes: em sólidos, como vidro, concreto, metais, em líquidos como água pura ou água do mar, em gases como o ar ou em plasmas, como a ionosfera. E, também, em seres vivos. Como as estruturas microscópicas desses vários meios são muito diferentes entre si, o mesmo acontece com os comportamentos das ondas eletromagnéticas no interior desses tipos de matéria.

Alguns dos fenômenos mais interessantes envolvendo ondas ocorrem quando elas passam de um meio para outro. Em geral, quando uma onda que se propaga em um dado meio incide sobre a interface com um outro, parte da sua energia é refletida de volta e parte é transmitida e segue em frente. Como sabemos da prática, as proporções relativas entre estes dois tipos de energia variam enormemente, dependendo dos materiais e frequências envolvidas.

Por exemplo, quando luz branca é atirada, a partir do ar, sobre uma lâmina de vidro, sabemos que a energia transmitida é relativamente maior do que a refletida e, por isso, o vidro é transparente. Por outro lado, esta situação se inverte quando radiação infravermelha incide sobre o vidro, porque ele é predominantemente opaco para ondas nesta região de frequência. Em uma sala de aula, se uma lousa nos parece verde quando iluminada com luz branca, é porque apenas a luz verde é refletida e volta até nossos olhos. O que acontece com as outras cores contidas na luz branca? Porque nossos corpos são mais transparentes aos raios X do que à luz visível?

Para descrever estes e muitos outros fenômenos, é preciso considerar dois aspectos complementares da questão. Um deles, envolve o comportamento de ondas eletromagnéticas no interior profundo de cada meio material e, o outro, os efeitos das cargas e correntes que estas ondas induzem nas interfaces que separam um meio do outro.

## • ondas em meios materiais

O ponto de partida para o estudo de ondas em meios materiais, sejam eles condutores ou dielétricos, são as equações de Maxwell, que têm a forma geral

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (35.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (35.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (35.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (35.4)$$

Este conjunto de equações difere daquele usado no caso da propagação de ondas no vácuo pela presença das densidades de carga e corrente. Qualquer meio material é formado por partículas positivas e negativas, que correspondem a densidades de cargas  $\rho_-$  e  $\rho_+$ . Por isso, quando há uma onda eletromagnética no *interior* de um meio, os seus campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  causam forças sobre estas cargas, dadas pela força de Lorentz  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ . Como as velocidades dos elétrons no interior da matéria são, em geral, muito menores do que a da luz, as forças devidas a  $\vec{B}$  são muito pequenas quando comparadas com as devidas a  $\vec{E}$  e podem ser desprezadas.

Deste modo, o efeito mais importante que uma onda produz em um meio material é o deslocamento relativo entre as densidades  $\rho_-$  e  $\rho_+$ . Tal como acontece no caso de campos elétricos estáticos, estes deslocamentos são muito pequenos e não alteram a condição de neutralidade local,

$$\rho = \rho_- + \rho_+ = 0, \quad (35.5)$$

a ser usada na eq. (35.1).

Como o campo elétrico oscila com o tempo e causa forças opostas nas densidades  $\rho_-$  e  $\rho_+$ , o movimento relativo entre elas é também oscilatório e corresponde a correntes. Consequentemente, o estudo do comportamento de ondas no interior de meios materiais se reduz ao do processo  $\vec{F} = -e\vec{E} \rightarrow \vec{j}$ , pelo qual o campo  $\vec{E}$  da onda age nas cargas dos elétrons  $-e$ , dando origem a densidades de corrente  $\vec{j}$ , que devem ser usadas na eq. (35.3). Uma relação deste tipo já foi tratada anteriormente, no caso de condutores metálicos, sujeitos a campos elétricos *constant*es, na forma da lei de Ohm microscópica, expressa por

$$\vec{j} = g_0 \vec{E}, \quad (35.6)$$

onde a constante  $g_0$  é a condutividade do metal. Essa lei, válida no caso de correntes contínuas, deve ser modificada quando os campos elétricos dependem do tempo, como os da onda eletromagnética.

Para determinar a nova relação entre o campo elétrico da onda e a densidade de corrente elétrica, usamos o modelo desenvolvido por Paul Drude<sup>1</sup>, no fim do século 19, no qual supomos que o movimento da densidade  $\rho_-$  se dê sob a ação de forças clássicas. Como mostraremos a seguir, este modelo descreve bastante bem o comportamento de ondas eletromagnéticas *no interior* de meios materiais homogêneos, sejam eles condutores ou dielétricos. Para tornar a discussão mais concreta, consideramos um meio material que ocupa todo o volume à direita do plano  $y = 0$ , onde ele tem uma interface com o vácuo, como mostra a figura 35.1. O estudo é feito em torno de um ponto  $P : (x, y, z)$ , profundamente imerso no meio, onde supomos existir uma onda eletromagnética, plana e monocromática, que se propaga na direção  $y$ , cujo campo é escrito como

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(y, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \kappa y) \quad (35.7)$$

onde  $\vec{E}_0$  é a amplitude de onda no ponto  $P$ .

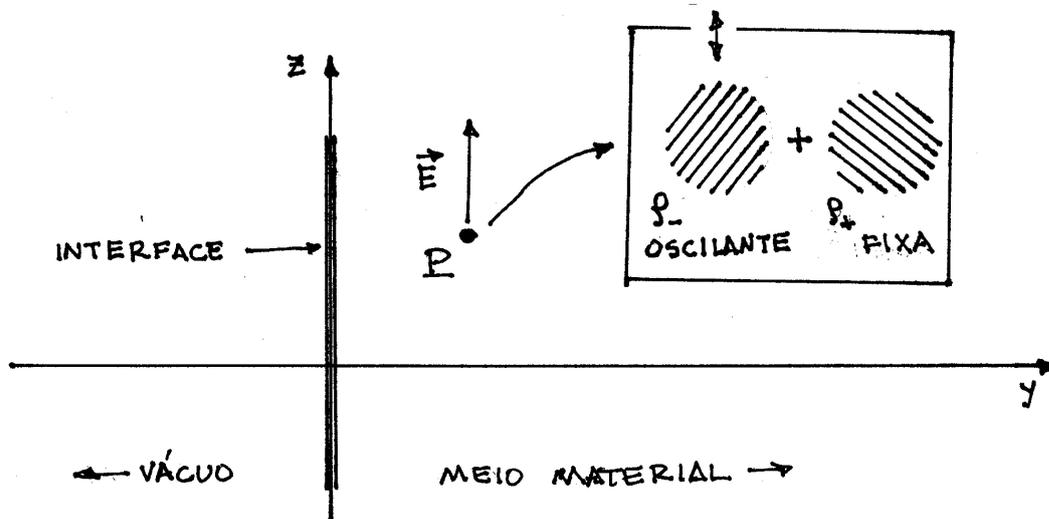


Figura 35.1:

### • modelo de Drude para condutores

Quando existe uma onda eletromagnética no interior de um condutor, o seu campo elétrico age sobre as cargas lá existentes, fazendo com que elas se movam. Em geral, há resistência a esse movimento e parte da energia da onda é dissipada. Ainda que esta discussão possa ser feita para condutores quaisquer, como plasmas ou água do mar, passamos a tratar, especificamente, o caso de metais, onde as partículas móveis são elétrons livres.

<sup>1</sup>Paul Drude - The Theory of Optics - ed. Dover, Estados Unidos, 1959.

• as forças

No modelo de Drude, supomos que os elétrons do metal se movam sob a ação de dois tipos de forças:

1) força devida ao campo elétrico da onda, eq.(35.7):

$$\vec{F}_1 = -e \vec{E}_0 \cos(\omega t - \kappa y) \quad (35.8)$$

onde  $-e$  é a carga do elétron, localizado no ponto  $P$ ;

2) força resistiva ao movimento do elétron:

$$\vec{F}_2 = -b \vec{v} \quad (35.9)$$

onde  $\vec{v}$  é a velocidade do elétron e  $b$  é um coeficiente associado à resistividade do metal. O sinal negativo indica que esta força é sempre oposta ao movimento.

• o movimento do elétron

No modelo de Drude, o deslocamento  $\vec{S}$  de um elétron, em torno da sua posição de equilíbrio, é determinado pela lei de Newton

$$m \frac{d^2 \vec{S}}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad (35.10)$$

onde  $m$  é a massa do elétron. Como as forças são paralelas ao eixo  $z$  da fig. 35.1, o mesmo acontece com  $\vec{S}$  e, por isto, basta considerar a sua parte escalar.

A equação de movimento do elétron é dada por

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = -b \frac{dS}{dt} - e E_0 \cos(\omega t - \kappa y), \quad (35.11)$$

que representa um oscilador forçado. Sua solução tem a forma geral

$$S = A \cos(\omega t - \kappa y + \delta). \quad (35.12)$$

Para determinar os valores das incógnitas  $A$  e  $\delta$ , substituímos esta expressão na eq. (35.11) e obtemos

$$-m \omega^2 A \cos(\omega t - \kappa y + \delta) = b \omega A \sin(\omega t - \kappa y + \delta) - e E_0 \cos(\omega t - \kappa y). \quad (35.13)$$

Usando as expressões dos seno e cosseno da soma de dois ângulos, podemos escrever

$$\begin{aligned} &(-m \omega^2 A \cos \delta - b \omega A \sin \delta + e E_0) \cos(\omega t - \kappa y) \\ &+ (m \omega^2 A \sin \delta - b \omega A \cos \delta) \sin(\omega t - \kappa y) = 0. \end{aligned} \quad (35.13)$$

Para que esta equação seja válida para quaisquer valores de  $t$ , os coeficientes do seno e do cosseno devem se anular. Temos, então, duas equações envolvendo as incógnitas  $A$  e  $\delta$

$$m\omega^2 A \cos \delta + b\omega A \sin \delta = eE_0, \quad (35.14)$$

$$m\omega^2 A \sin \delta - b\omega A \cos \delta = 0. \quad (35.15)$$

A última equação determina o valor de  $\delta$  como

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{b}{m\omega} \quad (35.16)$$

e, portanto,

$$\operatorname{sen} \delta = \frac{b}{\sqrt{m^2\omega^2 + b^2}}, \quad (35.17)$$

$$\operatorname{cos} \delta = \frac{m\omega}{\sqrt{m^2\omega^2 + b^2}}. \quad (35.18)$$

Usando esses valores na eq. (35.14), obtemos:

$$A = \frac{e E_0}{\omega \sqrt{m^2\omega^2 + b^2}}. \quad (35.19)$$

Está, assim, determinada a equação de movimento do elétron, dada por

$$\vec{S}(\omega) = \frac{e\vec{E}_0}{\omega\sqrt{m^2\omega^2 + b^2}} \cos(\omega t - \kappa y + \delta), \quad (35.20)$$

onde tanto a amplitude como a fase dependem da massa do elétron e das forças que agem sobre ele.

### • a densidade da corrente

Precisamos conhecer a densidade de corrente  $\vec{j}$ , para determinar a equação de Ampère-Maxwell (35.3). Ela está relacionada à velocidade dos elétrons por

$$\vec{j} = -e N \vec{v}, \quad (35.21)$$

onde  $N$  é o número de elétrons livres por unidade de volume. O sinal negativo deve-se à convenção que identifica o sentido da corrente elétrica com o do movimento de cargas positivas. Temos então

$$\begin{aligned} \vec{j} &= -e N \frac{d\vec{S}}{dt} \\ &= e N \frac{e\vec{E}_0}{\sqrt{m^2\omega^2 + b^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \kappa y + \delta), \\ &= \frac{Ne^2\vec{E}_0}{(m^2\omega^2 + b^2)} \left[ b \cos(\omega t - \kappa y) + m\omega \operatorname{sen}(\omega t - \kappa y) \right]. \end{aligned} \quad (35.20)$$

A última passagem foi efetuada com auxílio das eqs. (35.17) e (35.18). Para estabelecer uma relação direta entre  $\vec{j}$  e  $\vec{E}$ , basta usar a eq. (35.7),  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \kappa y)$ , e derivá-la em relação ao tempo, o que fornece

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\omega \vec{E}_0 \text{sen}(\omega t - \kappa y). \quad (35.21)$$

Substituindo esses resultados na eq. (35.20), obtemos a relação desejada entre a corrente e o campo elétrico, dada por

$$\vec{j}(\omega) = \frac{e^2 N b}{m^2 \omega^2 + b^2} \vec{E} - \frac{m e^2 N}{m^2 \omega^2 + b^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (35.22)$$

Esta expressão mostra que, para campos dependentes do tempo, a densidade de corrente é proporcional não somente a  $\vec{E}$ , mas a  $\partial \vec{E} / \partial t$  também. Ela corresponde a uma versão generalizada da lei de Ohm microscópica, que inclui o caso de campos elétricos oscilantes.

No caso em que o campo elétrico é constante,  $\omega = 0$ ,  $\partial \vec{E} / \partial t = 0$ , e obtemos

$$\vec{j}(\omega = 0) = \frac{e^2 N}{b} \vec{E}, \quad (35.23)$$

que é a versão usual da lei de Ohm, dada pela eq. (35.6), sendo a condutividade  $g_0$  expressa por

$$g_0 = \frac{e^2 N}{b}. \quad (35.24)$$

Este resultado permite determinar o coeficiente  $b$  em termos de resistividade do material, definida como  $\rho = 1/g_0$ , pois esta é uma grandeza que costuma ser medida. Temos, então,

$$b = e^2 N \rho. \quad (35.25)$$

Assim, o coeficiente de amortecimento  $b$  é proporcional à resistividade do metal, o que corresponde à idéia intuitiva de que a sua resistência é tanto maior quanto mais difícil for o movimento dos elétrons em seu interior. O resultado (35.25) é importante porque todas as grandezas no seu lado direito podem ser medidas. Como o mesmo acontece com a massa do elétron, todos os parâmetros do modelo podem ser conhecidos antes da sua utilização, o que o torna preditivo.

O estudo do movimento de um elétron no interior de um metal permite-nos concluir que, para frequências baixas, a lei de Ohm continua a ser aproximadamente válida, uma vez que  $\partial \vec{E} / \partial t$  pode ser desprezado. Quando as frequências são altas, entretanto, esse termo deve ser levado em consideração e a eq. (35.22) deve ser empregada.

• equações de onda no interior do metal

A expressão (35.22), que relaciona a densidade de corrente ao campo elétrico e à sua derivada, permite-nos estudar o comportamento de ondas eletromagnéticas no interior de condutores. Para tanto, consideremos novamente a lei de Ampère-Maxwell, que pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= \mu_0 \frac{e^2 N b}{m^2 \omega^2 + b^2} \vec{E} + \mu_0 \left( \varepsilon_0 - \frac{m e^2 N}{m^2 \omega^2 + b^2} \right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= \mu_0 g(\omega) \vec{E} + \mu_0 \varepsilon(\omega) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},\end{aligned}\tag{35.24}$$

onde  $g(\omega)$  e  $\varepsilon(\omega)$  são funções dadas por

$$g(\omega) = \frac{e^2 N b}{m^2 \omega^2 + b^2},\tag{35.25}$$

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - \frac{m e^2 N}{m^2 \omega^2 + b^2}.\tag{35.26}$$

Assim, as equações de Maxwell, *apropriadas ao estudo de ondas eletromagnéticas em metais*, são dadas por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0,\tag{35.27}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},\tag{35.28}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 g(\omega) \vec{E} + \mu_0 \varepsilon(\omega) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},\tag{35.29}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.\tag{35.30}$$

Este conjunto de equações envolve apenas os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  e, a partir dele, podemos obter equações para ondas eletromagnéticas no interior do metal. Antes de fazer isto, entretanto, é interessante notar que a presença do metal se manifesta por meio das informações codificadas nas funções  $g(\omega)$  e  $\varepsilon(\omega)$ . Isto fica evidente quando notamos que o metal pode ser eliminado do problema fazendo  $N$ , o número de elétrons livres por unidade de volume, tender a zero. Neste caso

$$\lim_{N \rightarrow 0} g(\omega) = 0, \quad \lim_{N \rightarrow 0} \varepsilon(\omega) = \varepsilon_0.\tag{35.31}$$

e as eqs. (35.27 - 35.30) passam a descrever campos no vácuo.

Para obter as equações de onda no interior do metal, seguimos o mesmo procedimento

da aula 11 e calculamos o rotacional da eq. (35.28)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \\ &= -\mu_0 g(\omega) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon(\omega) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}\end{aligned}\quad (35.31)$$

e usamos a identidade vetorial (11.11),

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \left( \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \right) \quad (35.32)$$

juntamente com a eq. (35.27) para obter a equação para o campo  $\vec{E}$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon(\omega) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 g(\omega) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (35.33)$$

A equação de onda para o campo magnético será discutida adiante.

Como no caso do vácuo, esta equação também admite ondas planas como solução. Se escolhermos a direção  $y$  como a de propagação, o fato de a onda ser plana é expresso pela relação

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(y, t) \quad (35.34)$$

e a eq. (35.33) fica mais simples, dada por

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} - \mu_0 \varepsilon(\omega) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 g(\omega) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (35.35)$$

Esta expressão é parecida com a eq. (11.13), que descreve ondas no vácuo, e se reduz a ela no limite  $N \rightarrow 0$ . Entretanto, ela contém um elemento estrutural muito importante, que é o fato de ela possuir um termo envolvendo a *derivada primeira* do campo em relação ao tempo. No caso do vácuo, que envolve apenas derivadas segundas, a solução da equação de onda é do tipo  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\kappa y - \omega t)$ , onde  $\vec{E}_0$  é uma amplitude, perpendicular à direção de propagação da onda.

No caso em que  $g(\omega)$  é não nulo e o termo  $\partial \vec{E} / \partial t$  contribui, a solução da eq. (35.35) tem a forma

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\beta y} \cos(\kappa y - \omega t), \quad (35.36)$$

sendo que o termo proporcional a  $\beta$  corresponde a um amortecimento.

O campo magnético também obedece uma equação de onda, que pode ser obtida calculando o rotacional da eq. (35.29), usando a identidade análoga à eq.(35.32) e a eq. (35.30). Ela é totalmente análoga à eq. (35.33) e dada por

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon(\omega) \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \mu_0 g(\omega) \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (35.37)$$

A forma do campo magnético no interior do condutor pode ser determinada a partir do campo elétrico, por meio da Lei de Faraday, eq. (35.28). Usando  $\vec{E}_0 = E_{0x} \vec{i} + E_{0z} \vec{k}$  e a eq. (35.36), podemos escrever

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = e^{-\beta y} [\beta \cos(\kappa y - \omega t) + \kappa \sin(\kappa y - \omega t)] (E_{0x} \vec{k} - E_{0z} \vec{i}). \quad (35.38)$$

Notando que  $E_{0x} \vec{k} - E_{0z} \vec{i} = -\vec{j} \times \vec{E}_0$ , a lei de Faraday permite-nos escrever

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = e^{-\beta y} [\beta \cos(\kappa y - \omega t) + \kappa \sin(\kappa y - \omega t)] (\vec{j} \times \vec{E}_0). \quad (35.39)$$

Integrando, obtemos

$$\vec{B} = e^{-\beta y} \left[ -\frac{\beta}{\omega} \sin(\kappa y - \omega t) + \frac{\kappa}{\omega} \cos(\kappa y - \omega t) \right] (\vec{j} \times \vec{E}_0) \quad (35.40)$$

Esta equação pode ser reescrita de modo mais compacto como

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{-\beta y} \cos(\kappa y - \omega t + \eta), \quad (35.41)$$

onde

$$\vec{B}_0 = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \beta^2}}{\omega} (\vec{j} \times \vec{E}_0), \quad (35.42)$$

$$\text{tg } \eta = \frac{\beta}{\kappa}. \quad (35.43)$$

Os resultados acima mostram que o campo magnético no interior de um condutor é, como no caso do vácuo, simultaneamente ortogonal ao campo elétrico e à direção de propagação. Entretanto, os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  não estão em fase, sendo  $\eta$  o ângulo de defasagem entre eles.

Os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  da onda, no interior do metal, são dados pelas eqs. (35.36) e (35.41) e dependem do  $\kappa$  e  $\beta$ , que são funções da frequência  $\omega$ . Por isso, para completar o nosso estudo, é preciso expressar  $\kappa$  e  $\beta$  em função do  $\varepsilon(\omega)$  e  $g(\omega)$ .

#### • as funções $\kappa$ e $\beta$

As formas das funções  $\kappa(\omega)$  e  $\beta(\omega)$  são obtidas pela substituição da eq.(35.36) na eq. (35.35). Temos, então

$$\begin{aligned} \vec{E}_0 e^{-\beta y} \{ [(\beta^2 - \kappa^2) \cos(\kappa y - \omega t) + 2\beta \kappa \sin(\kappa y - \omega t)] + \mu_0 \varepsilon(\omega) \omega^2 \cos(\kappa y - \omega t) \} \\ = \vec{E}_0 e^{-\beta y} \mu_0 g(\omega) \omega \sin(\kappa y - \omega t). \end{aligned} \quad (35.43)$$

Para que esta equação seja válida para quaisquer valores de  $y$  e  $t$ , os coeficientes do seno e do cosseno devem se anular. Impondo essas condições, obtemos duas equações envolvendo  $\kappa$  e  $\beta$

$$\kappa^2 - \beta^2 = \mu_0 \varepsilon(\omega) \omega^2, \quad (35.44)$$

$$2\beta \kappa = \mu_0 g(\omega) \omega. \quad (35.45)$$

Essas duas equações determinam  $\kappa$  e  $\beta$

$$\kappa = \pm \sqrt{\mu_0} \omega \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2(\omega) + \frac{g^2(\omega)}{\omega^2}}}, \quad (35.46)$$

$$\beta = \frac{\mu_0 g(\omega) \omega}{2\kappa}. \quad (35.47)$$

Finalmente, é preciso escolher os sinais na eq. (35.46). Para tanto, notamos que a eq. (35.25) garante que  $g(\omega) \geq 0$  e a eq. (35.45) permite-nos concluir que  $\beta\kappa \geq 0$ . Por outro lado,  $\beta$  deve ser positivo porque a onda é amortecida ao longo do eixo  $y$  e, portanto, o mesmo deve ocorrer com  $\kappa$ . Isto corresponde a escolher o sinal global positivo. Quanto ao sinal no interior da raiz quadrada, escolhemos o positivo, porque  $\kappa$  deve ser um número real. Além disso, esta é a solução que, no limite em que a densidade de elétrons livres tende a zero, se reduz a  $\kappa = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ , correspondente à propagação de ondas no vácuo.

### • em resumo ...

A parte formal do problema está concluída. Como ela envolve um número grande de operações, é conveniente, neste ponto, resumir os resultados obtidos, baseados no modelo de Drude.

Os campos elétrico e magnético, que se propagam ao longo do eixo  $y$ , no interior de um metal, são dados por

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\beta y} \cos(\kappa y - \omega t), \quad (35.48)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{-\beta y} \cos(\kappa y - \omega t + \eta), \quad (35.49)$$

$$\vec{B}_0 = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \beta^2}}{\omega} (\vec{j} \times \vec{E}_0), \quad (35.50)$$

$$\text{tg } \eta = \frac{\beta}{\kappa}. \quad (35.51)$$

1. Os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são ortogonais entre si e, também, à direção de propagação.
2. Os dois campos envolvem tanto oscilação como atenuação, ao longo do eixo  $y$ .
3. Os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  d estão defasados.
4. Os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  dependem da frequência  $\omega$  da onda de dois modos diferentes: *explicitamente*, através do fator  $\omega t$  e *implicitamente*, através das funções  $\kappa = \kappa(\omega)$  e  $\beta = \beta(\omega)$ .
5. As características da onda dependem da massa  $m$  do elétron e das propriedades de

cada metal, representadas pelos parâmetros  $b$  e  $N$ , por meio do conjunto de funções

$$\kappa(\omega) = \sqrt{\mu_0} \omega \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2(\omega) + \frac{g^2(\omega)}{\omega^2}}}, \quad (35.52)$$

$$\beta(\omega) = \frac{\mu_0 g(\omega)}{2\kappa} \omega, \quad (35.53)$$

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - \frac{me^2N}{m^2\omega^2 + b^2} = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{e^2N/m\varepsilon_0}{\omega^2 + b^2/m^2}\right), \quad (35.54)$$

$$g(\omega) = \frac{e^2Nb}{m^2\omega^2 + b^2}. \quad (35.55)$$

### • propagação, atenuação e a frequência de plasma

Os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , dados pelas eqs. (35.48) e (35.49), são compostos por um termo oscilatório, representado pela função cosseno, que corresponde à propagação da onda, e por um termo que decresce exponencialmente, que representa o amortecimento ao longo do eixo  $y$ . Deste modo, é possível interpretar as expressões dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  como descrevendo oscilações, cujas amplitudes diminuem ao longo da direção de propagação, como está representado na figura 35.2.

Propagação e amortecimento competem entre si no interior de um metal. Dependendo da frequência da onda, um desses efeitos domina o outro. O amortecimento é caracterizado pela função  $\beta(\omega)$ , enquanto que a propagação o é pela função  $k(\omega)$ . O efeito dominante é determinado pela maior dentre elas. A eq. (35.44) nos fornece um meio fácil de determinar as regiões de frequência onde cada um dos efeitos é mais importante. Ela permite-nos concluir que a propagação, que ocorre quando  $k$  é maior que  $\beta$ , corresponde aos valores positivos de  $\varepsilon(\omega)$ , enquanto que seus valores negativos correspondem à atenuação. A transição entre essas duas regiões ocorre na frequência  $\omega_P$  em que a função  $\varepsilon(\omega)$  se anula. Consultando a eq.(35.54), vemos que  $\omega_P$  é determinada pela condição

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{e^2N/m\varepsilon_0}{\omega^2 + b^2/m^2}\right) = 0, \quad (35.56)$$

e, portanto,

$$\omega_P^2 = \frac{e^2N}{m\varepsilon_0} - \frac{b^2}{m^2}. \quad (35.57)$$

Para a maioria dos metais, o primeiro termo do lado direito da igualdade é muito maior que o segundo e podemos escrever

$$\omega_P = \sqrt{\frac{e^2N}{m\varepsilon_0}}. \quad (35.58)$$

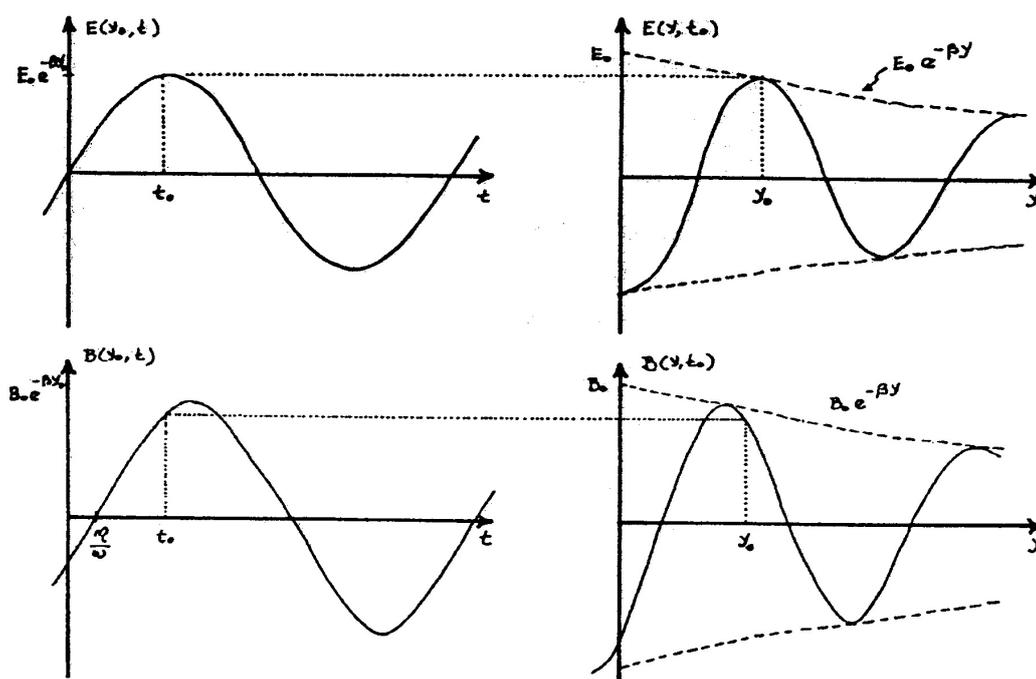


Figura 35.2: Dependências espaciais e temporais dos campos elétrico e magnético de uma onda no interior de um metal.

Essa frequência é chamada *frequência de plasma* dos elétrons do metal e tem papel muito importante no estudo do comportamento de ondas eletromagnéticas em condutores. Se a frequência da onda for menor que  $\omega_P$ , a função  $\varepsilon(\omega)$  é negativa,  $\beta > \kappa$  e o amortecimento domina. Quando  $\omega$  for maior que  $\omega_P$ ,  $\kappa > \beta$  e a propagação domina.

A importância relativa da propagação e do amortecimento pode ser percebida na figura 35.3, onde os pontos  $A$  e  $B$  estão separados por um comprimento da onda.

A figura 35.4 representa os campos elétrico e magnético de uma onda plana, monocromática e polarizada, que se propaga na direção  $y$ . A figura 35.4a representa uma onda com frequência de plasma em que a propagação domina. Na figura 35.4b, por outro lado, temos uma onda com frequência abaixo da frequência do plasma, em que a atenuação domina. Note que, neste caso, a defasagem entre os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  é maior que  $\pi/4$ .

Para termos uma noção da ordem de grandeza dos fenômenos previstos pelo modelo de Drude vamos, na próxima aula, estudar o comportamento de ondas eletromagnéticas no interior de prata sólida, que é um bom condutor. Discutiremos, também, as limitações do modelo.

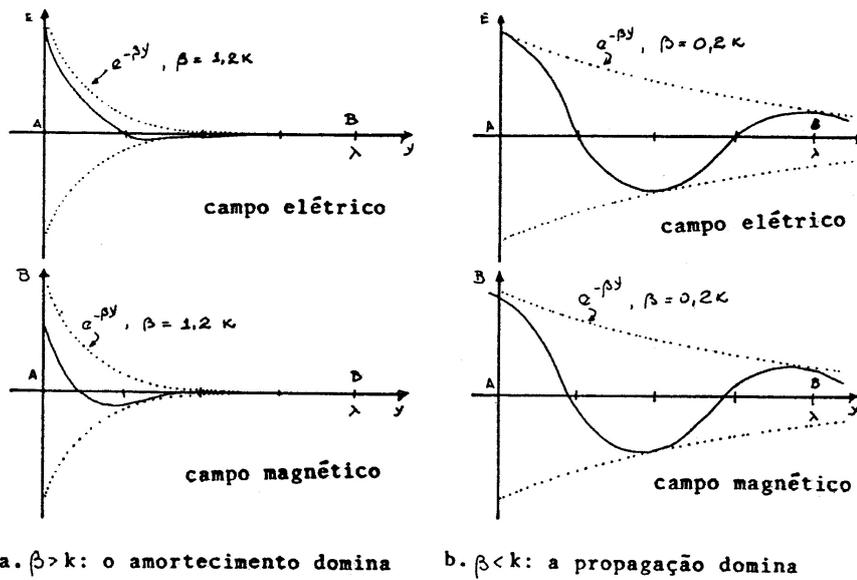


Figura 35.3: Amortecimento e propagação de ondas eletromagnéticas no interior de um metal.

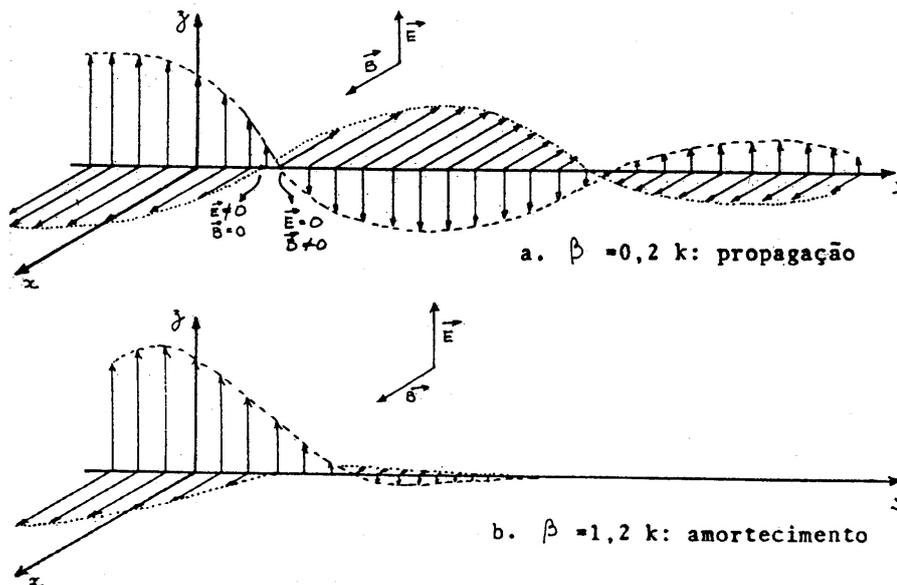


Figura 35.4: Os campo elétrico e mangético de uma onda no interior de um metal.

• **exercícios**

1. O que significa a palavra modelo, quando se fala em modelo Drude?
2. Em que sentido a lei de Ohm é uma lei? O modelo de Drude é compatível com a lei de Ohm?

3. Um elétron livre, no interior de um metal, se move devido à ação de uma onda eletromagnética de frequência  $\omega$ . Desenhe, num único gráfico, a força  $\vec{F}_1$  que age sobre o elétron, eq.(35.8), e o seu deslocamento, eq.(35.20) em função do tempo. Porque há uma diferença de fase entre as duas curvas? Qual a importância física dessa diferença de fase?
4. Considere o deslocamento de um elétron livre, que oscila sob a ação de uma onda, no interior de um metal, dado pela eq. (35.20). Em quais situações físicas este deslocamento pode ser muito pequeno? Interprete as suas respostas.
5. A lei de Ohm generalizada é dada pela eq. (35.22). Para qual região de frequências ela pode ser bem aproximada pela lei de Ohm usual? Sugestão: considere a eq. (35.20).
6. No modelo de Drude, o comportamento de ondas eletromagnéticas no interior de metais é descrito pelas eqs. (35.48-35.55). Existe alguma situação física na qual o metal pode se tornar transparente?

### • respostas

4. Nos limites  $e \rightarrow 0$ ,  $m \rightarrow \infty$ ,  $b \rightarrow \infty$  e  $\omega \rightarrow \infty$ . Os dois primeiros são brincadeiras matemáticas e não se aplicam a elétrons. O último, entretanto, pode representar situações reais, envolvendo radiação  $\gamma$ , por exemplo. Neste caso, quais são as implicações físicas?
5.  $\omega \ll b/m$ .
6. No limite  $\omega \rightarrow \infty$ .



# Capítulo 36

## ondas em meios materiais: o caso da prata

O modelo de Drude, estudado na aula anterior, prevê o comportamento dos campos elétrico e magnético de uma onda no interior de um condutor. Em particular, este modelo permite-nos distinguir duas situações diversas, em que a onda pode, ou não, se propagar. Em geral, é conveniente representar a capacidade que uma onda tem de se propagar em um meio condutor por meio da grandeza  $\delta$ , definida como

$$\delta = \frac{1}{\beta}, \quad (36.1)$$

onde  $\beta$  é o fator de atenuação das eqs. (35.48-35.55). Essa grandeza tem dimensão de comprimento e é denominada *espessura de penetração*. Ela corresponde à distância ao longo da qual a amplitude dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  se reduzem a  $1/e$  ( $= 0,368$ ) do seu valor.

A espessura de penetração prevista pelo modelo de Drude pode ser obtida a partir das eqs. (35.52) e (35.53), sendo dada por

$$\delta = \frac{2}{\sqrt{\mu_0} g(\omega)} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2(\omega) + \frac{g^2(\omega)}{\omega^2}}} \quad (36.2)$$

Esta função depende crucialmente da frequência da onda. Para termos uma noção da ordem de grandeza dos valores de  $\delta$  preditos pela eq. (35.2) estudamos o caso da prata sólida, que é um bom condutor.

### • o caso da prata

As constantes  $\varepsilon_0$  e  $\mu_0$  são dadas por

$$\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ s}^2 \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{-3}, \quad \text{e} \quad \mu_0 = 1,26 \times 10^{-6} \text{ C}^{-2} \text{ kg m}.$$

A massa e a carga de um elétron são, respectivamente,

$$m = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}, \quad e \quad q = -e = -1,60 \times 10^{-19} \text{ C}.$$

Para a condutividade da prata, usamos um valor medido experimentalmente:

$$g_0 = 6,25 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \Omega^{-1}.$$

A grandeza  $N$ , o número de elétrons livres por unidade de volume, é dada por

$$N = 6,94 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

O valor do coeficiente de amortecimento  $b$  é calculado usando os valores numéricos acima na eq. (35.24) e, obtemos

$$b = 2,85 \times 10^{-17} \text{ kg s}^{-1}.$$

A frequência de plasma dos elétrons em um metal é dada pela eq. (??). No caso da prata, temos

$$\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 N}{m \varepsilon_0}} = 14,85 \times 10^{16} \text{ Hz} \quad (36.-2)$$

e, portanto,

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = 2,36 \times 10^{15} \text{ Hz}. \quad (36.-1)$$

Este valor é um pouco maior do que os correspondentes ao espectro visível, que vai de  $4 \times 10^{14}$  Hz (vermelho) a  $8 \times 10^{14}$  Hz (violeta). As previsões do modelo de Drude para a espessura de penetração na prata, de ondas eletromagnéticas de diversas frequências, calculadas pela eq.(36.2), são mostradas na tabela 36.1, juntamente com os valores das funções  $g(\omega)$  e  $\varepsilon(\omega)$ .

A figura 36.1 foi construída com os dados da tabela e mostra, num gráfico log-log, a dependência da espessura de penetração com a frequência. É importante notar que, em ambos os eixos, as grandezas variam muitas ordens de grandeza. Nesta figura, vemos que as espessuras de penetração previstas pelo modelo de Drude decrescem monotonicamente com o aumento da frequência, no intervalo de zero até a frequência de plasma, onde ocorre a inversão dessa tendência.

Região do espectro	$f[s^{-1}]$	$g(\omega) [\Omega^{-1}m^{-1}]$	$\varepsilon(\omega) [C^2s^2kg^{-1}m^{-3}]$	$\delta(\omega) [m]$
-	0	$6,23 \times 10^7$	$-1,99 \times 10^{-6}$	$\infty$
ondas longas	1	$6,23 \times 10^7$	$-1,99 \times 10^{-6}$	$6,36 \times 10^{-2}$
ondas longas	$10^3$	$6,23 \times 10^7$	$-1,99 \times 10^{-6}$	$2,01 \times 10^{-3}$
AM	$10^6$	$6,23 \times 10^7$	$-1,99 \times 10^{-6}$	$6,36 \times 10^{-5}$
FM, TV	$10^9$	$6,23 \times 10^7$	$-1,99 \times 10^{-6}$	$2,01 \times 10^{-6}$
infravermelho	$10^{11}$	$6,23 \times 10^7$	$-1,99 \times 10^{-6}$	$2,01 \times 10^{-7}$
infravermelho	$10^{12}$	$5,99 \times 10^7$	$-1,92 \times 10^{-6}$	$5,76 \times 10^{-8}$
infravermelho	$10^{13}$	$1,24 \times 10^7$	$-3,96 \times 10^{-7}$	$4,53 \times 10^{-8}$
visível	$10^{14}$	$1,54 \times 10^5$	$-4,92 \times 10^{-9}$	$2,02 \times 10^{-8}$
ultravioleta	$10^{15}$	$1,55 \times 10^3$	$-4,05 \times 10^{-11}$	$2,23 \times 10^{-8}$
ultravioleta	$10^{16}$	$1,55 \times 10^1$	$8,36 \times 10^{-12}$	$3,33 \times 10^{-4}$
raios X	$10^{18}$	$1,55 \times 10^{-3}$	$8,85 \times 10^{-12}$	$3,42 \times 10^0$
raios $\gamma$	$10^{21}$	$1,55 \times 10^{-9}$	$8,85 \times 10^{-12}$	$3,42 \times 10^6$
raios $\gamma$	$10^{24}$	$1,55 \times 10^{-15}$	$8,85 \times 10^{-12}$	$3,42 \times 10^{12}$
-	$\infty$	0	$8,85 \times 10^{-12}$	$\infty$

Tabela 36.1: Previsões do modelo de Drude para ondas eletromagnéticas na prata.

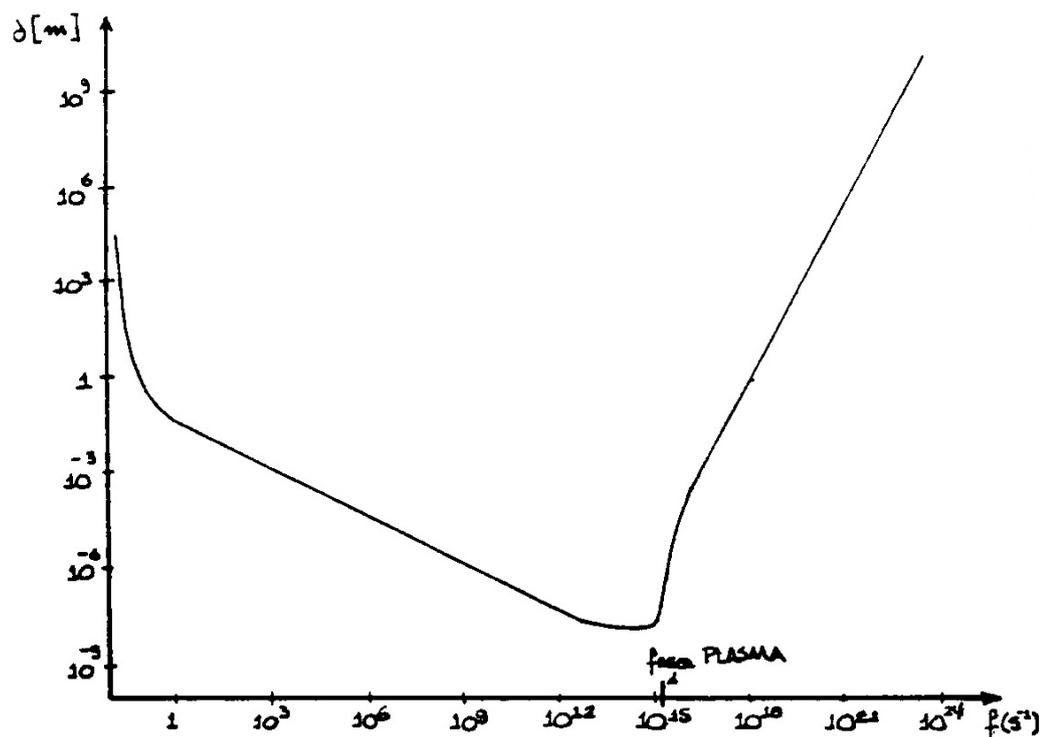


Figura 36.1: A espessura de penetração de ondas eletromagnéticas na prata em função da frequência

• **abaixo da frequência de plasma**

A espessura de penetração caracteriza a propagação de ondas eletromagnéticas em um metal que, por sua vez, está relacionada às suas propriedades ópticas. No caso da prata, a tabela nos mostra que as espessuras de penetração de ondas longas são da ordem de alguns milímetros, sendo mil vezes menores para frequências de TV. No caso da luz visível essas espessuras são ainda menores, da ordem de  $10^{-8}$  m bastante próximas do valor mínimo dessa grandeza. A escala atômica é de  $10^{-10}$  m e, portanto, para o espectro visível,  $\delta$  corresponde aproximadamente a uma camada de 100 átomos. As pequenas espessuras de penetração de ondas com  $\omega \sim \omega_p$  indicam que a prata não é atravessada por estas ondas. Ou seja, para estas frequências, ela é opaca. Quando ondas com frequências pouco menores que  $\omega_p$  incidem sobre a superfície de um corpo de prata, as suas energias praticamente não penetram em seu interior, e as ondas são predominantemente refletidas. Essa reflexão, observada também na grande maioria dos metais, ocorre para todas as frequências do espectro visível, fazendo com que eles tenham aparência incolor ou “prateada”. O ouro e o cobre são exceções. Existe, portanto, uma estreita relação entre o brilho que observamos nos metais e o fato de eles serem bons condutores.

O espelho, discutido na aula 30, corresponde a um caso de metal ideal, no qual  $m \rightarrow 0$  e  $b \rightarrow 0$ . De acordo com as eqs. (35.54) e (35.55), nestas condições temos  $\varepsilon(\omega) \rightarrow -\infty$ ,  $g(\omega) \rightarrow \infty$ , e portanto,  $\delta(\omega) \rightarrow 0$ , o que é uma boa aproximação para o caso da luz. De modo geral, metais podem ser atravessados por ondas eletromagnéticas quando estão na forma de lâminas muito finas, de espessuras comparáveis à espessura de penetração. Esse tipo de transparência pode ser observado nos semi-espelhos, também conhecidos como espelhos de duas vistas, ou então, no caso de óculos “escuros” espelhados. Esse tipo de transparência, ao contrário das anteriores, pode ocorrer para quaisquer frequências.

No regime de baixas frequências, o fator  $m\omega$  nas eqs.(35.54) e (35.55) pode ser desprezado e valem as aproximações<sup>1</sup>  $\varepsilon(\omega) \simeq \varepsilon(0)$  e  $g(\omega) \cong g(0)$ . Como estas funções se tornam praticamente constantes, a espessura de penetração depende da frequência apenas através do fator  $1/\omega^2$  sob a dupla raiz na eq.(36.2). No limite  $\omega \rightarrow 0$  o campo tende ao eletrostático e  $\delta$  torna-se muito grande. Por isso, no estudo de ondas, este limite corresponde a uma situação um pouco artificial.

• **acima da frequência de plasma**

No modelo de Drude, o comportamento da espessura de penetração é bastante diferente nas regiões  $\omega < \omega_p$  e  $\omega > \omega_p$ . Nesse modelo, o movimento de um elétron dentro de um metal é o resultado do jogo entre três agentes: a força devida à onda, que causa o movimento, a força de resistência, que se opõe ao movimento, e a inércia do elétron, que tende a manter um dado movimento. Quando a força devida ao campo puxa o elétron para um certo lado, este tende a se mover para aquele lado, mas isso demora um certo tempo para acontecer, devido à sua inércia. Quando a força muda de sentido, o elétron

---

<sup>1</sup>Note que  $\varepsilon(0)$  é muito diferente de  $\varepsilon_0$ !

tende a seguir esta força, sempre com algum atraso. Quando a frequência da onda é muito alta, o que acontece é que, mal o elétron começa a se mover para um lado, ele é solicitado a ir para o lado oposto e, assim, sucessivamente. Deste modo, ele somente tem tempo de efetuar deslocamentos extremamente pequenos, entre duas mudanças de direção da força devida à onda. O resultado é que ele quase não oscila, ficando praticamente parado, não conseguindo, por isso receber energia da onda. A onda, então, se propaga no interior do metal.

A prata, como inúmeros outros metais, torna-se transparente para ondas de frequências altas, acima da frequência de plasma. Este tipo de efeito, devido à inércia do elétron, explica os valores de  $\delta$  da tabela 36.1, para a região de frequências mais altas do que o ultravioleta. Raios X, por exemplo, podem penetrar vários metros no interior de corpos de prata. Quando as frequências são muito altas, o fator  $m\omega$  torna-se muito grande e as eqs. (??) e (??) fornecem  $\varepsilon(\omega) \rightarrow \varepsilon_0$  e  $g(\omega) \rightarrow 0$ . Portanto, de acordo com a eq.(36.2),  $\delta \rightarrow \infty$ .

### • limitações do modelo Drude

O modo como ondas eletromagnéticas se propagam em meios materiais depende de como as partículas que os constituem reagem à presença do campo elétrico da onda. O modelo de Drude tenta explicar como isso ocorre, supondo que os elétrons obedeçam as leis de Newton. Ele é simples e descreve bastante bem ao comportamento de ondas em uma região muito grande de frequências. Entretanto, ele tem algumas limitações. Uma delas, e que ele não consegue explicar porque certos metais, tais como o ouro e o cobre, não são prateados. Essa limitação decorre de ele considerar que a onda interage apenas com os elétrons livres do metal, enquanto que ela também pode interagir com os íons que formam a sua rede cristalina. Assim, um modelo mais realístico deveria considerar ambas as interações. A interação da onda com os íons da rede é semelhante à que ocorre com as moléculas de um dielétrico, que será estudada na próxima aula.

Outra limitação do modelo de Drude deve-se ao fato de que tanto a onda como as partículas do meio material têm comportamento quântico. No caso do elétron, em particular, supusemos que ele obedece à mecânica Newtoniana, enquanto que, na verdade, ele obedece à mecânica quântica. Existem, além disso, outros efeitos quânticos que não foram considerados, tais como:

- efeito Compton - um elétron, ao ser acelerado pela força devida ao campo da onda, passa a irradiar, emitindo ondas de frequências diferentes;
- efeito fotoelétrico - a onda que se propaga arranca elétrons do metal;
- produção de pares - quando a energia da onda é grande ela pode, ao passar pelas vizinhanças de um núcleo atômico, produzir um elétron e um pósitron, simultaneamente.

Esses efeitos são mais importantes para ondas de frequências grandes e produzem, como consequência, a redução da espessura de penetração em relação ao valor previsto pelo modelo de Drude.

Esta discussão deixa claro que uma descrição completa da propagação de ondas eletromagnéticas em meios materiais é muito mais complexa do que a apresentada aqui, que teve como base um modelo onde elétrons livres obedecem à dinâmica de Newton. Isso, entretanto, não destitui de valor este modelo, uma vez que ele é muito útil como ponto de partida para análises mais abrangentes.

### • exercícios

1. A partir da tabela 36.1, esboce os gráficos:

a)  $g(\omega) \times \omega$ ;

b)  $\varepsilon(\omega) \times \omega$ .

2. Uma onda luminosa de  $10^{14}$  Hz incide sobre a face maior de uma placa de prata de dimensões 10cm x 10cm x 1cm. Qual é a fração dos íons da placa que sentem a presença da onda?

3. Qual a distância ao longo de uma placa de prata para a qual a *energia* de uma onda eletromagnética de  $10^{12}$  Hz cai para um centésimo de seu valor inicial?

4. Existem certas receitas que recomendam que os alimentos a serem cozidos no forno sejam embrulhados em “papel” alumínio. Qual a razão por trás desse procedimento?

5. Num universo fictício, onde os elétrons tivessem massa cem vezes maior que a do nosso universo, seriam os metais transparentes à luz visível?

6. Um espelho é feito depositando uma fina camada de prata sobre uma placa de vidro. Que espessura deve ter essa camada para que o espelho seja bom e, ao mesmo tempo, não muito caro?

7. Explique porque garrafas térmicas são feitas com vidros espelhados.

8. É comum que as bagagens de passageiros de avião sejam examinadas com o auxílio de raios X. Para proteger filmes fotográficos, seria suficiente embrulhá-los com “papel” de alumínio?

• **respostas**

2. Supondo uma penetração de  $7\delta$ , para a qual a atenuação é maior que 1.000, esta fração vale aproximadamente  $1,4 \times 10^{-5}$ .

3.  $1,33 \times 10^{-7}$  m.

5. Não, pois neste universo a frequência de plasma seria  $\omega_p = 1,48 \times 10^{15}$  Hz, ainda maior do que as da região visível.

6. Uma camada de espessura em torno de  $7\delta$  é mais do que suficiente, para uma boa reflexão; veja o exercício 2.



# Capítulo 37

## ondas em meios materiais: dielétricos

### • ondas em dielétricos

Substâncias dielétricas são formadas por moléculas eletricamente neutras. Essa neutralidade não impede, entretanto, que elas sintam campos elétricos e magnéticos externos, uma vez que elas são constituídas por partículas carregadas, tais como prótons e elétrons. Quando existir uma onda eletromagnética no interior de uma substância dielétrica, estas cargas vão reagir à presença dos campos da onda, já que sofrem forças de Lorentz  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ . Como no caso dos metais, as forças magnéticas são muito pequenas e é o campo elétrico da onda que vai tender a deslocar as partículas carregadas de suas posições de equilíbrio, sendo os efeitos maiores sobre os elétrons, que são muito mais leves que os núcleos atômicos.

Nos dielétricos, ao contrário dos condutores, os elétrons não estão livres, mas sim, presos a núcleos determinados. Quando o campo elétrico da onda puxa o elétron numa direção, a força que prende o elétron ao núcleo também age, no sentido oposto, puxando-o de volta para a posição de equilíbrio e tentando manter a estabilidade da molécula. Este tipo de situação foi discutido na aula 33, onde vimos que o deslocamento de um sistema em relação à sua posição de equilíbrio dá origem a forças restauradoras, que correspondem a *molasses matemáticas*. É por este motivo que o comportamento de ondas eletromagnéticas em dielétricos é muito diferente de ondas em metais. As características microscópicas de uma substância dielétrica permitem o aparecimento de ressonâncias e determinam suas propriedades macroscópicas, como discutimos a seguir.

### • modelo de Drude para dielétricos

O estudo das ondas começa com as equações de Maxwell na forma geral, dadas por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \quad (37.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (37.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (37.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (37.4)$$

No caso dos dielétricos, como no dos condutores, os deslocamentos dos elétrons causados pelo campo elétrico da onda não geram concentrações de carga *no interior* do meio e, portanto,

$$\rho_- + \rho_+ = 0. \quad (37.5)$$

Como o campo elétrico da onda oscila, o mesmo acontece com as densidades de carga  $\rho_-$  e  $\rho_+$ , o que dá origem a correntes que contribuem à eq. (37.3). Para equacionar o problema, consideramos um ponto  $P(x, y, z)$ , totalmente imerso em um volume de dielétrico situado à direita do plano  $y = 0$ , mostrado na figura 35.1. Nas vizinhanças deste ponto existe uma onda plana e monocromática, que se propaga na direção  $y$ , cujo campo elétrico é

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(y, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \kappa y), \quad (37.6)$$

onde  $\vec{E}_0$  é a amplitude da onda naquele ponto. Este campo produz forças sobre os elétrons das moléculas e faz com que eles vibrem. A dinâmica de um elétron no interior de uma molécula é determinada pela mecânica quântica, o que pode tornar bastante complicada a análise da propagação de ondas eletromagnéticas no interior da matéria. É possível, entretanto, simular alguns aspectos do comportamento quântico de um elétron por meio de um modelo baseado na mecânica de Newton, também devido a Paul Drude<sup>1</sup>.

O modelo de Drude para dielétricos é baseado na idéia de que o comportamento de um elétron em um ponto  $P$ , no qual existe um campo elétrico oscilante, é determinado por três tipos de força:

1) força devida ao campo elétrico da onda, eq. (37.6)

$$\vec{F}_1 = -e\vec{E}_0 \cos(\omega t - \kappa y), \quad (37.7)$$

onde  $-e$  é a carga do elétron

2) força restauradora, que prende o elétron ao núcleo,

$$\vec{F}_2 = -k \vec{S}, \quad (37.8)$$

---

<sup>1</sup>Paul Drude - The Theory of Optics - ed. Dover, Estados Unidos, 1959

onde  $k$  é a constante elástica da mola matemática e  $\vec{S}$  é o deslocamento do elétron relativamente à sua posição de equilíbrio; o sinal negativo deve-se ao fato de essa força ser sempre oposta ao deslocamento.

3) força de “amortecimento”

$$\vec{F}_3 = -b \vec{v}, \quad (37.9)$$

onde  $\vec{v}$  é a velocidade do elétron e  $b$  é um parâmetro; o sinal negativo indica que essa força sempre se opõe ao movimento. No caso de condutores, discutido anteriormente, essa força de amortecimento era devida à resistência ao movimento dos elétrons e correspondia a uma dissipação de energia por efeito Joule. No caso de dielétricos, essa força de *amortecimento* é devida ao fato de os átomos poderem absorver e reirradiar uma parte da energia da onda eletromagnética em outras direções ou com outras frequências. Esse processo corresponde, assim, a uma diminuição da energia *da onda considerada*, justificando o nome amortecimento.

### • o movimento do elétron

No modelo de Drude, a lei de Newton determina a equação de movimento de um elétron atômico em torno da sua posição de equilíbrio. Assim, escrevemos

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = -k S - b \frac{dS}{dt} - e E_0 \cos(\omega t - \kappa y). \quad (37.10)$$

Esta equação diferencial é análoga à do circuito RLC forçado. Sua solução, como vimos anteriormente, é dada por um termo transitório e um permanente. Este último tem a forma geral

$$S = A \cos(\omega t - \kappa y + \delta). \quad (37.11)$$

As constantes  $A$  e  $\delta$  são determinadas impondo que esta expressão satisfaça a equação (37.10). Temos, portanto

$$\begin{aligned} & -m\omega^2 A \cos(\omega t - \kappa y + \delta) \\ & = -kA \cos(\omega t - \kappa y + \delta) + b\omega A \sin(\omega t - \kappa y + \delta) - e E_0 \cos(\omega t - \kappa y). \end{aligned} \quad (37.11)$$

As expressões do seno e do cosseno da soma de dois ângulos fornecem

$$\begin{aligned} & [A(-m\omega^2 + k) \cos \delta - b\omega A \sin \delta + eE_0] \cos(\omega t - \kappa y) \\ & + [-A(-m\omega^2 + k) \sin \delta - b\omega A \cos \delta] \sin(\omega t - \kappa y) = 0. \end{aligned} \quad (37.11)$$

Para que esta equação seja válida para valores de  $t$  genéricos, os coeficientes do seno e do cosseno devem ser nulos e obtemos

$$A (m\omega^2 - k) \cos \delta + b\omega A \sin \delta = eE, \quad (37.12)$$

$$(m\omega^2 - k) \sin \delta - b\omega \cos \delta = 0. \quad (37.13)$$

A defasagem  $\delta$  é determinada pela segunda equação, como

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{b\omega}{m\omega^2 - k} \quad (37.14)$$

e, conseqüentemente,

$$\operatorname{sen} \delta = \frac{b\omega}{\sqrt{(m\omega^2 - k)^2 + b^2\omega^2}} \quad (37.15)$$

$$\operatorname{cos} \delta = \frac{m\omega^2 - k}{\sqrt{(m\omega^2 - k)^2 + b^2\omega^2}} \quad (37.16)$$

Substituindo esses valores na eq. (37.14), obtemos a amplitude da oscilação

$$A = \frac{eE_0}{\sqrt{(m\omega^2 - k)^2 + b^2\omega^2}}. \quad (37.17)$$

A interpretação física destes resultados fica mais clara se os expressarmos em termos de  $\omega_0$ , a frequência na qual o elétron oscilaria se as forças devidas ao campo da onda ( $\vec{F}_1$ ) e de amortecimento ( $\vec{F}_3$ ) não existissem. Essa frequência  $\omega_0$  é a chamada frequência natural de oscilação, dada por

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (37.18)$$

Estes resultados permitem-nos concluir que, sob a ação da onda eletromagnética, o elétron oscila em torno da sua posição de equilíbrio, segundo a equação

$$\vec{S}(\omega) = \frac{e\vec{E}_0}{\sqrt{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2}} \cos(\omega t - \kappa y + \delta), \quad (37.19)$$

onde

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{b\omega}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}. \quad (37.20)$$

Antes de prosseguir, é interessante notar que estes resultados são bastante parecidos com os obtidos para metais, dados pelas eqs. (35.20) e (35.16), e se reduzem matematicamente àqueles quando  $\omega_0 \rightarrow 0$ . Esta condição corresponde a fazer  $\kappa \rightarrow 0$  e indica que, no âmbito do modelo de Drude, a principal diferença entre metais e dielétricos são as forças restauradoras, nestes últimos, representadas por molas matemáticas.

• a densidade de corrente

A densidade de corrente está relacionada à velocidade dos elétrons por

$$\vec{j} = -e N \vec{v}, \quad (37.20)$$

onde  $N$  é o número de elétrons que se movem por unidade de volume. A velocidade  $\vec{v}$  é determinada a partir da eq. (37.19). Obtemos, então,

$$\begin{aligned} \vec{j} &= -e N \frac{d\vec{S}}{dt} \\ &= e N \omega \frac{e\vec{E}_0}{\sqrt{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2}} \text{sen}(\omega t - \kappa y + \delta) \\ &= \frac{Ne^2\omega \vec{E}_0}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2} [b\omega \cos(\omega t - \kappa y) + m(\omega^2 - \omega_0^2)\text{sen}(\omega t - \kappa y)]. \end{aligned} \quad (37.19)$$

Na última passagem, desenvolvemos o seno da soma de dois ângulos e usamos as eqs. (37.15) e (37.16). A relação entre  $\vec{j}$  e o campo é estabelecida usando

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \kappa y) \quad (37.20)$$

e

$$\frac{d\vec{E}}{dt} = -\omega \vec{E}_0 \text{sen}(\omega t - \kappa y). \quad (37.21)$$

Substituindo esses valores na eq. (37.19), obtemos

$$\vec{j} = \frac{Ne^2b\omega^2}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2} \vec{E} - \frac{Ne^2m(\omega^2 - \omega_0^2)}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2} \frac{d\vec{E}}{dt}. \quad (37.22)$$

Este resultado determina o comportamento de ondas eletromagnéticas no interior de dielétricos.

• campos no interior do dielétrico

Consideramos a lei de Ampère-Maxwell, que é dada por

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= \mu_0 \frac{Ne^2b\omega^2}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2} \vec{E} + \mu_0 \left[ \varepsilon_0 - \frac{Ne^2m(\omega^2 - \omega_0^2)}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2} \right] \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= \mu_0 g(\omega) \vec{E} + \mu_0 \varepsilon(\omega) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (37.21)$$

sendo  $g(\omega)$  e  $\varepsilon(\omega)$  funções dadas por

$$g(\omega) = \frac{Ne^2b\omega^2}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2}, \quad (37.22)$$

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - \frac{Ne^2m(\omega^2 - \omega_0^2)}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2}. \quad (37.23)$$

A eq. (37.21) é formalmente semelhante à expressão do rotacional de  $\vec{B}$  no caso de ondas em condutores, dada pela eq. (35.24). É preciso notar, entretanto, que essas expressões são, de fato, diferentes, uma vez que as funções  $g(\omega)$  e  $\varepsilon(\omega)$  não são as mesmas em ambos os casos, devido à presença de  $\omega_0$ , como podemos verificar comparando as eqs. (37.22) e (37.23) com as eqs. (35.25) e (35.26).

Desejamos, agora, obter as expressões dos campos elétrico e magnético no interior de dielétricos.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (37.24)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (37.25)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 g(\omega) \vec{E} + \mu_0 \varepsilon(\omega) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (37.26)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (37.27)$$

Essas equações são formalmente as mesmas que as usadas no caso dos condutores, eqs. (35.32 - 35.35). Por isso, as mesmas manipulações efetuadas naquele caso levam a equações de onda para os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , idênticas às eqs. (35.33) e (35.37). Consequentemente, as suas soluções são formalmente idênticas, ficando as diferenças entre os casos de metais e dielétricos restritos à forma das funções  $g(\omega)$  e  $\varepsilon(\omega)$ . Assim, as eqs. (35.48 - 35.55)

permitted-nos escrever

$$\vec{E}(y, t) = \vec{E}_0 e^{-\beta y} \cos(ky - \omega t), \quad (37.28)$$

$$\vec{B}(y, t) = \vec{B}_0 e^{-\beta y} \cos(ky - \omega t + \phi + \eta), \quad (37.29)$$

$$\vec{B}_0 = \frac{\sqrt{k^2 + \beta^2}}{\omega} (\vec{j} \times \vec{E}_0), \quad (37.30)$$

$$\text{tg } \eta = \frac{\beta}{k}, \quad (37.31)$$

$$k = \sqrt{\mu_0 \omega} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2(\omega) + \frac{g^2(\omega)}{\omega^2}}}, \quad (37.32)$$

$$\beta = \frac{\mu_0 g(\omega)}{2k} \omega, \quad (37.33)$$

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - \frac{Ne^2 m(\omega^2 - \omega_0^2)}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2 \omega^2}, \quad (37.34)$$

$$g(\omega) = \frac{Ne^2 b \omega^2}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2 \omega^2}. \quad (37.35)$$

Como no caso dos metais, as ondas em dielétricos também envolvem termos correspondentes a amortecimento e a oscilação. Existem, entretanto, duas importantes diferenças entre os dois casos. A primeira delas refere-se à causa do amortecimento em cada um deles.

O amortecimento da onda, no caso de metais, é devido à dissipação de energia por efeito Joule, causada pelo “atrito” dos elétrons livres com os íons que constituem o meio, enquanto que, no caso de dielétricos, o amortecimento deve-se ao fato de os átomos da substância poderem absorver e reirradiar a energia da onda. A outra é que, em dielétricos, as funções  $k(\omega)$  e  $\beta(\omega)$ , responsáveis pela propagação e pelo amortecimento, respectivamente, envolvem a frequência natural de oscilação  $\omega_0$  e, por isso, podem ocorrer ressonâncias entre a onda e o meio.

### • a espessura de penetração em dielétricos

O mecanismo de absorção-reemissão de energia é responsável pelas características ópticas de substâncias dielétricas, tais como cor, opacidade ou transparência, que são determinadas pela relação entre a frequência da onda e a frequência natural de oscilação da substância. Um material será transparente se as ondas forem pouco amortecidas em seu interior; caso contrário, ele será opaco.

Para evidenciar o papel de  $f_0$ , a frequência natural de oscilação do dielétrico, que é consequência das forças restauradoras, estudamos a espessura de penetração de ondas eletromagnéticas em uma substância dielétrica. Como no caso da prata, precisamos calcular

numericamente as funções  $\varepsilon(\omega)$  e  $g(\omega)$ , dada pelas eqs. (37.33) e (37.34) e, em seguida, empregar estes valores na expressão

$$\delta = \frac{2}{\sqrt{\mu_0} g(\omega)} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2(\omega) + \frac{g^2(\omega)}{\omega^2}}} \quad (37.36)$$

que é a mesma da eq. (36.2). Os valores numéricos das constantes  $\varepsilon_0$ ,  $\mu_0$ ,  $m$  e  $e$  são as mesmas utilizadas na aula anterior. Os parâmetros  $N$  e  $b$ , por outro lado, são características do material e, em princípio, deveriam ser diferentes dos utilizados para descrever a prata. Entretanto, com a finalidade pedagógica de obter valores diretamente comparáveis com os da tabela 36.1, empregamos os mesmos valores de  $N$  e  $b$  usados naquele caso. Como consequência, o dielétrico considerado aqui não corresponde a nenhum material real. Para a frequência natural, escolhemos  $f_0 = 5,00 \times 10^{14}$  Hz, no interior do espectro visível, que vai de  $4,00 \times 10^{14}$  Hz (vermelho) até  $7,90 \times 10^{14}$  H (violeta). As previsões do modelo para  $\varepsilon(\omega)$ ,  $g(\omega)$  e a espessura de penetração neste dielétrico são dadas na tabela 37.1.

Região do espectro	f[s <sup>-1</sup> ]	g(ω) [Ω <sup>-1</sup> m <sup>-1</sup> ]	ε(ω) [C <sup>2</sup> s <sup>2</sup> kg <sup>-1</sup> m <sup>-3</sup> ]	δ(ω) [m]
-	0	0	2,06 × 10 <sup>-10</sup>	∞
ondas longas	1	2,47 × 10 <sup>-26</sup>	2,06 × 10 <sup>-10</sup>	1,04 × 10 <sup>24</sup>
ondas longas	10 <sup>3</sup>	2,47 × 10 <sup>-20</sup>	2,06 × 10 <sup>-10</sup>	1,04 × 10 <sup>18</sup>
AM	10 <sup>6</sup>	2,47 × 10 <sup>-14</sup>	2,06 × 10 <sup>-10</sup>	1,04 × 10 <sup>12</sup>
FM, TV	10 <sup>9</sup>	2,47 × 10 <sup>-8</sup>	2,06 × 10 <sup>-10</sup>	1,04 × 10 <sup>6</sup>
infravermelho	10 <sup>12</sup>	2,47 × 10 <sup>-2</sup>	2,06 × 10 <sup>-10</sup>	1,04
infravermelho	10 <sup>13</sup>	2,47	2,07 × 10 <sup>-10</sup>	1,04 × 10 <sup>-2</sup>
infravermelho	10 <sup>14</sup>	2,68 × 10 <sup>2</sup>	2,15 × 10 <sup>-10</sup>	9,74 × 10 <sup>-5</sup>
infravermelho	2 × 10 <sup>14</sup>	1,40 × 10 <sup>3</sup>	2,44 × 10 <sup>-10</sup>	1,99 × 10 <sup>-5</sup>
infravermelho	3 × 10 <sup>14</sup>	5,43 × 10 <sup>3</sup>	3,18 × 10 <sup>-10</sup>	5,85 × 10 <sup>-6</sup>
vermelho	4,42 × 10 <sup>14</sup>	1,01 × 10 <sup>5</sup>	9,16 × 10 <sup>-10</sup>	5,34 × 10 <sup>-7</sup>
f <sub>0</sub>	5,00 × 10 <sup>14</sup>	6,23 × 10 <sup>7</sup>	8,85 × 10 <sup>-12</sup>	2,85 × 10 <sup>-9</sup>
amarelo	5,17 × 10 <sup>14</sup>	1,35 × 10 <sup>6</sup>	-2,78 × 10 <sup>-9</sup>	5,19 × 10 <sup>-9</sup>
verde	5,66 × 10 <sup>14</sup>	9,99 × 10 <sup>4</sup>	-6,92 × 10 <sup>-10</sup>	9,53 × 10 <sup>-9</sup>
azul	6,37 × 10 <sup>14</sup>	2,58 × 10 <sup>4</sup>	-3,08 × 10 <sup>-10</sup>	1,26 × 10 <sup>-8</sup>
violeta	7,28 × 10 <sup>14</sup>	1,04 × 10 <sup>4</sup>	-1,68 × 10 <sup>-10</sup>	1,50 × 10 <sup>-8</sup>
ultravioleta	10 <sup>15</sup>	2,75 × 10 <sup>3</sup>	-5,70 × 10 <sup>-11</sup>	1,88 × 10 <sup>-8</sup>
ultravioleta	10 <sup>16</sup>	1,55 × 10 <sup>1</sup>	8,36 × 10 <sup>-12</sup>	3,32 × 10 <sup>-4</sup>
raios X	10 <sup>18</sup>	1,55 × 10 <sup>-3</sup>	8,85 × 10 <sup>-12</sup>	3,44 × 10 <sup>0</sup>
raios γ	10 <sup>21</sup>	1,55 × 10 <sup>-9</sup>	8,85 × 10 <sup>-12</sup>	3,44 × 10 <sup>6</sup>
raios γ	10 <sup>24</sup>	1,55 × 10 <sup>-15</sup>	8,85 × 10 <sup>-12</sup>	3,44 × 10 <sup>12</sup>
-	∞	0	8,85 × 10 <sup>-12</sup>	∞

Tabela 37.1: Previsões do modelo de Drude para ondas eletromagnéticas em dielétricos.

A interpretação destes resultados fica mais fácil se pensarmos o espectro de frequências como dividido em três grandes regiões. A primeira delas envolve as frequências abaixo

do infravermelho, com  $f \leq 10^{12}$  Hz a segunda incorpora o espectro visível, com  $10^{12}$  Hz  $< f < 10^{16}$  Hz, e a terceira refere-se a frequência acima do ultravioleta, com  $f \geq 10^{16}$  Hz.

### • a região de frequências altas

No caso deste dielétrico fictício, os resultados para a região de frequências mais altas são os mesmos que os obtidos no caso da prata e mostrados na tabela 36.1. Isto ocorre porque, para grandes frequências, valem as aproximações  $(\omega^2 - \omega_0^2) \rightarrow \omega^2$  e  $(m^2\omega^2 + b^2) \rightarrow m^2\omega^2$ , o que faz com que tanto as eqs. (35.54) e (35.55), válidas para metais, como as eqs. (37.33) e (37.34), válidas para dielétricos, convirjam para os mesmos limites, dados por

$$\varepsilon(\omega) \rightarrow \varepsilon_0 - \frac{N e^2}{m \omega^2} \quad \text{e} \quad g(\omega) = \frac{N e^2 b}{m \omega^2}. \quad (37.37)$$

Nestes resultados, a inércia dos elétrons desempenha um papel importante, pois é ela que impede que os seus movimentos acompanhem oscilações muito rápidas de uma onda. É por este motivo, também, que as espessuras de penetração tornam-se maiores à medida que as frequências aumentam.

### • a região de frequências baixas

Na região de baixas frequências, os comportamentos de dielétricos e metais são muito diferentes. Enquanto que as espessuras de penetração de ondas em metais são da ordem ou menores do que milímetros, em dielétricos elas podem ser superiores a milhares de quilômetros. Isto explica porque podemos ouvir rádio ou ver TV no interior de edifícios, mesmo com portas e janelas fechadas.

Do ponto de vista formal, isto ocorre porque as eqs. (37.33) e (37.34) podem ser aproximadas por

$$\varepsilon(\omega) \rightarrow \varepsilon(\omega = 0) = \varepsilon_0 + \frac{N e^2}{m \omega_0^2} \quad (37.38)$$

e

$$g(\omega) \rightarrow \frac{N e^2 b}{m \omega_0^4} \omega^2. \quad (37.39)$$

Esta última equação indica que  $g(\omega = 0)$ , a condutividade do dielétrico, é nula, como se espera. Usando estes resultados na eq.(37.35), encontramos

$$\delta(\omega) \simeq \left[ \frac{2 m^2 \omega_0^2}{N e^2 b} \frac{\sqrt{\varepsilon(\omega = 0)}}{\sqrt{\mu_0}} \right] \frac{1}{\omega^2}, \quad (37.40)$$

onde o termo entre colchetes é uma constante.

• a região visível

O amortecimento de uma onda eletromagnética é caracterizado pela função  $g(\omega)$ , que tem seu valor máximo quando  $\omega$  é igual a  $\omega_0$ , expressando o fato que a absorção da energia é máxima quando o dielétrico e a onda ressoam. Na frequência de ressonância, temos

$$\varepsilon(\omega_0) = \varepsilon_0 \quad \text{e} \quad g(\omega_0) = \frac{N e^2}{b} \quad (37.41)$$

e a equação (37.35) fornece o valor mínimo da espessura de penetração, dado por

$$\delta(\omega_0) = \frac{2 m^2}{N e^2 b} \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_0}}. \quad (37.42)$$

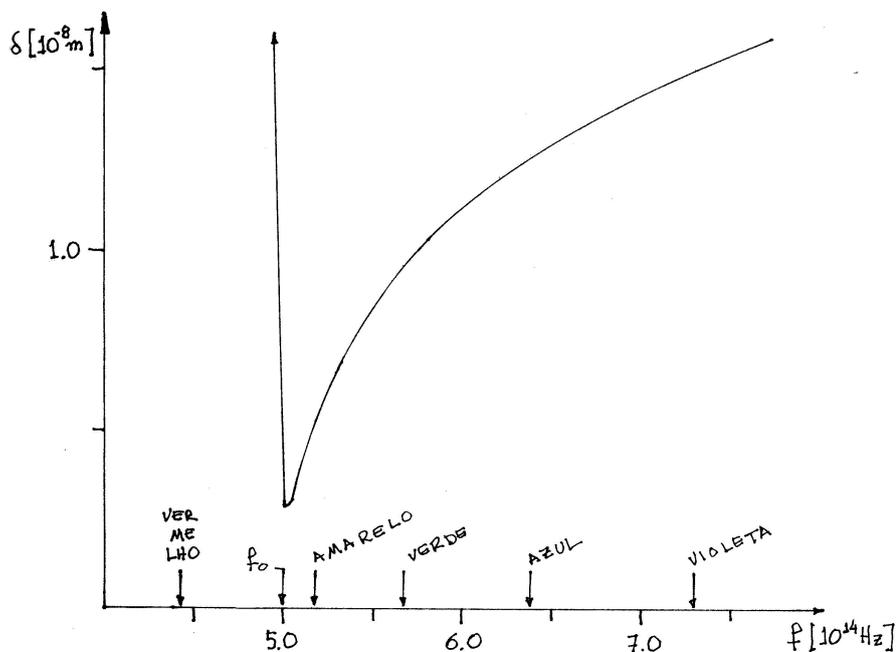


Figura 37.1:

O comportamento de  $\delta$ , em função da frequência, na parte visível do espectro, é mostrado na figura 37.1. Na região do vermelho, ondas podem penetrar distâncias bastante grandes, maiores do que as que podem ser mostradas na figura. A espessura de penetração tem um mínimo em  $f_0 = 5.0 \times 10^{14}$  Hz e para frequências maiores, aumenta gradativamente. Assim, o nosso dielétrico fictício é mais opaco para frequências próximas a  $f_0$  e é mais transparente para as demais.

A luz branca é composta por uma superposição de ondas monocromáticas, com frequências que vão desde o vermelho até o violeta. Por isso, se atirmos luz branca sobre uma

amostra do nosso dielétrico, ele nos parecerá como tendo a cor associada à frequência  $f_0$  que, neste exemplo, corresponde ao laranja. Por outro lado, se fizermos uma lâmina de dielétrico com a espessura de um milésimo de milímetros,  $10^{-6}\text{m}$ , e olhamos através dele, veremos apenas o vermelho. Estas situações estão indicadas na figura 37.2.

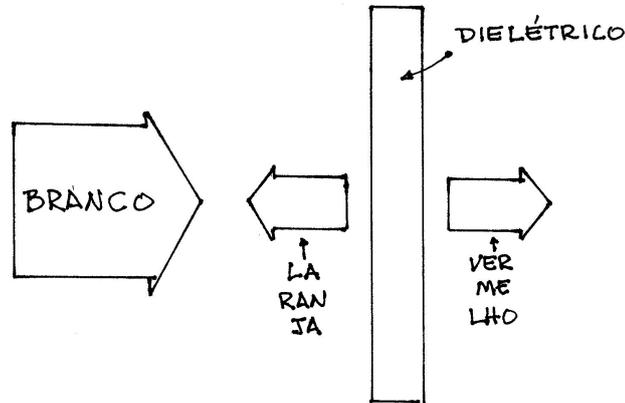


Figura 37.2:

## • dispersão

Uma outra característica importante de dielétricos é que a velocidade de propagação de ondas eletromagnéticas em seu interior depende da frequência. Essa velocidade é dada por

$$\begin{aligned}
 v(\omega) &= \frac{\omega}{k(\omega)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0} \sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon(\omega) + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^2(\omega) + \frac{g(\omega)^2}{\omega^2}}}}, \quad (37.42)
 \end{aligned}$$

onde  $k(\omega)$  é dado pela eq. (37.31).

Um meio no qual a velocidade de propagação de ondas depende da frequência é chamado de *dispersivo*. É essa propriedade que faz com que prismas de vidro decomponham luz branca, uma vez que o desvio de um raio de luz, ao cruzar a superfície ar-vidro, é dado pela lei de Snell que, neste caso, pode ser escrita como

$$\frac{1}{c} \text{sen } \theta_{ar} = \frac{1}{v(\omega)} \text{sen } \theta_{vidro}. \quad (37.43)$$

Nesta expressão,  $\theta$  representa o desvio do raio de luz em relação à normal de cada lado da superfície. Assim, o fato de a velocidade da onda no dielétrico depender da frequência

faz com que raios de luz de diferentes frequências sofram desvios diferentes, o que acarreta a decomposição da luz branca em suas diversas cores.

### • exercícios

1. A partir dos resultados da tabela 37.1, calcule a razão entre as velocidades de propagação de ondas eletromagnéticas no interior do dielétrico e no vácuo, para as frequências:

a)  $f = 10^9$  Hz

b)  $f = 10^{18}$  Hz

2. Os índices de refração medidos para o vidro são: (vermelho)  $f_1 = 4,42 \times 10^{14}$  Hz  $\rightarrow n_1 = 1,5135$ ; (amarelo)  $f_2 = 5,17 \times 10^{14}$  Hz  $\rightarrow n_2 = 1,5171$ ; (verde)  $f_3 = 5,66 \times 10^{14}$  Hz  $\rightarrow n_3 = 1,5195$ ; (azul)  $f_4 = 6,37 \times 10^{14}$  Hz  $\rightarrow n_4 = 1,5234$ ; (violeta)  $f_5 = 7,28 \times 10^{14}$  Hz  $\rightarrow n_5 = 1,5290$ . Como nesta região de frequências o vidro é bastante transparente, o coeficiente de amortecimento  $b$  pode ser desprezado.

a) Determine a razão  $\varepsilon(f)/\varepsilon_0$  para os cinco valores de  $f$ ;

b) Supondo que  $b = 0$ , a função  $\varepsilon(\omega)$ , eq. (37.33), depende de dois parâmetros relativos ao material, a densidade volumétrica  $N$  de elétrons e a frequência natural  $f_0$ ; determine estes parâmetros a partir dos índices de refração  $f_1$  e  $f_5$ ;

c) A partir dos resultados do item b, determine as previsões do modelo de Drude para  $n_2$ ,  $n_3$  e  $n_4$  e as compare com os resultados experimentais;

d) Pense um pouco sobre tudo isto!

### • respostas

1. a)  $7,85 \times 10^{-4}$ ;      b) 1.

2. a)  $\varepsilon_1/\varepsilon_0 = 2.2906$ ;       $\varepsilon_2/\varepsilon_0 = 2.3017$ ;       $\varepsilon_3/\varepsilon_0 = 2,3988$ ;       $\varepsilon_4/\varepsilon_0 = 2.3208$ ;  
 $\varepsilon_5/\varepsilon_0 = 2.3377$ .

b)  $f_0 = 3,1145 \times 10^{15}$  Hz, no ultravioleta;  $N = 1,5257 \times 10^{29} m^{-3}$ .

c)  $n_2 = 1.5167$ ;       $n_3 = 1.5191$ ;       $n_4 = 1.5231$ .

# Capítulo 38

## interfaces e condições de contorno

### • introdução

Muitos dos fenômenos observados no nosso dia-a-dia estão relacionados com a propagação de ondas eletromagnéticas e sua interação com a matéria. O processo de visão, as cores dos objetos, o azul do céu, a transparência de certos materiais são alguns dos muitos fenômenos relacionados à propagação e interação da luz com a matéria. A partir desta aula, estudamos o que ocorre quando uma onda eletromagnética incide em uma superfície que separa dois meios diferentes. Quando a luz solar ou de fontes artificiais atinge algum objeto e nós o enxergamos, é porque houve reflexão da luz na superfície do corpo. Muitos objetos são transparentes, indicando haver transmissão da luz através do material. Se, por exemplo, enxergamos um peixe em um lago, é porque a luz incidente penetrou na água, atingiu o peixe, foi refletida por ele e voltou aos nossos olhos. Se, além disto, conseguimos ver a superfície da água, é porque ali houve, também, reflexão da luz incidente.

Assim, quando uma onda luminosa atinge certo material, parte da radiação incidente é refletida na superfície de separação entre os meios (onda refletida) e parte penetra no material (onda refratada). Do ponto de vista microscópico, quando uma onda eletromagnética incide sobre um corpo, ela interage com os átomos, moléculas ou cargas livres do material que o constitui. O campo elétrico oscilante da onda incidente provoca a oscilação de cargas da substância e estas cargas, por estarem aceleradas, passam a ser novas fontes de radiação eletromagnética. A superposição das radiações emitidas pelas cargas oscilantes com a onda incidente determina a onda refletida e refratada. As características deste processo dependem dos meios nos quais as ondas se propagam, tais como, por exemplo, dos átomos que os constituem, dos seus arranjos moleculares, da existência ou não, de cargas livres.

Embora as idéias básicas envolvidas na descrição microscópica da interação da luz com a matéria sejam relativamente simples, seu tratamento matemático é complicado. Aqui,

estudamos a reflexão e refração da luz sob o ponto de vista do eletromagnetismo clássico, e as propriedades das ondas eletromagnéticas refletidas e refratadas numa superfície são obtidas diretamente através das equações de Maxwell.

### • as ondas refletida e refratada

O problema a ser resolvido consiste em, conhecida a onda incidente numa superfície, determinar as características das ondas refletida e transmitida. Ou, o que é equivalente, como obter os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  destas ondas, a partir dos campos da onda incidente. Neste estudo, consideramos uma onda plana monocromática, que se propaga no meio 1 e incide em um meio 2, como ilustra a figura 38.1.

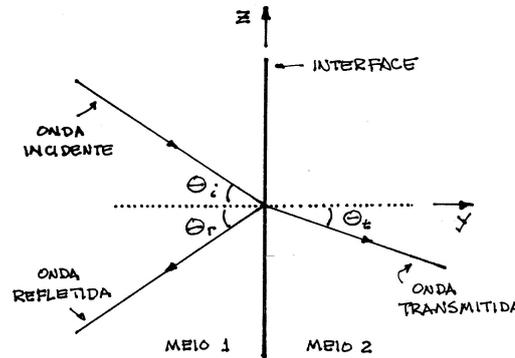


Figura 38.1: Uma onda incide na superfície de separação de dois meios, situado no plano  $y = 0$ , originando as ondas refletida e refratada.

Assim, para discutir a física das interfaces, precisamos, considerar três ondas diferentes, que se propagam em direções diferentes e em meios diferentes. Como as ondas refletida e transmitida são causadas pela incidente, as três ondas têm a mesma frequência  $\omega$ . A influência do meio foi discutida nas aulas 35 a 37, onde vimos que, para propagação na direção  $y$ , os campos elétrico e magnético de uma onda têm a forma

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\beta y} \cos(\kappa y - \omega t), \quad (38.1)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{-\beta y} \cos(\kappa y - \omega t + \eta), \quad (38.2)$$

$$\vec{B}_0 = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \beta^2}}{\omega} (\vec{j} \times \vec{E}_0) \quad (38.3)$$

Para descrever ondas que se propagam em direções quaisquer, utilizamos o vetor de onda  $\vec{k}$ , introduzido na aula 12. O módulo deste vetor depende do meio e a sua direção e sentido são os da propagação da onda. Por isso, no estudo de interfaces, existem três vetores de onda, dados por

$$\vec{k}_i = \kappa_1 \vec{u}_i, \quad (38.4)$$

$$\vec{k}_r = \kappa_1 \vec{u}_r, \quad (38.5)$$

$$\vec{k}_t = \kappa_2 \vec{u}_t, \quad (38.6)$$

onde  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  referem-se aos meios 1 e 2 e os versores  $\vec{u}$ , às ondas incidente, refletida e transmitida. Como os coeficientes de atenuação também dependem do meio, eles são representados por  $\beta_1$  e  $\beta_2$ . Usando estes resultados, podemos escrever as expressões para os campos das ondas incidente, refletida e transmitida numa superfície como segue

**meio 1 - onda incidente:**

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} e^{-\frac{\beta_1}{\kappa_1} \vec{\kappa}_i \cdot \vec{r}} \cos(\vec{\kappa}_i \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (38.7)$$

$$\vec{B}_i = \vec{B}_{0i} e^{-\frac{\beta_1}{\kappa_1} \vec{\kappa}_i \cdot \vec{r}} \cos(\vec{\kappa}_i \cdot \vec{r} - \omega t + \eta_1), \quad (38.8)$$

$$\vec{B}_{0i} = \frac{\sqrt{1 + \beta_1^2/\kappa_1^2}}{\omega} \vec{\kappa}_i \times \vec{E}_{0i}. \quad (38.9)$$

**meio 1 - onda refletida:**

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} e^{-\frac{\beta_1}{\kappa_1} \vec{k}_r \cdot \vec{r}} \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t + \phi), \quad (38.10)$$

$$\vec{B}_r = \vec{B}_{0r} e^{-\frac{\beta_1}{\kappa_1} \vec{k}_r \cdot \vec{r}} \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t + \phi + \eta_1), \quad (38.11)$$

$$\vec{B}_{0r} = \frac{\sqrt{1 + \beta_1^2/\kappa_1^2}}{\omega} \vec{k}_r \times \vec{E}_{0r}. \quad (38.12)$$

**meio 1:**

De acordo com o princípio da superposição, os campos elétrico e magnético, numa posição  $\vec{r}$  da região onde se propagam as ondas incidente e refletida, são dados por

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_i(\vec{r}, t) + \vec{E}_r(\vec{r}, t), \quad (38.13)$$

$$\vec{B}_1(\vec{r}, t) = \vec{B}_i(\vec{r}, t) + \vec{B}_r(\vec{r}, t), \quad (38.14)$$

com

$$\tan \eta_1 = \frac{\beta_1}{\kappa_1}, \quad (38.15)$$

$$\vec{\kappa}_1 = \sqrt{\mu_0 \omega} \sqrt{\frac{\varepsilon_1(\omega)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon_1^2(\omega) + \frac{g_1^2(\omega)}{\omega^2}}}, \quad (38.16)$$

$$\beta_1 = \frac{\mu_0 g_1(\omega) \omega}{2\kappa_1} \quad (38.17)$$

$$\varepsilon_1(\omega) = \frac{N_1 e^2 m (\omega^2 - \omega_{01}^2)}{m^2 (\omega^2 - \omega_{01}^2)^2 + b_1^2 \omega^2}, \quad (38.18)$$

$$g_1(\omega) = \frac{N_1 e^2 b \omega^2}{m^2 (\omega^2 - \omega_{01}^2)^2 + b_1^2 \omega^2}. \quad (38.19)$$

meio 2 - onda transmitida:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{-\frac{\beta_2}{\kappa_2} \vec{k}_t \cdot \vec{r}} \cos(\vec{\kappa}_t \cdot \vec{r} - \omega t + \gamma), \quad (38.20)$$

$$\vec{B}_t = \vec{B}_{0t} e^{-\frac{\beta_2}{\kappa_2} \vec{k}_t \cdot \vec{r}} \cos(\vec{\kappa}_t \cdot \vec{r} - \omega t + \gamma + \eta_2), \quad (38.21)$$

$$\vec{B}_{0t} = \frac{\sqrt{1 + \beta_2^2/\kappa_2^2}}{\omega} \vec{\kappa}_2 \times \vec{E}_{0t}. \quad (38.22)$$

meio 2:

No meio 2, há apenas os campos da onda refratada e, portanto,

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_t(\vec{r}, t), \quad (38.23)$$

$$\vec{B}_2(\vec{r}, t) = \vec{B}_t(\vec{r}, t), \quad (38.24)$$

com

$$\tan \eta_2 = \frac{\beta_2}{k_2}, \quad (38.25)$$

$$\vec{\kappa}_2 = \sqrt{\mu_0 \omega} \sqrt{\frac{\varepsilon_1(\omega)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon_1^2(\omega) + \frac{g_1^2(\omega)}{\omega^2}}}, \quad (38.26)$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_0 g_2(\omega) \omega}{2\kappa_2} \quad (38.27)$$

$$\varepsilon_2(\omega) = \frac{N_2 e^2 m (\omega^2 - \omega_{02}^2)}{m^2 (\omega^2 - \omega_{02}^2)^2 + b_2^2 \omega^2}, \quad (38.28)$$

$$g_2(\omega) = \frac{N_2 e^2 b \omega^2}{m^2 (\omega^2 - \omega_{02}^2)^2 + b_2^2 \omega^2}. \quad (38.29)$$

Estes resultados, válidos para dielétricos, indicam que as diferenças entre os meios 1 e 2 são devidas aos valores dos parâmetros  $N$ ,  $b$  e  $\omega_0$ , que se propagam para todas as demais estruturas matemáticas, até chegar aos campos. As expressões apropriadas a metais são totalmente análogas e podem ser obtidas a partir destas, fazendo  $\omega_0 \rightarrow 0$ .

### • condições de contorno

Numa interface, as ondas refletida e transmitida são produzidas pela onda incidente e, portanto, os campos  $(\vec{E}_r, \vec{B}_r)$  e  $(\vec{E}_t, \vec{B}_t)$  devem ser funções de  $(\vec{E}_i, \vec{B}_i)$ . Ou, o que é equivalente, os campos  $(\vec{E}_1, \vec{B}_1)$ , eqs. (38.13 - 38.14), e  $(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$ , eqs. (38.23 - 38.24), devem estar relacionados sobre a superfície que separa os dois meios. As condições que os campos devem obedecer na interface são chamadas de *condições de contorno*. Elas

decorrem da necessidade de os campos satisfazerem as equações de Maxwell, não apenas nas regiões 1 e 2, mas também, na superfície que as separa. Através destas condições de contorno determinamos os campos das ondas refletida e refratada.

São quatro as condições que os campos elétrico e magnético devem satisfazer na superfície de separação entre os meios, cada uma delas determinada por uma das equações de Maxwell. Para determiná-las, é conveniente usar as formas integrais, dadas por

$$\oiint_s \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \quad (\text{lei de Gauss - elétrica}) \quad (38.30)$$

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{c} = - \iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS, \quad (\text{lei de Faraday}) \quad (38.31)$$

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{c} = \iint_s \mu_0 \left( \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} dS, \quad (\text{lei de Ampère-Maxwell}) \quad (38.32)$$

$$\oiint_s \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0, \quad (\text{lei de Gauss - magnética}). \quad (38.33)$$

Para obter as condições de contorno, é conveniente explorar a forma matemática destas equações. Por isso, inicialmente, consideramos as leis escritas em termos de integrais de linha sobre caminhos fechados, eqs.(38.31) e (38.32), usando o caminho indicado na figura 38.2.

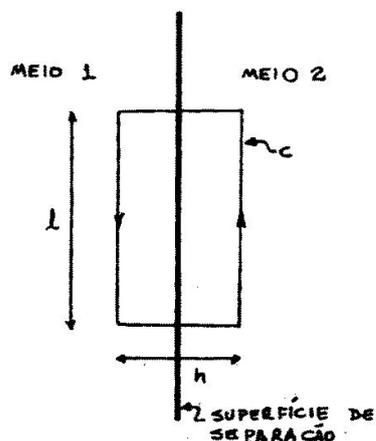


Figura 38.2: Caminho  $c$ , apoiado sobre o plano  $yz$ , com  $h \rightarrow 0$ , para obtenção das condições de contorno a partir das leis de Faraday e Ampère-Maxwell.

• **lei de Faraday** - A condição de contorno imposta pela lei de Faraday pode ser obtida através do cálculo da circuitação do campo elétrico na linha  $c$ , indicada na figura 38.2, no limite em que  $h \rightarrow 0$ . Neste limite, indicando por  $E_{//}$  a componente do campo elétrico

paralela à interface, escrevemos

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{c} = (E_{1//} - E_{2//}) \ell, \quad (38.34)$$

já que as contribuições proporcionais a  $h$  se anulam. Além disso, a superfície retangular cujo contorno é  $c$  tende a zero e, sendo o campo magnético finito, o fluxo de  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  através desta superfície é nulo. Portanto, a eq.(38.34) é nula e concluímos que a componente do campo elétrico paralela a superfície de separação dos meios é contínua:

$$E_{1//} = E_{2//}. \quad (38.35)$$

• **lei de Ampère-Maxwell** - O cálculo da integral de linha de  $\vec{B}$  no caminho  $c$  indicado na figura 38.2 leva à condição de contorno imposta pela lei de Ampère-Maxwell

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{c} = (B_{1//} - B_{2//}) \ell, \quad (38.36)$$

já que, no limite  $h \rightarrow 0$ , as contribuições proporcionais a  $h$  se anulam. Neste limite, a área  $S$  do lado direito da eq. (38.32) tende a zero e obtemos

$$B_{1//} = B_{2//}. \quad (38.37)$$

Notamos que, no caso de condutores ideais, a densidade  $\vec{j}$  na eq.(38.32) pode ser infinita e este resultado deve ser modificado.

Para obter as condições de contorno a partir das duas leis de Gauss, empregamos a superfície  $S$  indicada na figura 38.3. Iniciamos com a lei de Gauss do campo magnético, que é mais simples.

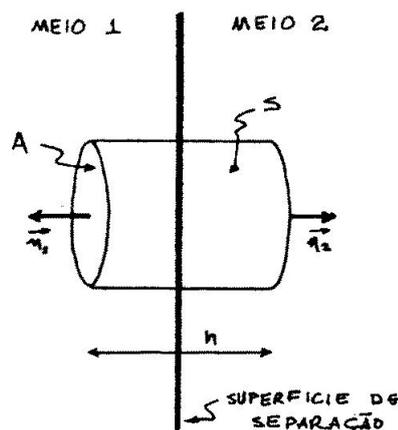


Figura 38.3: Superfície  $S$ , com  $h \rightarrow 0$ , para obtenção das condições de contorno a partir das leis de Gauss da eletricidade e do magnetismo.

• **lei de Gauss magnética** - A condição de contorno para a componente do campo magnético normal à interface é obtida através da eq.(38.33). No limite em que  $h \rightarrow 0$ , o

lado do cilindro da figura 38.3 não contribui e esta equação fornece

$$\oiint_s \vec{B} \cdot \vec{n} dS = [\vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2] A = 0. \quad (38.38)$$

Como  $\vec{n}_1$  e  $\vec{n}_2$  têm sentidos opostos, obtemos

$$B_{1\perp} = B_{2\perp}, \quad (38.39)$$

onde  $B_{\perp}$  indica componente do campo perpendicular à interface.

• **lei de Gauss elétrica** - No limite  $h \rightarrow 0$ , a lei de Gauss elétrica, eq. (38.31), aplicada à superfície mostrada na figura 38.3, fornece

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = [\vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2] A = [-E_{1\perp} + E_{2\perp}] A, \quad (38.40)$$

já que  $\vec{n}_1$  e  $\vec{n}_2$  são respectivamente antiparalelo e paralelo ao eixo  $y$ . Assim, obtemos

$$-E_{1\perp} + E_{2\perp} = \frac{Q}{A\epsilon_0}. \quad (38.41)$$

Por isso, para explorar a lei de Gauss elétrica, é preciso conhecer a carga  $Q$  contida na superfície. Isto acontece porque, no caso em que os campos elétricos possuem componentes perpendiculares à interface, eles arrastam cargas em direção a ela, fazendo com que lá apareça uma densidade de cargas. Esta densidade pode ser obtida aplicando a equação da continuidade à superfície da figura 38.3. Na forma integral, ela é escrita como

$$\oiint \vec{j} \cdot \vec{n} dS = -\frac{dQ}{dt}, \quad (38.42)$$

onde  $Q$  é a carga interna à superfície. No limite  $h \rightarrow 0$ , o fluxo de cargas através da superfície lateral do cilindro não contribui, obtemos

$$\oiint \vec{j} \cdot \vec{n} dS = [\vec{j}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{j}_2 \cdot \vec{n}_2] A = [-j_{1\perp} + j_{2\perp}] A, \quad (38.43)$$

e a eq. (38.42) permite escrever

$$Q = \int dt [j_{1\perp} - j_{2\perp}] A \quad (38.44)$$

No modelo de Drude, a densidade de corrente  $\vec{j}$  é dada pelas eq.(37.22). Usando as eqs.(37.22) e (37.23), ela pode ser colocada na forma

$$\vec{j} = g \vec{E} + (\epsilon - \epsilon_0) \frac{d\vec{E}}{dt}. \quad (38.45)$$

Usando esta expressão na eq. (38.44), obtemos

$$\begin{aligned} Q &= A \int dt \left\{ \left[ g_1 E_{1\perp} + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{dE_{1\perp}}{dt} \right] - \left[ g_2 E_{2\perp} + (\epsilon_2 - \epsilon_0) \frac{dE_{2\perp}}{dt} \right] \right\} \\ &= A \left\{ \left[ g_1 \int dt E_{1\perp} \right] + [(\epsilon_1 - \epsilon_0) E_{1\perp}] - \left[ g_2 \int dt E_{2\perp} \right] + [(\epsilon_2 - \epsilon_0) E_{2\perp}] \right\} \end{aligned} \quad (38.45)$$

Substituindo este resultado na eq.(38.40), temos

$$\begin{aligned} -E_{1\perp} + E_{2\perp} &= \left[ \frac{g_1}{\varepsilon_0} \int dt E_{1\perp} \right] + \left[ \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1 \right) E_{1\perp} \right] \\ &- \left[ \frac{g_2}{\varepsilon_0} \int dt E_{2\perp} \right] + \left[ \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} - 1 \right) E_{2\perp} \right], \end{aligned} \quad (38.45)$$

que fornece a condição de contorno

$$\varepsilon_1 E_{1\perp} + g_1 \int dt E_{1\perp} = \varepsilon_2 E_{2\perp} + g_2 \int dt E_{2\perp}. \quad (38.46)$$

### • condições de contorno - resumo

As condições de contorno que as quatro equações de Maxwell impõem aos campos elétrico e magnético, numa superfície que separa dois meios 1 e 2, são expressas por

$$E_{1//} = E_{2//}, \quad (38.47)$$

$$\varepsilon_1 E_{1\perp} + g_1 \int dt E_{1\perp} = \varepsilon_2 E_{2\perp} + g_2 \int dt E_{2\perp}, \quad (38.48)$$

$$B_{1//} = B_{2//}, \quad (38.49)$$

$$B_{1\perp} = B_{2\perp}. \quad (38.50)$$

É muito importante notar que estes resultados são válidos apenas *sobre* a interface de separação entre os dois meios. No sistema de coordenadas da fig. 38.1, estes pontos correspondem aos vetores da forma

$$\vec{r} = x\vec{i} + z\vec{k}, \quad (38.51)$$

com  $x$  e  $z$  quaisquer, já que a interface está no plano  $y = 0$ . Eles indicam que as componentes  $E_{//}$ ,  $B_{//}$  e  $B_{\perp}$  são contínuas sobre a interface, enquanto que  $E_{\perp}$  é descontínua. Esta descontinuidade de  $E_{\perp}$  precisa ser considerada com atenção, pois ela está associada, entre outras coisas, à refração da luz, ou seja, pelos desvios que ela sofre quando passa de um meio para outro.

A forma da eq.(38.48) é um pouco complicada, devido às integrais dos campos, que multiplicam as funções  $g$ . O tratamento deste tipo de equação pode ser simplificado com o uso de números complexos, que serão discutidos na aula 39.

# Capítulo 39

## extensões complexas

Os resultados obtidos na aula 38 são muito importantes, pois eles permitem-nos conhecer os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  das ondas refletida e transmitida em uma interface, a partir da onda incidente. Deste modo, eles permitem-nos, também, determinar a fração da energia que penetra no material. Para obter este tipo de informação, é preciso operar com os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  dadas pelas eqs. (38.6) - (38.20), que são bastante pesadas. Entretanto, a álgebra envolvida neste tipo de trabalho poder ser muito simplificada, se usarmos uma notação complexa. Como os campos elétricos e magnéticos das ondas são descritos por combinações de funções seno e cosseno, é conveniente representá-los por exponenciais complexas. Devemos ter em mente que os campos físicos, que existem de fato, são dados pela parte real destas funções complexas.

### • a notação complexa

O emprego de números complexos é bastante comum em física, pois ele permite simplificar muitos cálculos e expressar resultados complicados de forma compacta. Neste curso, já utilizamos o conceito de impedância, na aula 6. Agora, discutimos a descrição de ondas por meio da notação complexa que, em geral, é adotada em cursos mais avançados.

Atualmente, números complexos são usados em todas as áreas da física e é interessante notar que a equação de Schrödinger, básica na mecânica quântica não-relativística e considerada uma lei física, é escrita como

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \psi = i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

e inclui, explicitamente, um  $i$ .

A extensão dos resultados da aula 38 para a notação complexa é simples. No caso de uma onda plana e monocromática, que se propaga em uma direção qualquer, fazemos

$$F(x, y, z, t) = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \phi) \rightarrow \mathcal{F}(x, y, z, t) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \phi)} \quad (39.0)$$

e, quando desejamos recuperar as grandezas que descrevem o mundo físico, tomamos a parte real de  $\mathcal{F}$ . A seguir, apresentamos alguns exemplos do poder da notação complexa, refazendo cálculos já apresentados nas aulas 35-37, onde foi discutido o modelo de Drude.

### • exemplo 1

Na aula 37, foi preciso resolver a equação diferencial (37.99), que descreve a oscilação de um elétron em torno de sua posição média, dada por

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = -kS - b \frac{dS}{dt} - e E_0 \cos(\omega t). \quad (39.1)$$

Substituindo a extensão complexa do campo

$$E_0 \cos(\omega t) \rightarrow E_0 e^{i(\omega t)}, \quad (39.2)$$

e do deslocamento

$$S \rightarrow \mathcal{S} = A e^{i(\omega t + \delta)}, \quad (39.3)$$

na eq.(39.1) e cancelando o fator comum  $e^{i(\omega t)}$ , obtemos

$$A e^{i\delta} [(m\omega^2 - k) - i\omega b] = e E_0. \quad (39.4)$$

Expressando o termo entre colchetes em coordenadas polares, temos

$$[(m\omega^2 - k) - i\omega b] = \sqrt{(m\omega^2 - k)^2 + (\omega b)^2} e^{-i\theta}, \quad (39.5)$$

$$\tan \theta = \frac{(\omega b)}{(m\omega^2 - k)}, \quad (39.6)$$

e a solução da eq.(39.4) é

$$A = \frac{e E_0}{\sqrt{(m\omega^2 - k)^2 + (\omega b)^2}}, \quad (39.7)$$

$$\delta = \theta \rightarrow \tan \delta = \frac{(\omega b)}{(m\omega^2 - k)}. \quad (39.8)$$

Finalmente, a parte real de  $\mathcal{S}$ , que representa a oscilação física, é dada por

$$\mathcal{S} = A e^{i(\omega t + \delta)} \rightarrow S = A \cos(\omega t + \delta). \quad (39.9)$$

Estes são os resultados (??), (??) e (??) obtidos, agora, com menor esforço.

### • exemplo 2

Num certo ponto da aula 35, deparamo-nos com o problema de resolver a equação diferencial (??), escrita como

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} - \mu_0 \varepsilon(\omega) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 g(\omega) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (39.10)$$

onde  $\vec{E} = E\vec{k}$  e  $E$  é a intensidade do campo. Para tanto, naquela aula, adotamos a forma

$$E(y, t) = E_0 e^{-\beta y} \cos(\kappa y - \omega t). \quad (39.11)$$

e impusemos que ela deveria satisfazer a eq.(35.99). Depois de vários cálculos, obtivemos as soluções (35.99) e (35.99), dadas por

$$\kappa = \sqrt{\mu_0} \omega \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2(\omega) + \frac{g^2(\omega)}{\omega^2}}}, \quad (39.12)$$

$$\beta = \frac{\mu_0 g(\omega) \omega}{2\kappa}. \quad (39.13)$$

Para resolver novamente a eq.(39.10) usando funções complexas, consideramos a extensão da eq.(39.11)

$$E(y, t) \rightarrow \mathcal{E}(y, t) = E_0 e^{-\beta y} e^{i(\kappa y - \omega t)}. \quad (39.14)$$

Olhando com atenção essa expressão, notamos que podemos torná-la ainda mais compacta, reescrevendo-a como

$$E(y, t) \rightarrow \mathcal{E}(y, t) = E_0 e^{i[(\kappa + i\beta)y - \omega t]}. \quad (39.15)$$

Isso sugere que é também conveniente considerar a extensão complexa do número de onda

$$\kappa \rightarrow \mathcal{K} = \kappa + i\beta, \quad (39.16)$$

o que nos permite usar a forma

$$E(y, t) \rightarrow \mathcal{E}(y, t) = E_0 e^{i[\mathcal{K}y - \omega t]}. \quad (39.17)$$

Substituindo  $\mathcal{E}(y, t)$  em (39.11), encontramos a condição

$$\mathcal{K}^2 - \mu_0 \omega^2 \varepsilon(\omega) + i \mu_0 \omega g(\omega) = 0. \quad (39.18)$$

Definindo a extensão complexa

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon(\omega) + i \frac{g(\omega)}{\omega}, \quad (39.19)$$

a eq.(39.18) pode ser escrita como

$$\mathcal{K}^2 = \mu_0 \omega^2 \hat{\varepsilon}(\omega). \quad (39.20)$$

Usando (39.16), obtemos duas identidades,

$$\kappa^2 - \beta^2 = \mu_0 \omega^2 \varepsilon(\omega) \quad \text{e} \quad 2\beta\kappa = \mu_0 \omega g(\omega), \quad (39.21)$$

que levam diretamente à solução do problema, dada pelas eqs.(39.12) e (39.13).

### • exemplo 3

Neste exemplo, tratamos da relação entre os campos elétrico e magnético, obtida a partir da lei de Faraday e de sua extensão complexa

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}. \quad (39.22)$$

Usando  $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}(y, t) \vec{k}$ , obtemos  $\vec{\mathcal{B}} = \mathcal{B}(y, t) \vec{i}$  e

$$\frac{\partial \mathcal{B}(y, t)}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{E}(y, t)}{\partial y}, \quad (39.23)$$

temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(y, t) &= -\int dt \frac{\partial \mathcal{E}(y, t)}{\partial y} = -\int dt i \mathcal{K} E_0 e^{i[\mathcal{K}y - \omega t - \theta]} \\ &= \frac{\mathcal{K}}{\omega} E_0 e^{i[\mathcal{K}y - \omega t - \theta]} = \frac{\mathcal{K}}{\omega} \mathcal{E}(y, t). \end{aligned} \quad (39.23)$$

Para recuperar a relação entre as grandezas físicas, basta tomar a parte real dos dois lados dessa equação. Antes de fazer isso, entretanto, é conveniente lembrar que  $\mathcal{K}$  é um número complexo e, portanto, carrega uma fase. Para explicitá-la, passamos para coordenadas polares, escrevendo

$$\mathcal{K} = \kappa + i\beta = \sqrt{\kappa^2 + \beta^2} e^{i\eta} \quad (39.24)$$

$$\tan \eta = \beta/\kappa. \quad (39.25)$$

Assim, a eq.(38.23) fica dada por

$$\mathcal{B}(y, t) = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \beta^2}}{\omega} E_0 e^{i[\mathcal{K}y - \omega t + \theta + \eta]} = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \beta^2}}{\omega} E_0 e^{-\beta y} e^{i[\kappa y - \omega t + \theta + \eta]}. \quad (39.26)$$

Tomando a sua parte real, obtemos

$$B(y, t) = B_0 e^{-\beta y} \cos[\kappa y - \omega t + \theta + \eta], \quad (39.27)$$

$$B_0 = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \beta^2}}{\omega} E_0, \quad (39.28)$$

que são os resultados dados na aula 35, eqs.(??) e (??).

### • exemplo 4

Nos exemplos anteriores, discutimos extensões complexas de movimentos na direção  $y$ . Para generalizar esses resultados para o caso de propagação numa direção qualquer, determinada pelo versor  $\vec{u}$ , definimos, como na eq.(37.11), um vetor de onda complexo  $\vec{\mathcal{K}}$  por

$$\vec{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \vec{u} \quad (39.29)$$

e substituímos o fator  $\mathcal{K}y$  nos argumentos por  $\vec{\mathcal{K}} \cdot \vec{r}$ .

• **a extensão complexa dos campos**

Usando a notação complexa, os campos das ondas incidente, refletida e transmitida, dados pelas eqs.(38.7) - (38.21), podem ser reescritos como

**meio 1 - onda incidente:**

$$\vec{\mathcal{E}}_i = \vec{E}_{0i} e^{i(\vec{\mathcal{K}}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (39.30)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_i = \frac{\vec{\mathcal{K}}_i \times \vec{\mathcal{E}}_i}{\omega} \quad (39.31)$$

**meio 1 - onda refletida:**

$$\vec{\mathcal{E}}_r = \vec{\mathcal{E}}_{0r} e^{i(\vec{\mathcal{K}}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (39.32)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{0r} = \vec{E}_{0r} e^{i\phi_r} \quad (39.33)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_r = \frac{\vec{\mathcal{K}}_r \times \vec{\mathcal{E}}_r}{\omega} \quad (39.34)$$

**meio 1:**

No meio em que as ondas incidente e refletida se propagam, o campo elétrico total é dado pela superposição

$$\vec{\mathcal{E}}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_{0i} e^{i(\vec{\mathcal{K}}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{\mathcal{E}}_{0r} e^{i(\vec{\mathcal{K}}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (39.35)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_1(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{B}}_{0i} e^{i(\vec{\mathcal{K}}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{\mathcal{B}}_{0r} e^{i(\vec{\mathcal{K}}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (39.36)$$

com

$$\vec{\mathcal{K}}_i = (\kappa_1 + i\beta_1) \vec{u}_i \quad (39.37)$$

$$\vec{\mathcal{K}}_r = (\kappa_1 + i\beta_1) \vec{u}_r \quad (39.38)$$

e  $\kappa_1$  e  $\beta_1$  dados pelas eqs. (38.15) e (38.16).

• **meio 2 - onda transmitida:**

$$\vec{\mathcal{E}}_t = \vec{\mathcal{E}}_{0t} e^{i(\vec{\mathcal{K}}_t \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (39.39)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{0t} = \vec{E}_{0t} e^{i\phi_t} \quad (39.40)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_t = \frac{\vec{\mathcal{K}}_t \times \vec{\mathcal{E}}_t}{\omega} \quad (39.41)$$

No meio 2, os campos são dados por

$$\vec{\mathcal{E}}_2(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}_t(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}_{0t} e^{i(\vec{\mathcal{K}}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t)} \quad (39.42)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_2(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{B}}_t(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{B}}_{0t} e^{i(\vec{\mathcal{K}}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t)} \quad (39.43)$$

com

$$\vec{\mathcal{K}}_t = (\kappa_2 + i\beta_2)\vec{u}_t \quad (39.44)$$

sendo  $\kappa_2$  e  $\beta_2$  dados pelas eqs. (38.23) e (38.24).

As expressões (39.37), (39.38) e (39.44), mostram que, quando  $\beta$  é diferente de zero,  $\mathcal{K}$  é um número complexo. Isto significa que a onda é amortecida no interior do material. Para materiais com  $\beta = 0$ ,  $\mathcal{K}$  é o número de onda real. Através da expressão (39.33) podemos observar que a diferença de fase  $\phi_r$  entre as ondas refletida e incidente está incluída na amplitude  $\vec{\mathcal{E}}_{0r}$ , que pode ser um número complexo. Analogamente, a defasagem  $\phi_t$ , entre as ondas incidente e refratada, está incluída em  $\vec{\mathcal{E}}_{0t}$ , eq. (39.40).

### • a extensão complexa das condições de contorno

As condições de contorno para os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  foram obtidas na aula 38 e são dadas pelas eqs. (38.45)-(38.46). A eq. (38.45) é um pouco mais complicada que as demais, mas pode ser reescrita de modo mais compacto usando números complexos. Para fazer isto, partimos da eq.(39.17), para obter

$$\int dt \mathcal{E}(y, t) = \frac{i}{\omega} E(y, t). \quad (39.45)$$

Assim, para cada um dos lados da eq. (38.45), vale a relação

$$\varepsilon E_{\perp} + g \int dt E_{\perp} \rightarrow (\varepsilon + i \frac{g}{\omega}) \mathcal{E}_{\perp} = \hat{\varepsilon} \mathcal{E}_{\perp} \quad (39.46)$$

e as extensões complexas das condições de contorno tomam a forma

$$\mathcal{E}_{1//} = \mathcal{E}_{2//}, \quad (39.47)$$

$$\hat{\varepsilon}_1 \mathcal{E}_{1\perp} = \hat{\varepsilon}_2 \mathcal{E}_{2\perp}, \quad (39.48)$$

$$\mathcal{B}_{1//} = \mathcal{B}_{2//}, \quad (39.49)$$

$$\mathcal{B}_{1\perp} = \mathcal{B}_{2\perp}. \quad (39.50)$$

### • a limitação das extensões complexas

Nas seções anteriores, mostramos que o emprego de extensões complexas tornam as expressões dos campos mais compactas e, portanto, simplificam as operações matemáticas.

Em muitos casos, podemos operar com números complexos e, apenas ao final dos cálculos, tomar a parte real do resultado, que é considerada física. Entretanto, é muito importante ressaltar que este procedimento é justificado somente para expressões *lineares* nos campos e não se aplica, por exemplo, à manipulação de quantidades quadráticas.

As razões disto podem ser compreendidas estudando o caso da densidade de energia elétrica. Imaginemos que, em um dado problema, seja conveniente usar a extensão complexa do campo elétrico nos cálculos. Assim, fazemos  $E_F \rightarrow \mathcal{E} = (E_F + i E_{NF})$ , onde os índices  $F$  e  $NF$  correspondem a *físico* e *não-físico*. Após operações matemáticas que podem, por exemplo, envolver a solução de equações diferenciais ou acoplamentos com campos magnéticos, obtemos uma função que representa  $\mathcal{E}$ . E, se desejamos conhecer o campo físico  $E_F$ , tomamos a parte real de  $\mathcal{E}$ .

Imaginemos, agora, que estejamos interessados em densidades de energia. A densidade física é dada por

$$U_F = \frac{\varepsilon_0}{2} E_F^2$$

e poderíamos ser tentados a pensar que a sua extensão complexa seria

$$U_F \rightarrow \mathcal{U} = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathcal{E}^2.$$

Entretanto, esta extensão não funciona, pois

$$\mathcal{U} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left[ (E_F^2 - E_{NF}^2) + 2i E_F E_{NF} \right]$$

e a parte real de  $\mathcal{U}$  tem a forma

$$\text{Real } \mathcal{U} = \frac{\varepsilon_0}{2} (E_F^2 - E_{NF}^2),$$

que é diferente de  $U_F$ , devido à presença do fator  $E_{NF}^2$ .



# Capítulo 40

## ondas incidindo em condutores

O formalismo desenvolvido nas aulas 38 e 39 permite, em princípio, a descrição bastante completa do comportamento de ondas eletromagnéticas em interfaces de materiais condutores e dielétricos. Entretanto, a discussão de casos muito gerais tende a ser bastante complicada e, por isso, aqui consideramos apenas duas situações particulares, que têm importância prática. Uma delas, apresentada nesta aula, envolve uma onda no vácuo que incide normalmente sobre um condutor. A outra, discutida na aula seguinte, trata de uma onda no vácuo que incide, segundo um ângulo qualquer, sobre um dielétrico transparente.

### • ondas eletromagnéticas incidindo em condutores

Quando ondas incidem sobre uma interface, segundo uma direção qualquer, as ondas refletida e transmitida se propagam em outras direções, como mostra a fig. 38.1. Já no caso em que a direção de propagação da onda incidente é perpendicular à interface, o mesmo ocorre com as ondas refletida e transmitida e o problema fica muito mais simples.

Consideramos uma onda eletromagnética, plana e monocromática, que se propaga no vácuo e incide, perpendicularmente, sobre uma superfície condutora. Supomos que a onda incidente se propaga na direção  $y$ , que a interface entre os meios coincide com o plano  $xz$ , e que a direção do campo elétrico seja paralela ao eixo  $z$ , como ilustra a figura 40.1.

Os campos da *onda incidente* são dados pelas eqs. (38.33) e (38.34) e temos

$$\vec{\mathcal{E}} = E_{0i} e^{i(\kappa y - \omega t)} \vec{k} \quad (40.1)$$

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{\kappa}{\omega} E_{0i} e^{i(\kappa y - \omega t)} \vec{i}, \quad (40.2)$$

depois de usar a eq.(37.32), com  $\vec{\mathcal{K}} = \kappa \vec{j}$ .

A *onda refletida* se propaga na direção  $-\vec{j}$ , com campos elétrico e magnéticos dados

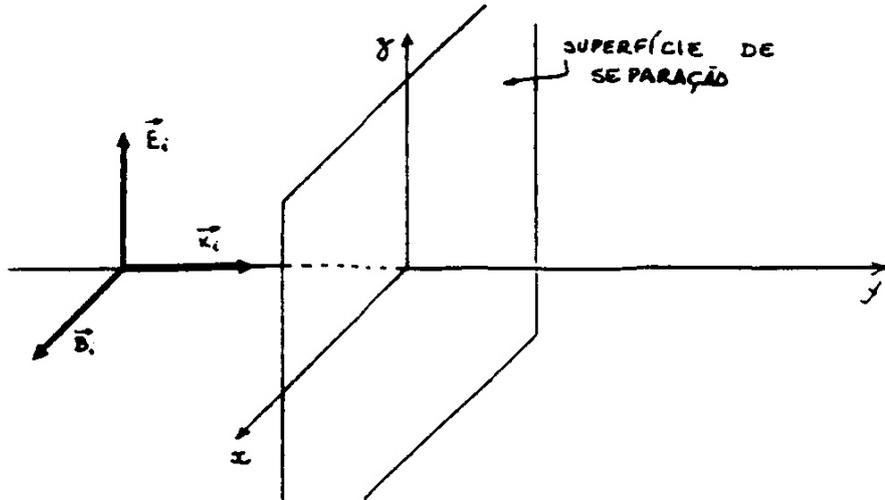


Figura 40.1: Uma onda eletromagnética plana incide perpendicularmente, a partir do vácuo, em uma superfície condutora situada no plano  $xz$ .

por

$$\vec{\mathcal{E}}_r = \mathcal{E}_{0r} e^{i(\kappa y - \omega t)} \vec{k} \quad (40.3)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_r = -\frac{\kappa}{\omega} \mathcal{E}_{0r} e^{i(\kappa y - \omega t)} \vec{i} \quad (40.4)$$

Já a onda transmitida se propaga na direção  $\vec{j}$  e temos

$$\vec{\mathcal{E}}_t = \mathcal{E}_{0t} e^{i(\mathcal{K}_t y - \omega t)} \vec{k} \quad (40.5)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_t = \frac{\mathcal{K}_t}{\omega} \mathcal{E}_{0t} e^{i(\mathcal{K}_t y - \omega t)} \vec{i} \quad (40.6)$$

Como o meio 1 é o vácuo,

$$\kappa = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}, \quad (40.7)$$

enquanto que, para o meio 2, que é condutor,  $\mathcal{K}_t$  é um número complexo

$$\mathcal{K}_t = k_2 + i\beta_2 \quad (40.8)$$

com  $k_t$  e  $\beta_t$  dados pelas equações (38.23) e (38.24). A parte imaginária  $\beta$  é consequência do amortecimento da onda no interior do condutor. A situação que estamos tratando está ilustrada na figura 40.2.

Solucionar este problema corresponde a determinar a relação entre as amplitudes  $E_{0i}$ ,  $E_{0r}$  e  $E_{0t}$ . Para tanto, utilizamos as condições de contorno (39.45) - (39.48). A continuidade das componentes de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  paralelas à interface e são expressas, respectivamente, por

$$\mathcal{E}_i + \mathcal{E}_r = \mathcal{E}_t, \quad (40.9)$$

$$\mathcal{B}_i - \mathcal{B}_r = \mathcal{B}_t. \quad (40.10)$$

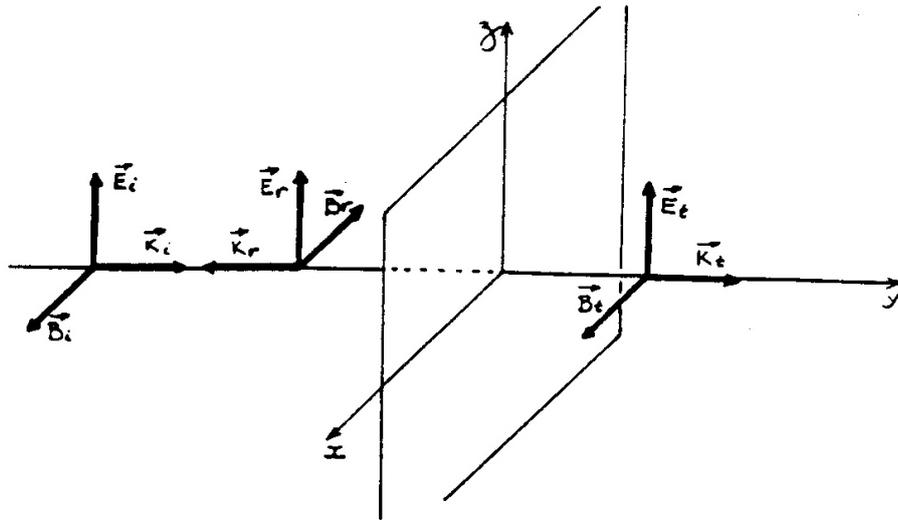


Figura 40.2: Uma onda eletromagnética plana incide perpendicularmente em uma superfície condutora situada no plano  $xz$ ; as ondas incidente, refletida e refratada se propagam na direção  $y$ .

A interface está no plano  $x, z$  e, portanto qualquer ponto sobre ela tem coordenada  $y = 0$ . Por isso, as expressões dos campos e as condições de contorno fornecem

$$E_{0i} + \mathcal{E}_{0r} = \mathcal{E}_{0t} , \quad (40.11)$$

$$\frac{\kappa}{\omega} [E_{0i} - \mathcal{E}_{0r}] = \frac{\mathcal{K}_t}{\omega} \mathcal{E}_{0t} . \quad (40.12)$$

Como  $\mathcal{K}_t$  é um número complexo, estas expressões nos mostram que  $\mathcal{E}_{0r}$  e  $\mathcal{E}_{0t}$  não podem ser ambos reais, ou seja há uma diferença de fase entre as ondas refletidas e transmitidas.

A partir das equações (40.11) e (40.12) podemos encontrar a razão entre as amplitudes da onda

$$\mathcal{E}_{0r} = \frac{\kappa - \mathcal{K}_t}{\kappa + \mathcal{K}_t} E_{0i} , \quad (40.13)$$

$$\mathcal{E}_{0t} = \frac{2\kappa}{\kappa + \mathcal{K}_t} E_{0i} . \quad (40.14)$$

Assim, conhecida a onda eletromagnética que incide perpendicularmente em uma superfície condutora, as ondas refletida e refratada estão completamente determinadas. Estas amplitudes complexas sempre podem ser escritas na forma

$$\mathcal{E}_{0r} = E_{0r} e^{-i\phi_r} , \quad (40.15)$$

$$\mathcal{E}_{0t} = E_{0t} e^{-i\phi_t} . \quad (40.16)$$

A obtenção de  $E_{0r}$ ,  $E_{0t}$ ,  $\phi_r$  e  $\phi_t$  é deixada como exercício.

• **balanço energético**

Sempre que uma onda eletromagnética incide sobre uma superfície, parte da sua energia é refletida e parte, transmitida. A proporção relativa entre estes dois tipos de energia é determinada pelas eqs. (40.13) e (40.14) e, por isso, elas nos permitem entender os fenômenos que ocorrem quando a luz incide em um condutor. Elas explicam, por exemplo, porque metais, como a prata, são brilhantes, e porque o grafite é escuro.

A quantidade de energia por unidade de tempo e por unidade de área transportada por uma onda eletromagnética é determinada pelo vetor de Poynting, dado por

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}. \quad (40.17)$$

As expressões (40.1 - 40.6) para os campos, sobre o plano  $y = 0$ , correspondem a

$$\vec{E}_i = E_{0i} \cos(\omega t) \vec{k}, \quad \vec{B}_i = \frac{\kappa}{\omega} E_{0i} \cos(\omega t) \vec{i} \quad (40.18)$$

$$\vec{E}_r = E_{0r} \cos(\omega t - \phi_r) \vec{k}, \quad \vec{B}_r = -\frac{\kappa}{\omega} E_{0r} \cos(\omega t - \phi_r) \vec{i} \quad (40.19)$$

$$\vec{E}_t = E_{0t} \cos(\omega t - \phi_t) \vec{k}, \quad \vec{B}_t = \frac{|\mathcal{K}_t|}{\omega} E_{0t} \cos(\omega t - \phi_t - \eta) \vec{i} \quad (40.20)$$

com  $\eta$  dado pela eq.(??). As potências médias por unidade de área,  $\langle \vec{S} \rangle$ , são dadas por  $I = \langle S \rangle$ . Usando os campos (??) - (??) em (??), obtemos

$$\langle S_i \rangle = \frac{\kappa}{\mu_0 \omega} E_{0i}^2 \frac{1}{T} \int_0^T dt \cos^2(\omega t) \vec{j} = \frac{\kappa}{2\mu_0 \omega} E_{0i}^2 \vec{j}, \quad (40.21)$$

$$\langle S_r \rangle = -\frac{\kappa}{\mu_0 \omega} E_{0r}^2 \frac{1}{T} \int_0^T dt \cos^2(\omega t - \phi) \vec{j} = -\frac{\kappa}{2\mu_0 \omega} E_{0r}^2 \vec{j}, \quad (40.22)$$

$$\langle S_t \rangle = \frac{|\mathcal{K}_t|}{\mu_0 \omega} E_{0t}^2 \frac{1}{T} \int_0^T dt \cos^2(\omega t - \phi) \cos(\omega t - \phi - \eta) \vec{j} = \frac{\kappa^2}{2\mu_0 \omega} E_{0t}^2 \vec{j}, \quad (40.23)$$

onde usamos  $\cos \eta = \kappa_2 / |\mathcal{K}_t|$

O módulo de  $\langle \vec{S} \rangle$  é chamado de *intensidade* da onda. Usando os resultados anteriores, obtemos

$$I_i = \frac{\kappa}{2\mu_0 \omega} E_{0i}^2, \quad (40.24)$$

$$I_r = \frac{\kappa}{2\mu_0 \omega} E_{0r}^2, \quad (40.25)$$

$$I_t = \frac{\kappa_2}{2\mu_0 \omega} E_{0t}^2. \quad (40.26)$$

A medida da fração da energia incidente que é refletida é dada por

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{E_{0r}^2}{E_{0i}^2}, \quad (40.27)$$

enquanto que a fração de energia que penetra no material é

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{\kappa_2}{\kappa} \frac{E_{0t}^2}{E_{0i}^2} \quad (40.28)$$

As razões entre as amplitudes  $E_{0r}$ ,  $E_{0t}$  e  $E_{0i}$  são obtidas a partir das eqs. (40.13) e (40.14), que envolvem grandezas complexas. Por isso, os módulos dos campos são dados por

$$\frac{E_{0r}^2}{E_{0i}^2} = \frac{E_{0r} E_{0r}}{E_{0i}^2} = \frac{(\kappa - \kappa_2) - i\beta_2}{(\kappa + \kappa_2) + i\beta_2} \cdot \frac{(\kappa - \kappa_2) + i\beta_2}{(\kappa + \kappa_2) - i\beta_2} = \frac{(\kappa - \kappa_2)^2 + \beta_2^2}{(\kappa + \kappa_2)^2 + \beta_2^2}, \quad (40.29)$$

$$\frac{E_{0t}^2}{E_{0i}^2} = \frac{E_{0t} E_{0t}}{E_{0i}^2} = \frac{2\kappa}{(\kappa + \kappa_2) + i\beta_2} \cdot \frac{2\kappa}{(\kappa + \kappa_2) - i\beta_2} = \frac{4\kappa^2}{(\kappa + \kappa_2)^2 + \beta_2^2}. \quad (40.30)$$

Usando estes resultados nas eqs. (40.25) e (40.26), encontramos

$$R = \frac{(\kappa - \kappa_2)^2 + \beta_2^2}{(\kappa + \kappa_2)^2 + \beta_2^2}, \quad (40.31)$$

$$T = \frac{4\kappa\kappa_2}{(\kappa + \kappa_2)^2 + \beta_2^2}. \quad (40.32)$$

Estes resultados são interessantes porque eles nos ensinam que as frações  $R$ , da energia que é refletida e  $T$ , da energia que é transmitida, dependem apenas das características dos meios nos quais a onda se propaga, representadas pelos vetores da onda  $k$  e  $k_2$  e pelo coeficiente de amortecimento  $\beta_2$ . Como  $k_2$  e  $\beta_2$  dependem da frequência  $\omega$  da onda, o mesmo acontece com  $R$  e  $T$ . O princípio de conservação de energia exige que

$$R + T = 1. \quad (40.33)$$

A validade desta condição pode ser facilmente verificada diretamente a partir das eqs. (40.29) e (40.30). Experimentalmente, medindo a fração da energia incidente que é refletida, podemos determinar quanta energia penetrou no condutor.

### • exemplo: o condutor perfeito

Metais são bons condutores e correntes relativamente grandes podem ser produzidas por campos elétricos externos não muito intensos. A medida deste efeito é determinada pela lei de Ohm generalizada, eq. (36.99), dada por

$$\vec{j} = g(\omega)\vec{E} + [\varepsilon(\omega) - \epsilon_0] \frac{d\vec{E}}{dt}.$$

Para um bom condutor, o valor de  $g$  é grande, o que corresponde à idéia que campos elétricos pequenos podem produzir correntes grandes. A extensão desta relação para o

limite matemático  $g \rightarrow \infty$  produziu a noção idealizada de *condutor perfeito*. Neste limite, os parâmetros  $k$  e  $\beta$  do condutor, dados pelas eqs. (35.99) e (35.99), passam a ser

$$\kappa = \beta = \sqrt{\frac{\mu_0 \omega g}{2}} \quad (40.33)$$

e ambos, portanto, tendem a  $\infty$ .

Fazendo  $\kappa_2 = \beta_2 \gg \kappa$  nas eqs. (40.31) e (40.32), encontramos  $R \rightarrow 1$  e  $T \rightarrow 0$ , o que indica que toda a energia incidente sobre um condutor perfeito é refletida. Usando os limites (40.33) nas eqs. (40.13) e (40.14), encontramos  $E_{0r} = -E_{0i}$  e  $E_{0t} = 0$ , que indica que o campo elétrico é nulo no interior de um condutor perfeito. Estes resultados já haviam sido obtidos na aula 30, quando discutimos a radiação de um espelho ideal.

### • o caso da prata

Na aula 35, estudamos as previsões do modelo de Drude para a prata e a tabela 35.1 mostra que a sua condutividade  $g(\omega)$  é grande para frequências baixas e mantém-se estável até as proximidades da frequência de plasma  $\omega_p$ , quando passa a cair rapidamente. Para valores muito altos da frequência, a condutividade de qualquer metal é pequena. Neste caso, a espessura de penetração ( $\delta$ ) é grande e a onda eletromagnética pode entrar no condutor e  $R$  não assume valores altos. Assim, quando falamos em bons condutores, necessariamente estamos nos referindo a casos em que a frequência da onda incidente não é muito alta. Para frequências em que a espessura de penetração é pequena, a onda praticamente não penetra no condutor, quase toda a energia incidente é refletida, e  $R \approx 1$ .

Para ilustrar a dependência do índice de reflexão  $R$  com a frequência no caso de condutores, determinamos os seus valores para ondas que se propagam no ar e incidem perpendicularmente em uma superfície de prata. Para tanto, calculamos os valores de  $k$  a partir da eq. (40.7) e os de  $k_2$  e  $\beta_2$ , usando os valores da tabela 35.1 nas eqs. (38.16) e (38.17). Em seguida, empregamos estes valores na eq. (40.31), para calcular  $R$ . Os resultados obtidos são mostrados na tabela 40.1 e podemos notar que, como esperado, ondas eletromagnéticas de frequência abaixo da região da luz visível não penetram na prata, sendo quase totalmente refletidas. No caso de luz visível, 99.6% da energia incidente é refletida e apenas 0.4% é perdida, devido ao atrito dos elétrons livres na superfície de separação. A maioria dos metais tem frequência de plasma na região do ultra-violeta e para a prata, por exemplo,  $\omega_p = 1.35 \times 10^{16}$  Hz. Desta forma, podemos esperar que os metais sejam bons refletores de luz visível. É por este motivo que metais como a prata e o alumínio são brilhantes e “brancos”. Por outro lado, o mesmo metal se torna praticamente transparente para frequências altas.

### • grafite

Materiais pretos como o grafite, devem absorver praticamente toda a luz visível que neles incide. Para verificar esta afirmação calculamos a intensidade da luz visível refletida por grafite (tabela 2).

$f(\text{s}^{-1})$	$\kappa(\text{m}^{-1})$	$\kappa_2(\text{m}^{-1})$	$\beta_2(\text{m}^{-1})$	R
$10^8$ (FM, TV)	$2.096 \times 10^0$	$1.57 \times 10^5$	$1.57 \times 10^5$	1.000
$10^{11}$ (infra-vermelho)	$2.096 \times 10^3$	$4.91 \times 10^6$	$5.02 \times 10^6$	0.999
$10^{13}$ (infra-vermelho)	$2.096 \times 10^5$	$8.62 \times 10^6$	$4.28 \times 10^7$	0.996
$3.94 \times 10^{14}$ (vermelho)	$8.28 \times 10^6$	$2.46 \times 10^5$	$4.47 \times 10^7$	0.996
$5.44 \times 10^{14}$ (verde)	$1.14 \times 10^7$	$1.80 \times 10^5$	$4.43 \times 10^7$	0.996
$7.69 \times 10^{14}$ (azul)	$1.61 \times 10^7$	$1.30 \times 10^5$	$4.35 \times 10^7$	0.996
$5 \times 10^{15}$ (ultra-violeta)	$1.05 \times 10^8$	$9.43 \times 10^7$	$9.20 \times 10^3$	0.003
$10^{18}$ (raio-X)	$2.096 \times 10^{10}$	$2.096 \times 10^{10}$	$2.08 \times 10^{-1}$	0.000

Tabela 40.1: Fração  $R$  da energia incidente que é refletida pela prata, quando em sua superfície incide uma onda eletromagnética de frequência  $\omega$ .

$\omega(\text{Hz})$	$\kappa(\text{m})^{-1}$	$\kappa_o(\text{m})^{-1}$	$\beta^2(\text{m})^{-1}$	R
$2.48 \times 10^{15}$ (vermelho)	$8.28 \times 10^6$	$1.09 \times 10^7$	$1.05 \times 10^7$	0.24
$3.42 \times 10^{15}$ (verde)	$1.14 \times 10^7$	$1.52 \times 10^7$	$1.05 \times 10^7$	0.15
$4.83 \times 10^{15}$ (azul)	$1.61 \times 10^7$	$1.94 \times 10^7$	$1.14 \times 10^7$	0.10

Tabela 40.2: Fração da energia incidente que é refletida pelo grafite quando em sua superfície incide uma onda eletromagnética de frequência  $\omega$ .

Na obtenção dos resultados apresentados na tabela 2 utilizamos os seguintes dados sobre o grafite:  $A = 12$ ,  $d = 2\text{g/cm}^3$ ,  $\rho = 1.4 \times 10^{-5} \Omega \text{ m}$ ,  $n = 4$  elétrons livres/átomos. O grafite reflete  $\sim 10$  a  $24\%$  da luz visível que nele incide. Portanto  $76$  a  $90\%$  da energia incidente é absorvida, o que explica o fato de ele ser preto.

### • ouro e cobre

Por que metais como ouro e cobre são amarelos e avermelhados? A frequência de plasma do ouro é  $\omega_p = 2 \times 10^{16} \text{ Hz}$ , acima da frequência da luz visível. Se calcularmos os valores de  $R$  para o espectro visível, usando o modelo de Drude, obtemos  $R \approx 1$ . Portanto, de acordo com este modelo, o ouro deveria ser branco como a prata. Neste

caso a previsão teórica não é confirmada porque, no modelo, foram consideradas apenas a contribuição dos elétrons livres, desprezando-se os efeitos dos íons. No caso dos metais como ouro e cobre, além das perdas de energia por efeito Joule, ocorrem também perdas devidas à absorção de energia por elétrons ligados. Por isso, esses dois metais incorporam algumas características de dielétricos, com ressonâncias iônicas na região visível. No caso da prata e do alumínio, as frequências de ressonâncias dos elétrons ligados estão na região do ultra-violeta e, portanto, não absorvem energia da luz visível. No ouro e no cobre, os elétrons ligados tem frequência de ressonância na região do azul-violeta, absorvendo portanto parte da energia da luz visível nesta região e refletindo as ondas de frequência na região do amarelo-vermelho. Por este motivo o cobre e o ouro são amarelo avermelhados.

### • exercícios

1. Quando uma onda eletromagnética incide normalmente a uma superfície condutora, a partir do vácuo, os campos elétricos das ondas refletida e transmitida são defasados em relação à incidente. Obtenha as fases de  $\mathcal{E}_{0r}$  e  $\mathcal{E}_{0t}$ , a partir das equações (40.13) e (40.14).

### • respostas

$$1. \mathcal{E}_{0r} = E_{0r} e^{i\phi_r} \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_{0t} = E_{0t} e^{i\phi_t}, \quad \text{com}$$

$$\tan\phi_r = -\frac{2(\kappa-\kappa_2)\beta_2}{\kappa_2-\kappa_2^2-\beta_2^2} \quad \text{e} \quad \tan\phi_t = -\frac{\beta_2}{\kappa+\kappa_2}.$$

# Capítulo 41

## ondas incidindo em dielétricos

Nesta aula, estudamos o comportamento de uma onda eletromagnética na interface entre dois dielétricos, nos quais os efeitos dissipativos podem ser desprezados. Este é, por exemplo, o caso de luz que incide, a partir do ar, sobre vidro ou água. Neste problema, existem dois tipos de efeitos que precisam ser considerados. O primeiro deles envolve apenas aspectos geométricos, enquanto que o outro descreve os balanços energéticos.

### • os campos

As expressões para os campos necessárias ao estudo do caso em que ondas se propagam em materiais transparente são dadas pelas eqs. (39.30) - (39.34) e (39.39) - (39.41) com  $\mathcal{K}_i = \mathcal{K}_r = \kappa_1$  e  $\mathcal{K}_t = \kappa_2$ , reproduzidas a seguir

**meio 1 - onda incidente:**

$$\vec{\mathcal{E}}_i = \vec{E}_{0i} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (41.1)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_i = \frac{\vec{k}_i \times \vec{\mathcal{E}}_i}{\omega}. \quad (41.2)$$

**meio 1 - onda refletida:**

$$\vec{\mathcal{E}}_r = \vec{\mathcal{E}}_{0r} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (41.3)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{0r} = \vec{E}_{0r} e^{i\phi_r}, \quad (41.4)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_r = \frac{\vec{k}_r \times \vec{\mathcal{E}}_r}{\omega}. \quad (41.5)$$

• meio 2 - onda transmitida:

$$\vec{\mathcal{E}}_t = \vec{\mathcal{E}}_{0t} e^{i(\vec{\kappa}_t \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (41.6)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{0t} = \vec{\mathcal{E}}_{0t} e^{i\phi_t}, \quad (41.7)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_t = \frac{\vec{\kappa}_t \times \vec{\mathcal{E}}_t}{\omega}. \quad (41.8)$$

• reflexão e refração - aspectos geométricos

De acordo com a condição de contorno (38.47), a componente de  $\vec{E}$  paralela à interface deve ser contínua. O mesmo vale para a extensão complexa dos campos, e obtemos

$$(\vec{\mathcal{E}}_i + \vec{\mathcal{E}}_r)_{//} = \vec{\mathcal{E}}_{t//}. \quad (41.9)$$

Usando as eqs. (41.1), (41.3) e (41.6), este resultado pode ser reescrito como

$$E_{0i//} e^{i(\vec{\kappa}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{\mathcal{E}}_{0r//} e^{i(\vec{\kappa}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} = \vec{\mathcal{E}}_{0t//} e^{i(\vec{\kappa}_t \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (41.10)$$

onde  $\vec{r}$ , dado pela eq. (38.51), representa um ponto *da interface*. Esta relação deve ser válida para qualquer  $\vec{r}$  e para qualquer instante  $t$ , o que é possível apenas se os termos dependentes de  $\vec{r}$  e  $t$  se cancelarem, o que corresponde às condições

$$e^{i(\vec{\kappa}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} = e^{i(\vec{\kappa}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} = e^{i(\vec{\kappa}_t \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (41.11)$$

e, portanto, a

$$\vec{\kappa}_i \cdot \vec{r} = \vec{\kappa}_r \cdot \vec{r} = \vec{\kappa}_t \cdot \vec{r}. \quad (41.12)$$

Estas duas igualdades contêm muitas informações importantes. Quando reescritas como

$$(\vec{\kappa}_i - \vec{\kappa}_r) \cdot \vec{r} = 0, \quad (41.13)$$

$$(\vec{\kappa}_i - \vec{\kappa}_t) \cdot \vec{r} = 0. \quad (41.14)$$

elas nos informam que os vetores  $\vec{\kappa}_i$ ,  $\vec{\kappa}_r$  e  $\vec{\kappa}_t$  estão todos contidos em um único plano. Já nas formas

$$\kappa_{i//} = \kappa_{r//}, \quad (41.15)$$

$$\kappa_{i//} = \kappa_{t//}, \quad (41.16)$$

elas fornecem relações angulares. Em termos dos ângulos definidos na fig. 38.1, a eq. (41.15) leva a

$$\kappa_i \sin \theta_i = \kappa_r \sin \theta_r. \quad (41.17)$$

Como as ondas incidente e refletida se propagam no mesmo meio e com a mesma frequência,  $\kappa_i = \kappa_r = \kappa_1$  e, portanto, concluímos que o ângulo de reflexão  $\theta_r$  é igual ao ângulo de incidência  $\theta_i$ , resultado que se verifica experimentalmente.

A partir da expressão (41.16), com  $\kappa_i = \kappa_r$  e  $\kappa_t = \kappa_2$ , obtemos a relação

$$\kappa_1 \operatorname{sen} \theta_i = \kappa_2 \operatorname{sen} \theta_t. \quad (41.18)$$

Como as ondas incidente e transmitida estão em meios diferentes,  $\kappa_1 \neq \kappa_2$  e este resultado fornece uma relação entre os ângulos de incidência  $\theta_i$  e de transmissão  $\theta_t$ , conhecida como lei de Snell. No caso de um meio sem absorção, a velocidade de propagação da onda é  $v = \omega/k$  e, multiplicando a eq. (41.18) por  $c/\omega$ , obtemos a forma mais comum da lei de Snell, dada por

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_i = n_2 \operatorname{sen} \theta_t, \quad (41.19)$$

onde  $n = c/v$  é o índice de refração do meio.

Os principais resultados de natureza geométrica, que obtivemos a partir da condição de contorno (38.47), são

- 1) os vetores  $\vec{\kappa}_i$ ,  $\vec{\kappa}_r$  e  $\vec{\kappa}_t$  estão contidos no mesmo plano,
- 2)  $\theta_i = \theta_r$ ,
- 3)  $\kappa_1 \operatorname{sen} \theta_i = \kappa_2 \operatorname{sen} \theta_t \iff n_1 \operatorname{sen} \theta_i = n_2 \operatorname{sen} \theta_t$ .

Estas mesmas relações poderiam ter sido obtidas a partir de qualquer uma das demais condições de contorno, pois as quatro expressões (38.47 a 38.50) valem em qualquer instante em qualquer ponto da interface.

### • reflexão total

Segundo a lei de Snell, em cada meio,  $\operatorname{sen} \theta$  é inversamente proporcional ao índice de refração. Por isso,  $n_2 > n_1 \rightarrow \theta_t < \theta_i$  e  $n_2 < n_1 \rightarrow \theta_t > \theta_i$ , como mostra a figura 41.1.

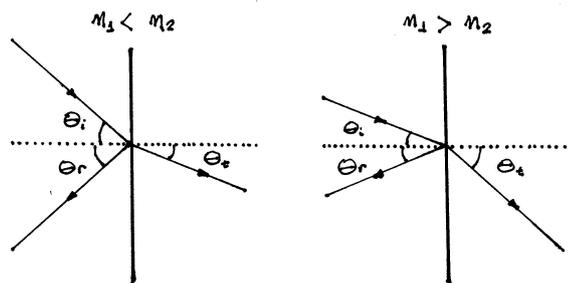


Figura 41.1:

No caso em que  $n_1 < n_2$ , sempre há uma onda refratada. Na situação limite em que  $\theta_i = \frac{\pi}{2}$ , temos

$$n_1 \operatorname{sen} \pi/2 = n_2 \operatorname{sen} \theta_{tL} \rightarrow \operatorname{sen} \theta_{tL} = \frac{n_1}{n_2} < 1. \quad (41.20)$$

sendo  $\theta_{tL}$  o máximo ângulo de refração.

Quando  $n_1 > n_2$  o ângulo  $\theta_t$  é maior que  $\theta_i$  e nem sempre há onda refratada. O máximo ângulo de incidência  $\theta_c$ , chamado ângulo crítico, para o qual existe onda refratada corresponde à situação em que  $\theta_t = \pi/2$ . Neste caso:

$$\text{sen } \theta_c = \frac{n_1}{n_2} < 1. \quad (41.21)$$

Para ondas incidindo em ângulos maiores que  $\theta_c$ , não se observa onda refratada e toda radiação incidente é refletida. Este fenômeno é conhecido como *reflexão total* em dielétricos. Ele pode ser facilmente percebido quando mergulhamos em uma piscina e olhamos para cima, em aquários de paredes planas, em copos cheios de água. Atualmente, fibras ópticas têm grande importância tecnológica e é por meio de sucessivas reflexões totais que elas conduzem a luz no seu interior, de uma extremidade à outra.

### • ondas eletromagnéticas incidindo em dielétricos

Quando a superfície de um dielétrico é atingida por uma onda eletromagnética, seus átomos oscilam sob a influência do campo elétrico e podem absorver e re-irradiar a energia incidente. A soma das radiações emitidas por cada átomo constitui as ondas refletida e refratada. Nesta seção, estudamos o problema da reflexão e refração de ondas na interface entre dois dielétricos neutros e transparentes, usando as expressões dos campos elétrico e magnético das ondas incidente, refletida e refratada em dielétricos com pouco amortecimento dadas nas eqs. (41.1) - (41.8).

De modo geral, as características dos meios são incorporadas nas funções  $k$  e  $\beta$ , eqs. (??) e (??). Quando os dielétricos são transparentes, a função  $g(\omega)$  é pequena e pode ser desprezada, o que nos permite trabalhar com as aproximações.

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon(\omega)} \quad e \quad \beta \simeq 0. \quad (41.22)$$

Queremos determinar a fração  $R$  da energia incidente que é refletida na superfície do dielétrico e a fração  $T$ , que penetra no material. Para tanto, precisamos encontrar as amplitudes das ondas refletida e refratada. Qualquer que seja a polarização da onda eletromagnética incidente, podemos decompor os campos elétrico e magnético em suas componentes paralela e perpendicular ao plano de incidência e tratar os dois casos separadamente. Como mostramos a seguir, os resultados dependem bastante do tipo de polarização da onda. O caso geral é uma combinação de ondas polarizadas paralelamente e perpendicularmente ao plano de incidência.

### • caso $\alpha$ - campo elétrico perpendicular ao plano de incidência

A situação em que as ondas estão polarizadas perpendicularmente ao plano de incidência  $yz$  é mostrada na figura 41.2.

A partir das condições de contorno que impõem a continuidade das componentes de  $\vec{E}$

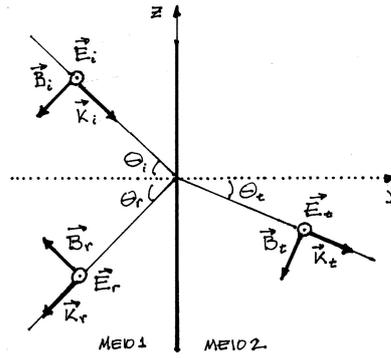


Figura 41.2: Ondas incidente, refletida e refratada com campos elétricos polarizados perpendicularmente ao plano de incidência.

e  $\vec{B}$  paralelas à interface, obtemos

$$\mathcal{E}_{1//} = \mathcal{E}_{2//} \rightarrow E_{0i} + \mathcal{E}_{0r} = \mathcal{E}_{0t}, \quad (41.23)$$

$$\mathcal{B}_{1//} = \mathcal{B}_{2//} \rightarrow (B_{0i} - \mathcal{B}_{0r}) \cos \theta_i = \mathcal{B}_{0t} \cos \theta_t, \quad (41.24)$$

usando a condição  $\theta_i = \theta_r$ . As eqs. (41.2), (41.4) e (41.7) fornecem

$$\kappa_1(E_{0i} - \mathcal{E}_{0r}) \cos \theta_i = \kappa_2 \mathcal{E}_{0t} \cos \theta_t \quad (41.25)$$

A partir das eqs. (41.23) e (41.25) obtemos

$$(\mathcal{E}_{0r})_\alpha = \frac{\kappa_1 \cos \theta_i - \kappa_2 \cos \theta_t}{\kappa_1 \cos \theta_i + \kappa_2 \cos \theta_t} E_{0i}, \quad (41.26)$$

$$(\mathcal{E}_{0t})_\alpha = \frac{2 \kappa_1 \cos \theta_i}{\kappa_1 \cos \theta_i + \kappa_2 \cos \theta_t} E_{0i}, \quad (41.27)$$

sendo que o índice  $\alpha$  indica que estas relações são válidas para o caso de campo elétrico perpendicular ao plano de incidência. Destes resultados, concluímos imediatamente que  $\mathcal{E}_{0r} = E_{0r}$  e  $\mathcal{E}_{0t} = E_{0t}$ . Utilizando a lei de Snell, eq. (41.18), podemos reescrever estas expressões como

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\alpha = -\frac{\text{sen}(\theta_i - \theta_t)}{\text{sen}(\theta_i + \theta_t)}, \quad (41.28)$$

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\alpha = \frac{2 \cos \theta_i \text{sen} \theta_t}{\text{sen}(\theta_i + \theta_t)}. \quad (41.29)$$

• caso  $\beta$  - campo elétrico paralelo ao plano de incidência

O caso em que os campos elétricos das ondas estão contidos no plano de incidência  $yz$  é mostrado na figura 41.3.

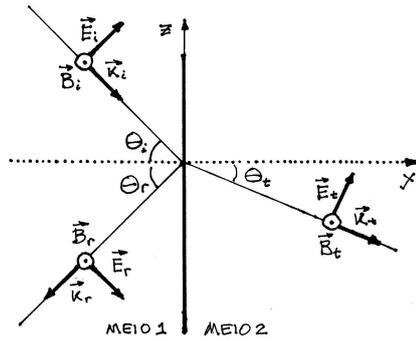


Figura 41.3: Ondas incidente, refletida e refratada com campos elétricos polarizados paralelamente ao plano de incidência.

As condições de contorno para as componentes dos campos elétrico e magnético paralelas à interface, eqs. (39.45) e (39.47), fornecem

$$\mathcal{E}_{1//} = \mathcal{E}_{2//} \rightarrow (E_{0i} - \mathcal{E}_{0r}) \cos \theta_i = \mathcal{E}_{0t} \cos \theta_t, \quad (41.30)$$

$$\mathcal{B}_{1//} = \mathcal{B}_{2//} \rightarrow \kappa_1 (E_{0i} + \mathcal{E}_{0r}) = \kappa_2 \mathcal{E}_{0t}. \quad (41.31)$$

Resolvendo este sistema e lembrando que  $\theta_i = \theta_r$ , obtemos

$$(\mathcal{E}_{0r})_{\beta} = \frac{\kappa_2 \cos \theta_i - \kappa_1 \cos \theta_t}{\kappa_2 \cos \theta_i + \kappa_1 \cos \theta_t} E_{0i}, \quad (41.32)$$

$$(\mathcal{E}_{0t})_{\beta} = \frac{2\kappa_1 \cos \theta_i}{\kappa_2 \cos \theta_i + \kappa_1 \cos \theta_t} E_{0i}. \quad (41.33)$$

sendo que o índice  $\beta$  se refere ao caso de campos elétricos contidos no plano de incidência e, também, que estes resultados correspondem a  $\mathcal{E}_{0r} = E_{0r}$  e  $\mathcal{E}_{0t} = E_{0t}$ .

Utilizando a lei de Snell, as razões entre os campos ficam

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{\beta} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}, \quad (41.34)$$

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{\beta} = \frac{2 \cos \theta_i \sin \theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)}. \quad (41.35)$$

### • balanço energético

As proporções da energia incidente que são refletida e transmitida são determinadas incorporando os resultado (41.28), (41.29), (41.34) e (41.35) na expressão do vetor de Poynting. Para todas as ondas, ele tem a forma

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 \omega} \vec{k} \quad (41.36)$$

e a sua projeção sobre a normal à interface é dada por

$$\vec{S} \cdot \vec{n} = \frac{E^2}{\mu_0 \omega} k \cos \theta. \quad (41.37)$$

Como no caso da aula 40, as intensidades das várias ondas sobre a interface são dadas por  $I = \langle \vec{S} \cdot \vec{n} \rangle$  e dadas por

$$I_i = \frac{k_1}{2\mu_0 \omega} E_{0i}^2 \cos \theta_i, \quad (41.38)$$

$$I_r = \frac{k_1}{2\mu_0 \omega} E_{0r}^2 \cos \theta_r, \quad (41.39)$$

$$I_t = \frac{k_1}{2\mu_0 \omega} E_{0t}^2 \cos \theta_t. \quad (41.40)$$

Assim, os coeficientes de reflexão  $R = I_r/I_i$  e  $T = I_t/I_i$  são dados por

$$R = \left| \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right|^2, \quad (41.41)$$

$$T = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \left| \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right|^2 \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} = \left| \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right|^2 \frac{\tan \theta_i}{\tan \theta_t}, \quad (41.42)$$

usando a lei de Snell.

Como existem duas configurações diferentes para o campo elétrico da onda incidente, temos duas expressões diferentes para  $R$  e  $T$ , dadas por

$$R_\alpha = \frac{\text{sen}^2(\theta_i - \theta_t)}{\text{sen}^2(\theta_i + \theta_t)}, \quad (41.43)$$

$$T_\alpha = \frac{\text{sen}(2\theta_i) \text{sen}(2\theta_t)}{\text{sen}^2(\theta_i + \theta_t)}, \quad (41.44)$$

$$R_\beta = \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_t)}{\tan^2(\theta_i + \theta_t)}, \quad (41.45)$$

$$T_\beta = \frac{\text{sen}(2\theta_i) \text{sen}(2\theta_t)}{\text{sen}^2(\theta_i + \theta_t) \cos^2(\theta_i - \theta_t)}. \quad (41.46)$$

Estes resultados descrevem os balanços energéticos associados a ondas que se propagam de um meio 1 para um meio 2, ambos sem absorção. A dependência dos meios nestas expressões está implícita no ângulo  $\theta_t$ , que é determinado pela lei de Snell, eq.(41.18), onde  $k_1$  e  $k_2$  dependem da frequência da onda. Por isso, o mesmo acontece com  $\theta_t$ .

### • o ângulo de Brewster

Um efeito muito interessante, associado aos coeficientes de reflexão  $R$  e de transmissão  $T$ , ocorre quando vale a relação

$$\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2}. \quad (41.47)$$

Substituindo  $\theta_t$  obtido a partir dela nas eqs.(41.43)-(41.46), obtemos

$$R_\alpha = \cos^2(2\theta_i), \quad (41.48)$$

$$T_\alpha = \sin^2(2\theta_i), \quad (41.49)$$

$$R_\beta = 0, \quad (41.50)$$

$$T_\beta = 1. \quad (41.51)$$

Calculando o zero de  $\theta_t = \pi/2 - \theta_i$  e usando a lei de Snell, encontramos

$$tg\theta_i = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}. \quad (41.52)$$

Assim, quando uma onda não polarizada incide sobre a interface de um dielétrico transparente segundo o ângulo  $\theta_i$  dado pela eq.(41.52), a componente do tipo  $\beta$  é totalmente transmitida e a onda refletida é linearmente polarizada na direção perpendicular ao plano de incidência. Esta é uma maneira de se obter luz polarizada a partir de luz não polarizada. O ângulo  $\theta_i$ , dado pela eq.(41.52) é conhecido como ângulo de Brewster, o físico escocês que determinou este efeito com precisão.

### • exercícios

1. Considere o caso de uma onda eletromagnética que incide sobre a interface entre dois meios transparentes, caracterizados pelos vetores de onda  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$ .

a) Determine, no caso  $\kappa_1 = \kappa_2$ , as relações entre as amplitudes dos campos elétricos refletido, transmitido e incidente, para as polarizações, nos casos  $\alpha$  e  $\beta$ .

b) Explique os seus resultados.

2. Uma onda eletromagnética incide normalmente sobre a interface entre dois dielétricos transparentes, caracterizados pelos vetores de onda  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$ .

a) Determine os coeficientes de reflexão  $R$  e de transmissão  $T$ , para as polarizações  $\alpha$  e  $\beta$ .

b) Mostre que, nos dois casos,  $R + T = 1$ .

3. O estudo de uma onda eletromagnética que incide sobre a interface entre dois meios transparentes foi feito com base em apenas duas das quatro condições de contorno apresentadas na aula 39, as dadas pelas eqs.(39.45) e (39.47). Mostre que, no caso das polarizações  $\alpha$  e  $\beta$ , as outras duas condições de contorno, eqs.(39.46) e (39.48), também são satisfeitas pelos resultados (41.26), (41.27), (41.32) e (41.33).

### • respostas

1. a)  $E_{0r} = 0$  e  $E_{0t} = E_{0i}$ , para os casos  $\alpha$  e  $\beta$ .

b) Se  $\kappa_1 = \kappa_2$ , os efeitos da interface desaparecem e tudo se passa como se ela não existisse.

2. a)  $R = \left( \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \right)^2, \quad T = \frac{4\kappa_1 \kappa_2}{(\kappa_1 + \kappa_2)^2},$  para os casos  $\alpha$  e  $\beta$ .



## Capítulo 42

# interação da luz com a matéria: fenômenos

- semi-espelhos

Os espelhos comuns são feitos pelo depósito de metais, em geral, prata, sobre superfícies de vidro. Como discutimos na aula 37, a espessura de penetração da luz na prata é  $\delta \sim 2 \times 10^{-8}$  m. Supondo que cada átomo tenha um diâmetro de  $2 \times 10^{-10}$  m, esta distância corresponde a uma camada de cerca de 100 átomos. A cada  $\delta$  que a luz percorre no interior do metal, o campo elétrico da onda é reduzido a  $1/e \sim 37\%$  do valor anterior. Como a energia da onda é associada ao quadrado do campo, ao longo desta distância, ela cai para  $1/e^2 \sim 14\%$  do valor inicial. Isto significa que podemos construir *semi-espelhos*, controlando a espessura da camada de átomos depositada sobre o metal, de modo a fazer com que os coeficientes de reflexão  $R$  e de transmissão  $T = 1 - R$  tenham os valores que quisermos. Para que eles possam ser manuseados, a fina camada de átomos de prata é sanduichada entre duas lâminas de vidro. Deste modo, o semi-espelho é simétrico pois, se atirmos uma certa quantidade de energia luminosa de qualquer um dos lados, uma quantidade menor, multiplicada por  $T$ , sai do outro.

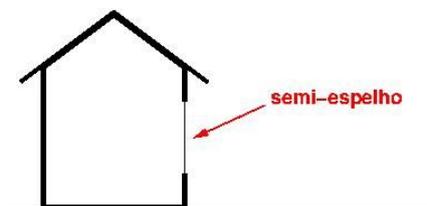


Figura 42.1: Um semi-espelho na janela de uma casa.

Para fixar idéias, suponhamos que o nosso semi-espelho, com  $R = 0,8$  e  $T = 0,2$ , seja colocado em uma janela, na parede externa de uma casa, como indica a figura ???. Maria está dentro da casa e João, do lado de fora, e ambos olham para o semi-espelho. Se Maria fechar todas as portas e demais janelas da casa e acender as luzes internas, haverá um

fluxo de energia através do semi-espelho. Chamando de  $P_{int}$  a potência luminosa que as lâmpadas internas à casa fazem incidir sobre o semi-espelho e de  $P_{ext}$  a potência que chega a ele vinda do lado de fora, devida ao Sol, de dia ou às estrelas, de noite, ou a outras fontes. Em qualquer situação, a potência  $P_M$ , que *sai* do semi-espelho em direção ao interior da casa, e  $P_J$ , que *sai* dele em direção ao exterior, são dadas por

$$P_M = 0,8 \times P_{int} + 0,2 \times P_{ext} \quad \text{e} \quad P_J = 0,2 \times P_{int} + 0,8 \times P_{ext}.$$

Por isso, numa noite muito escura, na qual  $P_{ext} \sim 0$ , Maria vê apenas o seu reflexo no semi-espelho, enquanto que João vê Maria e não se vê. Num dia claro, em que  $P_{ext} \gg P_{int}$ , a situação se inverte, pois Maria recebe uma imagem forte de João, superposta a um pouco do seu próprio reflexo. Dada a diferença de intensidades, Maria tem apenas a impressão de ver João, pois não percebe o seu reflexo. João, por outro lado, tem apenas a impressão de se ver refletido no semi-espelho, embora receba uma imagem fraca de Maria. Este exemplo deixa claro que o que as pessoas veem quando olham um semi-espelho é determinado apenas pela relação entre as iluminações dos dois ambientes que ele separa.

Se, ao invés de um semi-espelho, tivéssemos na janela da casa um vidro transparente, recoberto por uma película escura, como as usadas em carros, a discussão qualitativa de quem vê quem seria mais ou menos análoga, embora um pouco mais complicada, pois seria preciso incluir os efeitos devidos à absorção da luz pelo material da película.

### • polarização

Vimos, na aula 13, que qualquer onda eletromagnética sempre pode ser pensada como uma superposição de ondas com polarizações lineares.

As equações de Maxwell são compatíveis com o princípio da superposição e, por isso, o campo elétrico de qualquer onda pode sempre ser decomposto em uma soma de duas componentes ortogonais. Como estas componentes podem ser quaisquer, existem infinitas decomposições possíveis. O mesmo vale para as polarizações, como sugere a figura 42.2, onde as flechas de duas pontas indicam, *qualitativamente*, as direções possíveis e, não, as intensidades dos campos elétricos associados.

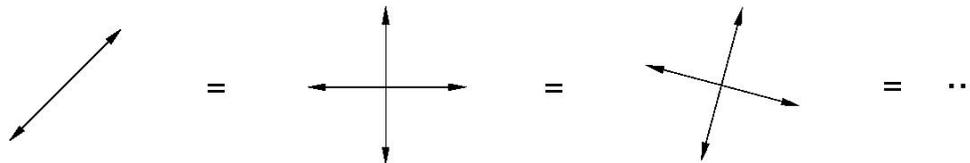


Figura 42.2: Uma onda polarizada pode ser decomposta de maneiras diferentes e equivalentes.

A luz que, depois de iluminar o mundo à nossa volta, chega aos nossos olhos é, em geral, composta por uma superposição aleatória de ondas polarizadas em direções diferentes. Costuma-se dizer que tal superposição corresponde a uma onda não polarizada. Entretanto, esta é uma prática infeliz pois, rigorosamente falando, ondas eletromagnéticas não polarizadas não existem. Toda onda tem de ter um campo elétrico, que possui uma direção, identificada como a sua polarização.

Como cada uma dessas flechas pode ser decomposta numa soma de duas componentes ortogonais, o mesmo vale para o feixe de flechas, como indica a figura 42.3.

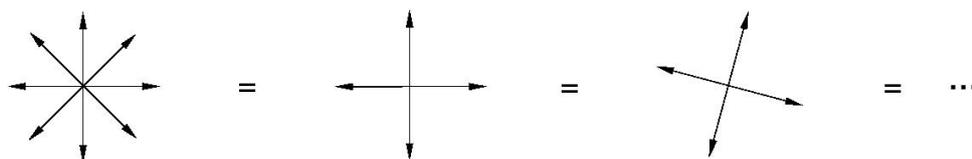


Figura 42.3: Uma superposição aleatória de ondas polarizadas pode ser decomposta de maneiras diferentes e equivalentes.

Ainda que a superposição aleatória de polarizações seja a situação mais comum, existem alguns efeitos físicos que produzem luz polarizada e são mencionados na sequência. Como os olhos humanos não conseguem detectar a polarização da luz, somente podemos perceber a presença de luz polarizada com o auxílio de instrumentos.

Atualmente, os instrumentos mais acessíveis são os *filtros polarizadores*, bastante usados em fotografia e que podem ser comprados facilmente. Existem filtros sensíveis a polarizações circulares, como os usados em cinema 3D, mas os mais comuns, considerados aqui, são os que permitem a passagem de luz polarizada linearmente, em uma dada direção. Um filtro linear é caracterizado por uma direção de transmissão e quando a luz incidente tem polarização paralela a esta direção, ela consegue atravessá-lo. Por outro lado, o filtro absorve as componentes da luz com campos elétricos ortogonais à direção de transmissão. Quando luz com polarização aleatória incide sobre um filtro linear, temos a situação indicada na figura 42.4(a). Se o feixe incidente já estiver polarizado, podemos ter as situações indicadas nas figuras (b) e (c).

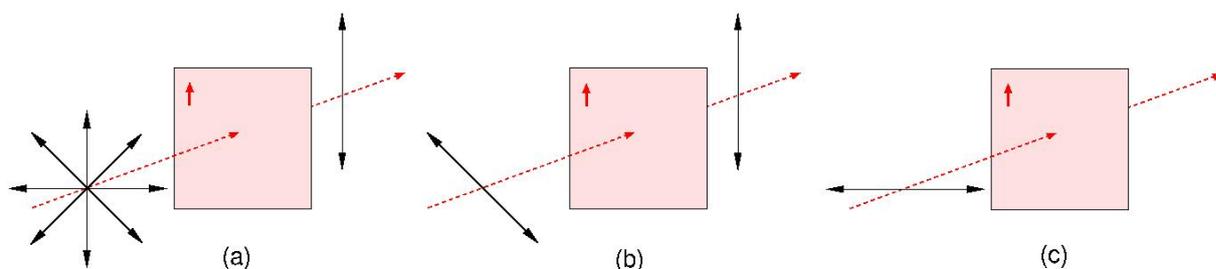


Figura 42.4: Um filtro polarizador, com direção de transmissão indicada pela flecha vertical vermelha; nos casos (a) e (b), componentes da onda incidente atravessam o filtro; no caso (c) a polarização da onda incidente é ortogonal à direção de transmissão e não há onda transmitida.

Deste modo, no caso de um feixe polarizado, se girarmos o filtro em torno do seu eixo, sempre é possível encontrar uma orientação segundo a qual a luz não passa. Já no caso do feixe polarizado aleatoriamente, isto não acontece. Por este motivo, para perceber a presença de luz polarizada no nosso ambiente, basta colocar o filtro em frente aos nossos olhos e girá-lo lentamente, em torno do seu eixo. Se a intensidade de um setor da imagem variar bastante com esta rotação, é porque a luz que provem dele é polarizada.

Hoje, as fontes de luz polarizada mais disponíveis são as telas de cristal líquido de computadores, telefones celulares e relógios digitais. Como as tecnologias empregadas nestes vários sistemas variam, os efeitos observados quando giramos o filtro polarizador em frente às telas destes objetos não são todos iguais. Ainda assim, a presença da luz polarizada é sempre perceptível.

### • polarização por reflexão

Ao nos olharmos no espelho, através de um filtro polarizador, nada acontece quando o giramos em torno do seu eixo. Isto ocorre porque o reflexo do espelho é causado por uma fina camada metálica depositada sobre vidro, e a reflexão em metais não depende da polarização da luz incidente. A situação muda, entretanto, quando olhamos dielétricos através de filtros polarizadores. Como discutimos na aula 41, o coeficiente de reflexão  $R$  em dielétricos depende tanto do ângulo  $\theta_i$  da onda incidente quanto da sua polarização. Nos casos  $\alpha$  e  $\beta$ , em que as polarizações da onda incidente são, respectivamente, perpendicular e paralela ao plano de incidência, as eqs. (42.1) e (42.2) fornecem

$$R_\alpha = \left[ \frac{\text{sen}(\theta_i - \theta_t)}{\text{sen}(\theta_i + \theta_t)} \right]^2, \quad (42.1)$$

$$R_\beta = \left[ \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \right]^2, \quad (42.2)$$

onde  $\theta_t$  é o ângulo de transmissão. Para tornar o significado destes resultados mais claro, consideramos o exemplo concreto de luz incidindo, a partir do vácuo, sobre uma placa de vidro, cujo índice de refração é  $n \simeq 1,5$ . A lei de Snell que, neste caso, pode ser escrita como  $\text{sen} \theta_t = \text{sen} \theta_i / 1,5$ , permite-nos obter  $\theta_t$  e os coeficientes de reflexão em função de  $\theta_i$ . O ângulo de Brewster é dado por  $\tan \theta_i = 1,5 \rightarrow \theta_i = 56,31^\circ$ . Alguns valores estão indicados na tabela 42.1, que contém várias informações muito interessantes.

$\theta_i$ (grau)	$\theta_t$ (grau)	$R_\alpha$	$R_\beta$
0	0	0,040	0,040
15,00	9,94	0,044	0,036
30,00	19,47	0,059	0,025
45,00	28,13	0,092	0,009
56,31	33,69	0,148	0
60,00	33,26	0,177	0,002
75,00	40,09	0,399	0,107
90,00	41,81	1	1

Uma delas é que  $R_\alpha$  e  $R_\beta$  são iguais apenas nas situações extremas,  $\theta_i = 0$  e  $\theta_i = 90^\circ$ . A igualdade em  $\theta_i = 0$  ocorre porque a noção de plano de incidência deixa de existir, os casos  $\alpha$  e  $\beta$  tornam-se indistinguíveis, e os campos elétricos dos dois tipos de onda são paralelos à superfície do vidro. Os valores do coeficiente de reflexão indicam que, para

incidência frontal, apenas 4% da energia da onda é refletida. Ou seja, quando olhado de frente, o vidro é *muito* transparente! Por outro lado, o vidro vai se aproximando de um espelho para ângulos de incidência próximos a  $90^\circ$ , independentemente da polarização da onda incidente. Você pode perceber este efeito encostando o rosto em grandes superfícies de vidro, tais como portas ou vitrines ou, ainda, com o auxílio de uma régua de plástico transparente, pois o índice de refração do plástico é próximo ao do vidro. Em qualquer destes casos, observe objetos à sua frente, que sejam refletidos por meio de raios rasantes, e você pode se convencer que, para eles,  $R \sim 1$ .

Fora destas situações extremas sempre  $R_\alpha > R_\beta$ , indicando que ondas com polarização ortogonal ao plano de incidência são mais refletidas e as outras, mais transmitidas. Quando a onda incide segundo o ângulo de Brewster, que para o vidro vale  $\theta_i = 56,31^\circ$ ,  $R_\beta$  se anula e apenas a onda  $\alpha$  sobrevive. Por isso, se olharmos os reflexos produzidos pelo vidro, através de um filtro polarizador, para incidências em torno de  $45^\circ$ , podemos perceber grandes mudanças quando o giramos em torno do seu eixo. O mesmo acontece quando olhamos tampos de mesa envernizados, pinturas de carros, a pele das pessoas e muitas outras coisas, que você mesmo pode descobrir.

Olhar superfícies de água também é muito interessante, pois ela também tem índice de refração próximo ao do vidro. Estas superfícies, sejam em piscinas, em lagos, no mar ou em copos cheios, são sempre horizontais. Consequentemente, o plano de incidência da luz que é refletida por uma superfície de água é sempre vertical, o que corresponde a ondas do tipo  $\alpha$  com  $\vec{E}$  na direção horizontal. Nas proximidade de  $\theta_i \sim 45^\circ$ , estas ondas são as maiores responsáveis pelo brilho da água, já que as ondas do tipo  $\beta$  são predominantemente transmitidas para o seu interior. Por isso, ao olharmos a superfície da água através de um filtro polarizador com a direção de transmissão orientada verticalmente, podemos “cortar” o brilho da água, que parece se tornar um líquido mais denso e “pesado”.

### ● as cores

Por estranho que possa parecer, *cores* não existem no mundo físico. Como sabemos, ondas eletromagnéticas com frequências bem definidas existem na natureza e, em uma pequena região do espectro, elas podem ser percebidas por olhos de animais. *Cor*, por outro lado, é o nome que designa a sensação que estas ondas provocam nos olhos humanos. Por isso, é preciso tomar cuidado e distinguir claramente os significados das palavras luz e cor. *Luz* refere-se a ondas eletromagnéticas com frequências no espectro visível, enquanto que *cor* é a sensação provocada nos olhos humanos por estas ondas. Por isto, rigorosamente, podemos falar em *cor vermelha* e *cor branca* e não deveríamos falar em *luz vermelha* e *luz branca*. Entretanto, como a confusão entre estes dois conceitos permeia a linguagem comum, é preciso entender que o termo *luz branca* quer dizer, na verdade, *uma mistura de ondas com frequências diferentes que faz com que nós a percebamos como tendo a cor branca*. Ufa! A bem da concisão nós, também usamos, de vez em quando, a palavra luz no lugar de cor mas, sempre, com o entendimento de estar abusando da linguagem.

A diferença entre luz e cor decorre do fato de a detecção da luz pelos nossos olhos envolver, além dos estímulos físicos, também aspectos fisiológicos e psicológicos. O estudo da relação entre luz e cor é muito complexa e, para dar uma idéia da sua extensão, basta lembrar que a luz, ao ser absorvida pela retina, tem de percorrer um longo caminho através de nossas estruturas biológicas, envolvendo tanto os sensores conhecidos como cones e bastonetes da retina, o nervo óptico e o interior do cérebro, no processo de se tornar cor. Esta intermediação biológica coloca a luz, no início, e a cor, no fim, de um complicadíssimo processo. Por isso, no mundo físico existem *luzes* mas, não, *cores*.

Um aspecto muito interessante desta relação é que os olhos, tanto os humanos quanto os dos outros animais, foram desenvolvidos ao longo da evolução das espécies, de modo a permitir a adaptação à vida na Terra, sempre balizada pelas leis da física. Uma evidência da estreita relação entre física e biologia está no fato de a porção visível do espectro estar na posição que ela está e ter a extensão que ela tem. A região visível tem frequências da ordem de  $f \sim 10^{15}$  Hz. Quando falamos de luz, é mais conveniente descrever as suas propriedades em termos de comprimentos de onda, relacionados às frequências por  $l = c/f$ . Nesta nova escala, o espectro da luz visível vai de  $l \sim 380$  nm, percebido como a cor violeta, até  $l \sim 780$  nm, percebido como vermelho. Uma questão muito interessante é porque a biologia se adaptou a estes valores de  $l$  e não a outros, correspondentes a ondas de rádio, à radiação infravermelha, aos raios X, por exemplo. A resposta está na intensidade de radiação solar que chega à superfície da Terra, em cada região de frequência. Grande parte do espectro de radiação que o Sol joga sobre a Terra é blindado pela atmosfera e quase não chega à superfície. Isto vale para raios  $\gamma$ , raios X, grande parte da região ultravioleta, grande parte do infravermelho, microondas. Mas existem duas “*janelas*” importantes, pelas quais a radiação solar penetra até o solo. Uma delas, ocorre nas rádio-frequências e a outra, em torno do espectro visível, estendendo-se um pouco nas regiões vizinhas, do infravermelho e do ultravioleta. Ondas de rádio tem energias relativamente baixas e, por isso, causam poucos efeitos biológicos. Já no caso do espectro visível, as energias são bastante maiores, suficientes para estimular transições eletrônicas no interior

dos átomos e das moléculas, principalmente as baseadas em cadeias de carbono. Isto permite que física e biologia se misturem e, certamente, não é por acaso que o máximo da radiação solar sobre a Terra e a máxima sensibilidade dos nossos olhos à luz ocorrem praticamente no mesmo lugar, bem no centro do espectro visível! Esta pequena região, em torno de  $l \sim 550$  nm, corresponde a uma cor verde-amarelada.

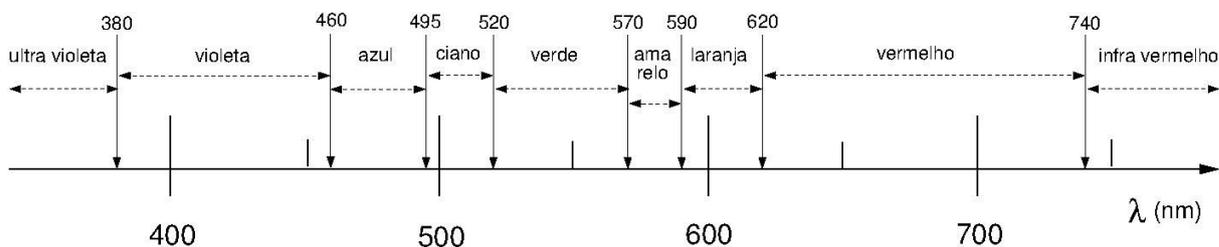


Figura 42.5: Cores do espectro visível, em função do comprimento de onda  $l$ ; tanto a divisão em cores como as várias fronteiras entre elas não são totalmente consensuais.

Como a noção de cor envolve conjuntamente aspectos físicos e psicológicos, tanto a extensão da região visível do espectro como as subdivisões no seu interior, são um pouco arbitrárias, já que determinadas por valores médios de medições feitas com grande número de pessoas. Em geral, é costume determinar a extensão do espectro como a região de comprimentos de onda que vão desde  $l \sim 380$  nm a  $l \sim 780$  nm e dividi-la em 7 “cores”: violeta (Violet), azul (Blue), ciano (Cyan), verde (Green), amarelo (Yellow), laranja (Orange) e vermelho (Red), como indica a fig.42.5. Nesta lista, os nomes em inglês foram mencionados porque são muito usados na literatura e, também, porque as suas iniciais não se repetem, o que é útil para abreviações. É interessante notar que os olhos humanos têm sensibilidades diferentes para as várias cores. Eles são mais sensíveis a comprimentos de onda na região central do espectro, para  $l \sim 550$  nm, e vão se tornando menos sensíveis à medida que nos deslocamos em direção às suas bordas, tendendo gradualmente a zero em ambas as extremidades. A curva que descreve esta sensibilidade tem uma forma parecida com uma gaussiana, com pico no centro do espectro visível.

### • o prisma

A percepção de que luz de cor branca pode se tornar colorida, depois de atravessar um prisma, já era anterior a Newton, mas foi ele quem entendeu, pela primeira vez, que a cor branca é, de fato, uma mistura de outras cores. Em termos modernos, a luz de cor branca corresponde a uma superposição de ondas eletromagnéticas com frequências e comprimentos de onda bem definidos, e a lei de Snell explica porque prismas a decompõem. Consideremos, por exemplo, um caso muito simples, no qual um prisma de vidro, com a seção transversal mostrada na fig.42.6(a), é atingido, a partir da esquerda, por um raio de luz horizontal e *monocromático*, ou seja, com frequência  $\omega$  bem definida. Como a incidência na parede vertical do vidro é normal, ele percorre o vidro sem se desviar, até atingir a parede inclinada segundo um ângulo  $\alpha$ . Supondo que o índice de refração do

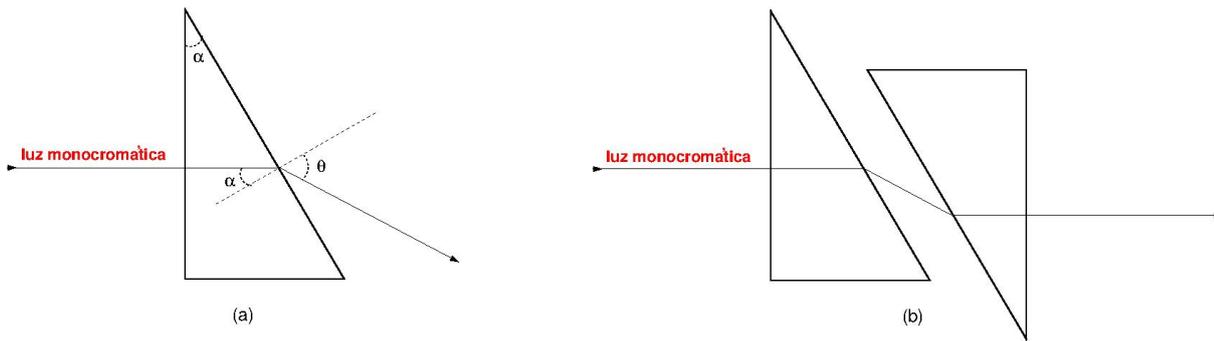


Figura 42.6: Prismas: (a) a luz monocromática é desviada ao atravessar um prisma; (b) um segundo prisma recoloca o raio de luz na direção original.

vidro para luz de frequência  $\omega$  seja  $n(\omega)$  e que o do ar seja 1, igual ao do vácuo, a lei de Snell permite escrever

$$n(\omega) \sin \alpha = \sin \theta, \quad (42.3)$$

onde  $\theta$  é o ângulo que o raio emergente faz com a normal à superfície. O importante deste resultado, para a nossa discussão, é que ele mostra que, como  $\alpha$  é fixo, o ângulo  $\theta$  depende da frequência da onda, através do índice de refração. Para os extremos do espectro, valores tabelados para o vidro são  $n_{verm} = 1,511$  e  $n_{viol} = 1,531$ , para o vermelho e o violeta. Usando estes valores na eq.(42.3) e supondo  $\alpha = 30^\circ$ , encontramos  $\theta_{verm} = 49,078^\circ$  e  $\theta_{viol} = 49,943^\circ$ , indicando que o violeta é mais desviado do que o vermelho. Desvios de luzes com frequências intermediárias estão compreendidos entre estes dois valores. Neste exemplo, a amplitude dos desvios é relativamente pequena, mas ela pode ser amplificada, variando a direção da luz incidente, o ângulo  $\alpha$  ou a geometria do prisma. Se pusermos um segundo prisma em frente do primeiro, orientado adequadamente, podemos reconstituir um feixe de cor branca, como sugere a parte (b) da figura.

### • as misturas de cores

Newton, depois de obter luzes monocromáticas por meio de prismas, passou a estudar o que acontece quando luzes de frequências diferentes são superpostas sobre uma tela. Neste processo, ele percebeu que, por exemplo, a *superposição de vermelho e verde produz amarelo*. Isto indica que, quando vemos alguma coisa amarela, não temos condição de afirmar se os nossos olhos estão sendo estimulados por *uma* luz monocromática ou por *duas*, ou mais, luzes de frequências diferentes. Analogamente, a *superposição de verde e azul produz ciano*, que é visualmente indistingível do ciano monocromático. Nestes dois casos, a cor resultante está localizada entre as cores iniciais. Existem, entretanto, situações onde isto não acontece, tal como na cor *magenta*, que é o resultado da mistura de vermelho com azul e não tem contrapartida monocromática. Ou seja, não existe uma luz de frequência bem definida associada diretamente a esta cor.

Estes processos de superposição de cores são conhecidos como *misturas aditivas*, pois

os estímulos oriundos dos vários componentes se somam nos nossos olhos. Um exemplo importante de mistura aditiva é que a *superposição de vermelho, verde e azul produz branco* e, dependendo das suas intensidades relativas, muitas outras cores também. é em misturas aditivas que se baseia o sistema de cores RGB (Red-Green-Blue  $\rightarrow$  vermelho-verde-azul) das telas de televisores e computadores. Como você pode verificar diretamente no seu computador, uma variedade muito grande de cores pode ser produzida pela combinação destas três componentes, com diferentes pesos.

Existe, ainda, um outro modo de produzir cores, baseado em *misturas subtrativas*, possível graças a filtros ou pigmentos. Estes elementos operam absorvendo seletivamente algumas das componentes da luz branca e os nossos olhos percebem o que restou. é neste tipo de processo que se baseiam as tintas e corantes. Quando vemos um carro vermelho, é porque a tinta que o recobre absorveu muitas componente do espectro e refletiu a cor vermelha, seja ela aproximadamente monocromática ou uma combinação de outras luzes que nos causam a sensação de vermelho. Como podemos perceber olhando pinturas executadas por bons artistas, tintas e pigmentos podem ser misturados de modo a produzir muitas cores diferentes.

#### • coisas brancas

Newton, ao estudar as propriedades da luz, notou que existem várias superposições de cores que resultam na cor branca e, atualmente, sabemos bem que estas misturas aditivas não precisam envolver, necessariamente, componentes monocromáticas. Por exemplo, o branco pode resultar de misturas, com intensidades adequadas, de *vermelho + ciano*, de *amarelo + azul* ou ainda, de *vermelho + verde + azul*. Por isso, quando os nossos olhos identificam uma cor branca, é impossível saber quais são as luzes que a compõem.

Nos nossos ambientes cotidianos, existem muitas coisas e substâncias que nos parecem brancas, tais como açúcar, sal, folhas de papel, cabelos de idosos, algodão, vapor, núvens ou, mesmo, geladeiras. Em todos estes casos, a cor branca, que identificamos como sendo a *do* açúcar ou *da* núvem é, de fato, a da luz que ilumina o açúcar ou a núvem. Objetos brancos, simplesmente, nos devolvem grande parte da luz que incide sobre eles.

Este tipo de propriedade decorre do fato de objetos brancos serem constituídos por estruturas *transparentes e irregulares*. Estas estruturas podem ser os grãos do açúcar ou sal, amontoados em grande quantidade, uns sobre os outros, fibras emaranhadas, no caso de papel, algodão e de tecidos, muitas gotículas de água numa pequena região do espaço, como no caso de vapor e núvens. Se estas estruturas podem nos parecer pequenas na escala do nosso corpo, elas podem, também ser consideradas como corpos macroscópicos para as interações da luz. Um grão de açúcar tem da ordem de um bilhão de átomos. Quando a luz incide sobre estas estruturas, ocorrem múltiplas interações em interfaces ar-estrutura e, em cada uma delas, parte da energia da onda é refletida e outra parte transmitida, os ângulos de incidência e de reflexão são iguais, a lei de Snell se aplica às refrações. O grande problema consiste em empregar este tipo de descrição, bastante

detalhada, a um número enorme de interfaces irregulares. Por isso, é preciso pensar em termos de comportamentos médios.

Tanto a falta de regularidade das estruturas transparentes como a sua distribuição não uniforme no espaço tornam impraticável prever o caminho que um raio de luz, que incide sobre uma substância “branca”, vai percorrer no seu interior. Existem ondas refletidas e transmitidas em cada interface e, depois de múltiplas interações, parte da energia incidente sai da substância em várias direções diferentes. De modo complementar, parte desta energia adentra cada vez mais no interior do material, onde ela pode ser absorvida ou sair do outro lado. Uma situação esquemática, deste tipo, está ilustrada na fig.42.7(a).

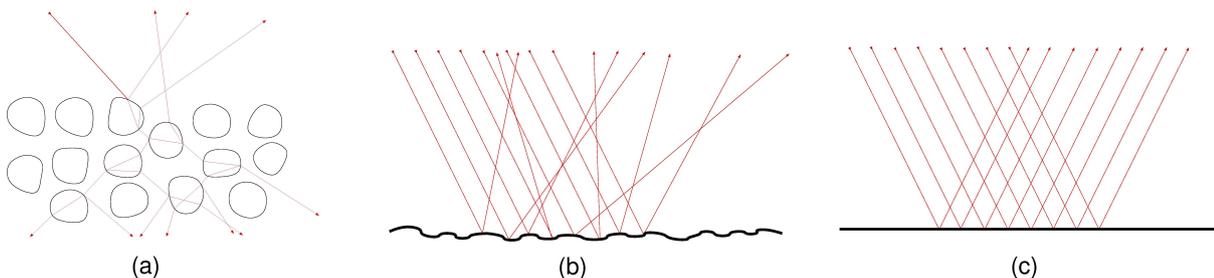


Figura 42.7: Um raio de luz incide sobre um conjunto de corpos irregulares e transparentes (a); raios de luz incidem sobre superfícies rugosa (b) e lisa (c).

O processo pelo qual a luz que incide sobre um objeto, segundo uma direção bem definida, e emerge dele, em várias direções diferentes, é conhecido como *difusão*. Ele acontece quando a interface entre dois meios é rugosa, irregular, não lisa, pois isto faz com que raios de luz provenientes de uma fonte bem definida sejam refletidos em muitas direções diferentes. Ou, o que é equivalente, invertendo o sentido de percurso da luz, que raios provenientes de vários lugares diferentes do ambiente possam chegar juntos aos nossos olhos.

Tome, por exemplo, uma régua de plástico transparente que, para ângulos de incidência grandes, reflete bastante luz. No interior de uma sala, você pode orientar adequadamente a régua de modo a enxergar uma lâmpada acesa. Se você passar uma lixa de madeira sobre a régua, a sua superfície fica arranhada e deixa de ser lisa. Neste caso, ela deixa de refletir a luz e passa a difundi-la, e o que você vê é uma mancha esbranquiçada. Note o modo como a linguagem é usada neste exemplo. No caso da régua lisa, atribuímos o branco diretamente à luz da lâmpada, pois a reconhecemos no seu reflexo. No caso da régua lixada, ao dizermos que *a mancha é branca*, atribuímos o branco à mancha e, não mais, à lâmpada. Ou seja, o fato de vermos uma luz difundida leva-nos a ignorar a sua fonte e pensar somente no objeto do qual ela é re-emitada. é neste sentido que o açúcar e a nuvem *não “são”* brancos mas, apenas, parecem brancos.

O processo de difusão é uma característica geral de superfícies rugosas, independentemente das cores que elas possam ter. Para que o efeito seja perceptível, é preciso que as rugosidades sejam pequenas. Por exemplo se olharmos duas superfícies pintadas com a

mesma tinta vermelha, uma delas lisa e outra rugosa, a primeira nos parecerá *brilhante* e a segunda, *fosca*. Nas superfícies brilhantes, podemos ver os reflexos de fontes de luz próximas, pois o fato de a superfície ser lisa faz com que os ângulos de incidência e reflexão da luz sejam aproximadamente iguais. Já nas superfícies foscas, os raios de luz que chegam aos nossos olhos são provenientes de pontos diversos da superfície. Tais situações estão indicadas nas figs.42.7 (b) e (c).

Em muitos casos, a quantidade de difusão que ocorre em uma superfície pode ser alterada pela adição de substâncias transparentes, tais como água, óleo, vernizes ou cera. Por exemplo, quando cortamos um pedaço de madeira com uma serra, a seção cortada nos parece bastante irregular e opaca. Se a lixarmos, ela fica mais lisa, mas permanece ainda opaca, pois as fibras da madeira, que são predominantemente transparentes e distribuídas irregularmente sobre a superfície, difundem a luz incidente. Entretanto, a sua aparência muda bastante se aplicarmos sobre a madeira uma fina camada de verniz, cera, ou óleo. Isto acontece porque o índice de refração destas substâncias é próximo ao das fibras da madeira, o que faz com que as múltiplas reflexões nas interfaces destas fibras, ilustradas na fig.42.7 (a), se tornem menos importantes. Assim, ao mesmo tempo que a superfície da madeira passa a ter uma aparência mais brilhante, podemos admirar melhor as suas cores e os seus veios característicos.

Uma outra situação deste tipo ocorre quando pingamos uma gota de óleo de cozinha sobre uma folha de papel branco. Se colocarmos a folha sobre o tampo de uma mesa, a mancha de óleo nos parece mais escura do que o papel à sua volta, o que indica que ela difunde menos luz do que ele. Por outro lado, se olharmos o papel contra a luz, veremos a mancha de óleo mais clara do que a região seca em volta, o que indica que a mancha transmite mais luz do que o papel. O aumento da transmissão e a diminuição da difusão são fenômenos diretamente correlacionados e ambos decorrem da supressão das múltiplas reflexões nas superfícies das fibras do papel pela presença do óleo, o mesmo tipo de efeito faz com que uma camiseta de algodão azul nos pareça mais escura quando molhada, por água ou suor, e que uma camista branca molhada fique bastante transparente.

Tanto espelhos quanto estruturas transparentes e irregulares devolvem de volta a luz que é atirada sobre eles, os primeiros de forma mais organizada, os segundos de forma bem desorganizada. Na natureza existem, também, materiais com características totalmente opostas, que absorvem praticamente toda a luz que é atirada sobre eles e, por isso, são de *cor preta*. Exemplos comuns à nossa volta são o carvão e o grafite. Outro exemplo é a pupila dos olhos humanos e de muitos animais, que é um orifício, pelo qual a luz penetra no interior do globo ocular. Em condições normais, quando a luz entra no globo, ela é praticamente toda absorvida no seu interior, e apenas uma pequena fração sai de volta pela pupila. Esta fração é tão pequena, que é difícil percebê-la. é para aumentar a quantidade de luz que sai do globo e tornar o seu interior visível que oftalmologistas usam luzes muito intensas em exames de fundo de olho. A luz que emerge do interior dos nossos globos oculares também pode ser percebida nas fotos tiradas com flashes, nas quais as pessoas aparecem com olhos vermelhos. Na física, o corpo mais negro que pode ser construído é um objeto metálico oco, com um pequeno orifício, tal como o utilizado nos

estudos da radiação do corpo negro, que foram muito importantes no desenvolvimento da mecânica quântica.

No mundo das cores, os *cinzas* correspondem às inúmeras misturas possíveis das cores *branca e preta* e são caracterizadas como cores *acromáticas*.

## • o céu

O modelo de Drude representa um bom ponto de partida para o estudo da interação de ondas eletromagnéticas com meios materiais macroscópicos, tais como sólidos ou líquidos. Ele foi proposto em 1900, numa época em que, mesmo a idéia de átomo, ainda não estava bem estabelecida no interior da comunidade científica. Ele é, também, bastante anterior ao desenvolvimento da mecânica quântica que, atualmente, é a teoria que explica o comportamento de partículas de tamanhos comparáveis ou menores do que o do átomo. No início do século 20, paralelamente à construção da mecânica quântica, houve um desenvolvimento tecnológico muito grande, o que possibilitou grandes avanços na física experimental. O resultado deste processo foi que muitos detalhes novos da interação de ondas eletromagnéticas com a matéria passaram a ser conhecidos e as limitações do modelo de Drude começaram a aparecer. Algumas delas, associadas a raios  $X$  e  $\gamma$  de altas energias, foram mencionadas ao fim da aula 36.

A explicação dos fenômenos ópticos fica cada vez mais dependente da mecânica quântica à medida que o número de corpos envolvidos nas interações básicas dimiui. Se uma placa de vidro é obviamente um objeto macroscópico e um grão de sal ainda pode ser considerado como um corpo macroscópico, o mesmo não vale para uma molécula. Por isso, para estudar as propriedades ópticas da atmosfera, mesmo de modo qualitativo, é preciso considerar como as moléculas se comportam.

Átomos e moléculas são sistemas nos quais elétrons estão organizados em torno de um ou mais núcleos atômicos. Quando luz incide sobre estes sistemas, o seu campo elétrico produz forças sobre as cargas e há uma deformação do sistema. Na mecânica clássica, tais deformações eram pensadas como sendo contínuas mas, no contexto da mecânica quântica, elas são vistas como transições descontínuas, entre estados com energia bem determinada. Quando um átomo ou molécula tem a menor energia possível, dizemos que o sistema está no seu *estado fundamental* e, quando ele sofre uma transição induzida pela luz, dizemos que o sistema está *excitado*. Como estados excitados têm energias maiores do que a do estado fundamental, parte da energia da onda incidente é absorvida no processo de excitação. Em geral, a excitação do sistema dura um tempo bastante curto e ele devolve para o ambiente a energia que havia absorvido. Neste processo de excitação-desexcitação, é comum que a luz proveniente de uma direção seja devolvida segundo uma direção diferente. Deste modo, a interação da luz com o sistema quântico pode desviar a luz do seu caminho.

Quando um feixe de luz incidente, com uma direção bem definida, é atirado sobre um número grande de átomos ou moléculas, ele pode ser espalhado em muitas direções diferentes. Por isso, este tipo de processo é conhecido como *espalhamento* da luz.

Transportamos, agora, esta discussão para o caso do sol incidindo sobre a atmosfera terrestre, que é composta principalmente por nitrogênio ( $N_2 \sim 78\%$ ), oxigênio ( $O_2 \sim 21\%$ ), e muitos outros gases, incluindo  $CO_2$  e, também, por vapor d'água. Tanto para o nitrogênio quanto para o oxigênio, o processo de excitação-desexcitação é máximo para ondas com frequências na região do ultra-violeta. A consequência disto, na região visível, é que as luzes com  $\lambda$  menor interagem mais com estes sistemas do que as que têm  $\lambda$  maior e, assim, a luz azul é mais espalhada do que a luz vermelha. Quando um feixe de luz do sol, que tem a cor branca e é composta por um espectro de frequências diferentes, atravessa a atmosfera, as interações com o ar desviam mais os raios do lado azul do espectro do que os do lado vermelho. Assim, à medida que este feixe avança ao longo da atmosfera, ele vai se tornando mais avermelhado e menos intenso, devido à perda das componentes do lado azul do espectro.

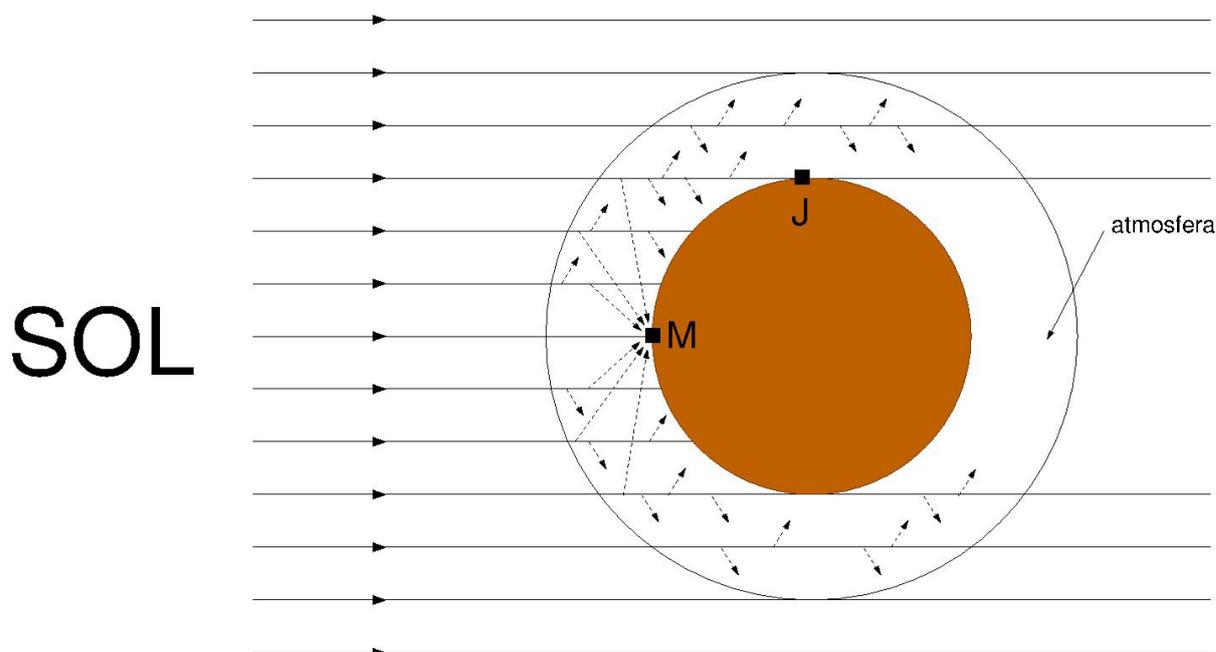


Figura 42.8: A luz de cor branca incidente sobre a Terra, ao penetrar na atmosfera, tem suas componentes do lado azul do espectro, indicadas pelos raios tracejados, mais espalhadas; por isso Maria (M), ao meio dia, vê o céu azul, em qualquer direção que ela olhe; pelo mesmo motivo João (J), em outro lugar do mundo, vê o por-do-sol avermelhado, pois os raios que chegam até ele perderam as componentes azuladas, ao atravessar um longo trecho de atmosfera. Nesta figura, a espessura da atmosfera aparece muito exagerada, a bem do desenho.

Uma consequência deste processo é que, num dia sem muitas núvens, ao meio dia, Maria olha para cima e vê a cor azul, para onde quer que ela olhe, pois a luz espalhada para fora do feixe chega aos seus olhos, como sugere a fig.42.8. E, seguindo a tradição, ela

chama aquela região azulada de céu... João, em um outro lugar do mesmo mundo, está olhando o mesmo sol se pondo e observa o feixe luminoso de frente, o que faz com que ele o perceba amarelo-avermelhado. No caso do por-do-sol, o efeito é amplificado porque o caminho percorrido pela luz no interior da atmosfera é mais longo do que o do meio-dia.

As mesmas interações eletromagnéticas que excitam as moléculas do ar também fazem com que, no processo de desexcitação, a luz fique polarizada. Este efeito pode ser percebido com facilidade quando olhamos as regiões azuis do céu através de um filtro polarizador, girando-o em torno do seu eixo. Vale a pena experimentar!