

MAC 105 – Fundamentos de Matemática para Computação

2ª Lista de Exercícios 1.0 – 26/3/2015 – Entrega 9/4/2015

Nas questões abaixo, justifique suas respostas, não fique só num *sim* ou *não*. Se for uma demonstração, diga antes que tipo de método usou (vai direto, vem direto, mistura de vai e vem, mágica,..); uma demonstração detalhada, que mostre claramente os métodos usados, é, neste ponto do curso, mais importante que duas demonstrações mais ou menos.

1. As questões abaixo se referem à prova a seguir da proposição “Se $m < n$ são inteiros positivos, então existe um número racional r tal que $\frac{1}{n} < r < \frac{1}{m}$.”

Prova: Seja q um inteiro tal que $q(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}) > 1$. Seja ainda q um inteiro tal que $\frac{q}{n} < p < \frac{q}{m}$. Definindo $r = \frac{p}{q}$, vem que $\frac{1}{n} < r < \frac{1}{m}$, completando a prova.

- (a) Para que definir p e q no início da prova?
 - (b) Existe mesmo um inteiro tal que $q(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}) > 1$, como o autor afirma na primeira frase? Por que? Dá para afirmar algo sobre o sinal de q ?
 - (c) Existe um inteiro q tal que $\frac{q}{n} < p < \frac{q}{m}$. como o autor afirma? Por que?
 - (d) De onde vem que $\frac{1}{n} < r < \frac{1}{m}$?
 - (e) Ao escrever $\frac{p}{q}$ é bom garantir que $q \neq 0$. De onde vem isso?
2. Explique o que está errado na seguinte demonstração da afirmativa “Se a, b, c são números reais tal que o polinômio ax^2+bx+c tem uma raiz racional, então cx^2+bx+a também tem uma raiz racional.”

Prova: Sejam p, q inteiros, $q \neq 0$, tais que p/q é raiz do primeiro polinômio. Como $a(p/q)^2 + b(p/q) + c = 0$, multiplicando por q^2 e dividindo por p^2 vem que $c(p/q)^2 + b(p/q) + a = 0$, o que mostra que $x = q/p$ é raiz do segundo polinômio.

3. A primeira parte serve para ilustrar a segunda:

- (a) No conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$, considere a relação: $m \sim n$ se m divide n e n divide m . Mostre que ela é de equivalência e descreva as classes.
- (b) Suponha dado um conjunto A uma relação $\prec$ em A que é reflexiva e transitiva. Defina agora em A a relação $\sim$ por $x \sim y$ se $x \prec y$ e $y \prec x$.
 - i. Mostre que $\sim$ é de equivalência.
 - ii. Mostre que se $x, y \in A$, e $x \prec y$, então, para todo $u \in [x]$ e todo $v \in [y]$, $u \prec v$.

4. (a) Na seguinte definição, identifique, no “para todo”, o(s) objeto(s), propriedades, e “o que acontece”: um conjunto C de números reais é *convexo* se para todos $x, y \in C$ e todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq t \leq 1$, vale que $tx + (1 - t)y \in C$.
- (b) Prove que, se a e b são números reais, então, o conjunto $C = \{x \in \mathbb{R} \mid ax \leq b\}$ é convexo. Apresente primeiro de forma esquemática as idéias e perguntas, depois exiba uma prova redigida como texto.