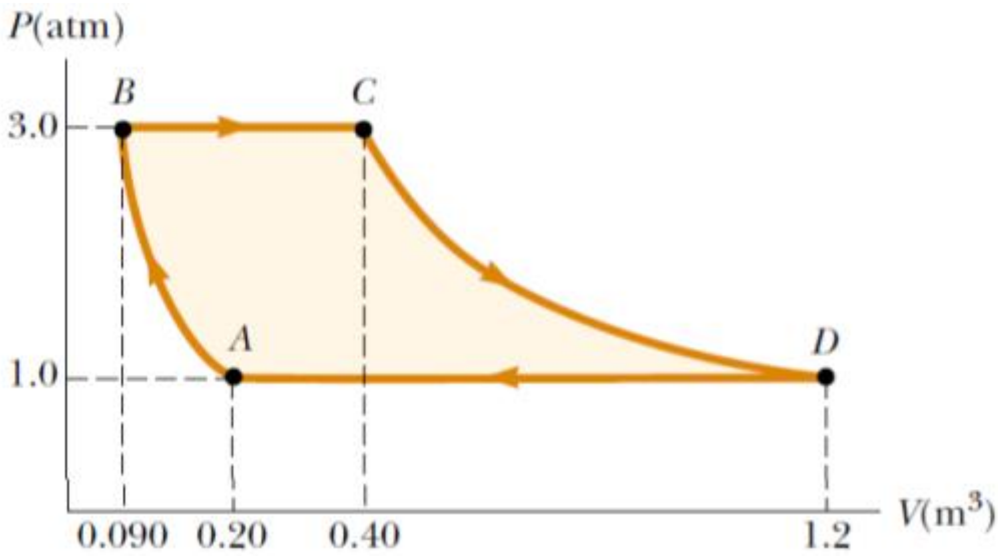
Física do Calor 2021 IME – Provinha 2 – Gabarito

Um certo gás ideal é submetido a um processo cíclico mostrado na figura abaixo, onde o processo de A para B é adiabático, de B para C é isobárico, de C para D é isotérmico, de D para A é isobárico.



Sabendo que $1\ atm = 1{,}013 \cdot 10^5\ Pa$, responda:

(a) (3,0) Determine o valor de $\gamma = C_P/C_V$, C_P e C_V. Expresse C_P e C_V em função de R.

Resolução:

Considerando que o processo que liga os pontos A e B é adiabático, vale que

$$P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma \rightarrow \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^\gamma = \frac{P_B}{P_A}$$

Tomando o logaritmo da equação:

$$\gamma \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right) = \ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right)$$

Logo,

$$\gamma = \frac{\ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right)}{\ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right)}$$

Assim,

$$\gamma = \frac{\ln\left(\frac{3}{1}\right)}{\ln\left(\frac{0{,}20}{0{,}090}\right)} = 1{,}3758318$$

Arredondando na primeira casa decimal, podemos aproximar

$$\gamma \approx 1{,}4$$

Isso indica que o gás se comporta como um gás ideal diatômico. Usando essa justificativa, você poderia dizer direto que

$$C_V = \frac{5}{2}R \qquad e \qquad C_P = \frac{7}{2}R$$

Outra resposta aceitável seria resolver o sistema:

$$\begin{cases} C_P = \gamma C_V \\ C_P = C_V + R \end{cases} \rightarrow \gamma C_V = C_V + R \rightarrow C_V = \frac{R}{\gamma - 1} \qquad e \qquad C_P = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

Usando a resposta para γ com três casas decimais:

$$C_V = \frac{R}{1{,}376 - 1} \rightarrow C_V = 2{,}66\ R$$

$$C_P = \frac{1{,}376}{1{,}376 - 1} R \rightarrow C_P = 3{,}66\ R$$

(b) (2,0) Determine os trabalhos realizados nos processos AB e CD.
Resolução:
Para calcular o trabalho realizado pelo gás no processo adiabático AB, podemos usar dois procedimentos diferentes. O primeiro consiste em usar a primeira lei da termodinâmica com $Q_{AB} = 0$:

$$\Delta U_{AB} = Q_{AB} - W_{AB} \rightarrow W_{AB} = -\Delta U_{AB}$$

A variação da energia interna de um gás ideal é sempre dada por

$$\Delta U_{AB} = nC_V \Delta T_{AB} = nC_V(T_B - T_A)$$

Portanto,

$$W_{AB} = -nC_V(T_B - T_A)$$

Por outro lado, sabemos que

$$P_A V_A = nRT_A \rightarrow nT_A = \frac{P_A V_A}{R}$$

Analogamente:

$$nT_B = \frac{P_B V_B}{R}$$

Com isso,

$$W_{AB} = -\frac{C_V}{R}(P_B V_B - P_A V_A) = -\frac{1}{\gamma - 1}(P_B V_B - P_A V_A)$$

Agora vamos chegar nesse mesmo resultado por um outro método. Para todos os pontos na curva AB, vale:

$$PV^{\gamma} = P_A V_A^{\gamma} \rightarrow P = \frac{P_A V_A^{\gamma}}{V^{\gamma}}$$

Logo, o trabalho pode ser calculado pela integral:

$$W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} P\, dV = P_A V_A^{\gamma} \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V^{\gamma}} = P_A V_A^{\gamma} \left(\frac{V^{-\gamma+1}}{1-\gamma}\right)_{V_A}^{V_B} = \frac{1}{1-\gamma}\left[P_A V_A^{\gamma} \cdot V_B^{1-\gamma} - P_A V_A^{\gamma} \cdot V_A^{1-\gamma}\right]$$

Como $P_A V_A^{\gamma} = P_B V_B^{\gamma}$, no primeiro termo dentro dos colchetes podemos escrever:

$$W_{AB} = -\frac{1}{\gamma - 1}\left[V_B \cdot V_B^{1-\gamma} - P_A V_A^{\gamma} \cdot V_A^{1-\gamma}\right] = -\frac{1}{\gamma - 1}(P_B V_B - P_A V_A)$$

Note que os resultados concordam entre si! Agora é só fazer as contas numéricas:

$$P_B V_B - P_A V_A = 1{,}013 \cdot 10^5\ (3{,}0 \cdot 0{,}090 - 1{,}0 \cdot 0{,}20) = 7{,}09 \cdot 10^3\ J$$

Usando $\gamma = 1{,}4$:

$$W_{AB} = -\frac{1}{0{,}4} \cdot 7{,}09 \cdot 10^3\ J \rightarrow W_{AB} = -17{,}7 \cdot 10^3\ J = -17{,}7\ kJ$$

Usando $\gamma = 1{,}376$:

$$W_{AB} = -\frac{1}{0{,}376} \cdot 7{,}09 \cdot 10^3\ J \rightarrow W_{AB} = -18{,}8 \cdot 10^3\ J = -18{,}8\ kJ$$

As duas respostas serão consideradas baseado no que foi respondido no item (a).

Agora vamos olhar para o processo isotérmico CD:

$$PV = P_C V_C \rightarrow P = \frac{P_C V_C}{V}$$

Logo,

$$W_{CD} = \int_{V_C}^{V_D} P\, dV = P_C V_C \int_{V_C}^{V_D} \frac{dV}{V} = P_C V_C \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)$$

Portanto,

$$W_{CD} = 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 3{,}0 \cdot 0{,}40 \ln\left(\frac{1{,}2}{0{,}4}\right) J \rightarrow W_{CD} = 1{,}33 \cdot 10^5\ J = 133\ kJ$$

Nesse caso, a resposta independe do que foi feito no item (a).

(c) (2,0) Determine as quantidades de calor nos processos BC e DA.

Resolução:

Como os processos são isobáricos, basta usar:

$$Q_{BC} = nC_P \Delta T_{BC} = nC_P(T_C - T_B)$$

$$Q_{DA} = nC_P(T_A - T_D)$$

Sabemos também que

$$PV = nRT \rightarrow nT = \frac{PV}{R}$$

Logo,

$$Q_{BC} = \frac{C_P}{R}(P_C V_C - P_B V_B) \qquad e \qquad Q_{DA} = \frac{C_P}{R}(P_A V_A - P_D V_D)$$

Usando a expressão de C_P achada no item (a):

$$Q_{BC} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}(P_C V_C - P_B V_B) \qquad e \qquad Q_{DA} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}(P_A V_A - P_D V_D)$$

Fazendo as contas:

$$P_C V_C - P_B V_B = 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 3{,}0\,(0{,}40 - 0{,}090) = 9{,}42 \cdot 10^4\,J$$

$$P_A V_A - P_D V_D = 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 1{,}0 \cdot (0{,}20 - 1{,}2) = -1{,}01 \cdot 10^5\,J$$

Usando $\gamma = 1{,}4$:

$$Q_{BC} = \frac{1{,}4}{0{,}4} \cdot 9{,}42 \cdot 10^4\,J \rightarrow Q_{BC} = 330 \cdot 10^3\,J = 330\,kJ$$

$$Q_{AD} = -\frac{1{,}4}{0{,}4} \cdot 1{,}01 \cdot 10^5\,J \rightarrow Q_{AD} = -353 \cdot 10^3\,J = -353\,kJ$$

Usando $\gamma = 1{,}376$:

$$Q_{BC} = \frac{1{,}376}{0{,}376} \cdot 9{,}42 \cdot 10^4\,J \rightarrow Q_{BC} = 345 \cdot 10^3\,J = 345\,kJ$$

$$Q_{AD} = -\frac{1{,}376}{0{,}376} \cdot 1{,}01 \cdot 10^5\,J \rightarrow Q_{AD} = -369 \cdot 10^3\,J = -369\,kJ$$

Mais uma vez, as respostas numéricas vão depender do valor de γ considerado no item (a).

(d) (3,0) Determine as variações de energia interna no processo AB e BC.
Resolução:
Como o processo AB é adiabático, temos que

$$\Delta U_{AB} = -W_{AB}$$

Usando a resposta do item (b):

$$\Delta U_{AB} = 17{,}7\ kJ \qquad ou \qquad \Delta U_{AB} = 18{,}8\ kJ$$

As respostas numéricas vão depender da aproximação feita na escolha de γ.

Já para a transformação BC:

$$\Delta U_{BC} = Q_{BC} - W_{BC}$$

Já sabemos que $Q_{BC} = 330\ kJ$ ou $Q_{BC} = 345\ kJ$ dependendo da escolha de γ feita no item (a). Como o processo é adiabático, o trabalho é fácil calculado:

$$W_{BC} = P_B(V_C - V_B) = 3{,}0 \cdot 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot (0{,}40 - 0{,}090)\ J = 94 \cdot 10^3\ J = 94\ kJ$$

Logo,

$$\Delta U_{BC} = 330 - 94 = 236\ kJ \qquad ou \qquad \Delta U_{BC} = 345 - 94 = 251\ kJ$$