

MAC 105 – Fundamentos de Matemática para Computação

4ª Lista de Exercícios 1.0 – 27/5/2015 – Entrega 8/6/2015

Nas questões abaixo, justifique suas respostas, não fique só num *sim* ou *não*. Se for uma demonstração, diga antes que tipo de método usou (vai direto, vem direto, mistura de vai e vem, mágica,..). Lembre-se: uma demonstração é um texto corrido, legível.

1. Considere a seguinte mágica (apresentada junto com um exemplo):

- (a) Escolha (escondido) um número de três dígitos distintos (356).
- (b) Reverta a ordem dos dígitos (653).
- (c) Subtraia o menor do maior ($653 - 356 = 297$)
- (d) Reverta o resultado e some com ele ($297 + 729 = \dots$)
- (e) O mágico adivinha: (1089);

(se gostou, aplique o truque)

Prove que o resultado final é sempre o mesmo.

Bônus: prove que numa base B arbitrária, o resultado é sempre representado como $[1, 0, B - 2, B - 1]$ (1089 é isso quando $B = 10$).

2. Demonstre a seguinte desigualdade: *Sejam* a_1, a_2, \dots, a_n e b_1, b_2, \dots, b_n números reais, positivos, tais que $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i = 1$. Então,

$$\sum_{i=1}^n a_i \ln a_i \geq \sum_{i=1}^n a_i \ln b_i,$$

com igualdade só se $a_i = b_i$ para todo i .

Roteiro:

- (a) O caso $n = 1$ é trivial. Considere o caso $n = 2$. Mude os nomes, fazendo $p = a_1$, $x = b_1$; então, $a_2 = 1 - p$, $b_2 = 1 - x$. Considere o lado direito da desigualdade como função de x e use Cálculo.
- (b) Mostre o caso geral por indução.

3. Considere a sequência $(x_n)_{n \geq 0}$ que satisfaz

$$x_0 = 4, x_1 = 1, x_2 = 15, \quad x_n = 3x_{n-1} - 4x_{n-3} \quad (\text{para } n \geq 3).$$

Mostre que existem reais a, b, c tais que

$$x_n = 2^n(an + b) + c(-1)^n.$$

e encontre seus valores.