

MAC 105 – Fundamentos de Matemática para Computação

1ª Lista de Exercícios 1.0 – 12/3/2015 – Entrega 26/3/2015

Nas questões abaixo, justifique suas respostas, não fique só num *sim* ou *não*. Se for uma demonstração, diga antes que tipo de método usou (vai direto, vem direto, mistura de vai e vem, mágica,..); uma demonstração detalhada, que mostre claramente os métodos usados, é, neste ponto do curso, mais importante que duas demonstrações mais ou menos.

1. Suponha que você quer provar que “ Se $y = m_1x + b_1$ e $y = m_2x + b_1$ são retas paralelas, então $m_1 = m_2$ ”. Quais dessas perguntas são úteis e quais não, para o método do vai-e-vem:

- (a) Como posso provar que $m_1 = m_2$?
- (b) Como posso provar que duas linhas são paralelas?
- (c) Como posso provar que dois números reais são iguais?

2. Considere o problema de provar “ Se

$$R = \{\text{números reais } x \mid x^2 - x \leq 0\}$$

$$S = \{\text{números reais } x \mid -(x-1)(x-3) \leq 0\}$$

$$T = \{\text{números reais } x \mid x \geq 1\}$$

então $R \cap S \subseteq T$ ”. Quais dessas perguntas são úteis e quais não, para o método do vai-e-vem:

- (a) Como mostro que um conjunto é subconjunto de outro?
 - (b) Como mostro que $R \cap S \subseteq T$?
 - (c) Como mostro que todo elemento de $R \cap S$ é maior ou igual a 1?
 - (d) Como mostro que a interseção de dois conjuntos tem um ponto em comum com outro conjunto?
 - (e) Que raios significa $R \cap S \subseteq T$?
3. (a) Seja k um inteiro positivo. Mostre que se a e b são congruentes módulo $3k$, então eles são congruentes módulo k .
 - (b) Suponha que duas relações de equivalência, denotadas por $\sim$ e $\equiv$, foram definidas num mesmo conjunto A . Suponha também que foi provado que, para quaisquer elementos a, b de A , se $a \sim b$ então $a \equiv b$. Mostre que o número de classes de equivalência de $\equiv$ não é maior que o de classes de $\sim$.

4. Suponha que você já provou que “ Se a e b são números reais não negativos, então $(a + b)/2 \geq \sqrt{ab}$ ”.
- (a) Mostre como usar esse fato acima para provar que se a e b são números reais tais que $b \geq 2|a|$, então $b \geq \sqrt{b^2 - 4a^2}$. Cuidado com a mistura de notação nas duas afirmativas.
- (b) Use a parte (a) para mostrar que se a e b são números reais com $a < 0$ e $b \geq 2|a|$, então uma das raízes da equação $ax^2 + bx + a = 0$ é $\leq -b/a$.