bem definida $\Rightarrow$ $\Updownarrow$

$a_1=a_2 \Leftrightarrow f(a_1)=f(a_2)$.

$n^3-2n-4=0 \Rightarrow (n-2)(n^2+2n+2)$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 2 & 1 & 0 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

$\Delta: 4-4.2=-4.$

$(n^3+\cancel{2n^2}+2n-\cancel{2n^2}-4n-4)$

MAC 105 – Fundamentos de Matemática para Computação

Prova 1 — 23/4/2015

Instruções:

- Identifique sua prova na primeira página, com nome e número USP
- Numere as páginas, principalmente se usar mais de uma folha
- A prova pode ser feita a lápis
- As questões podem estar em qualquer ordem

Onde escrever uma demonstração, pode precedê-la por uma argumentação esquemática, como visto em aula, com as idéias e métodos usados. Mas separe de forma clara essa parte da demonstração.

1. (2 pontos) Vamos definir em $\mathbb{R}$ a relação $\sim$ por $x \sim y$ se $\frac{x-y}{2\pi}$ é um inteiro. Em $\mathbb{R}/\sim$ vamos definir a função F por $F([x]) = \operatorname{sen} x + \cos 3x$. Mostre que F está bem definida.

2. (2 pontos) Prove, **por contradição**, que, se n é um inteiro positivo tal que $n^3-2n-4=0$, então, para todo inteiro positivo $m \neq n$, $m^3-2m-4 \neq 0$.

3. (2 pontos) Suponha que é para provar:
   Se $S = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 16\}$ *e* $T = \{(x,y) \mid 3x^2+2y^2 \leq 125\}$, *então* $S \subseteq T$.
   (a) Reescreva o que deve ser provado na forma *Para todo* $(x,y)\ldots$
   (b) Cada alternativa abaixo apresenta o início de uma demonstração, e um plano de *vem*. Em cada caso, indique se é ou não válido, e se não for, explique porquê.
      i. Sejam x', y' números reais. Preciso provar que $(x',y') \in T$.
      ii. Sejam x', y' números reais, com $(x',y') \in S$. Preciso provar que $(x',y') \in T$.
      iii. Sejam x', y' números reais, com $(x',y') \in T$. Preciso provar que $(x',y') \in S$.
      iv. Sejam x, y números reais, digamos, 1 e 2, tais que $x^2+y^2 = 5 \leq 16$. Preciso provar que $(x,y) \in T$.

4. (4 pontos) Para funções definidas nos números naturais, com valores reais, vamos definir a seguinte relação

$$f \preceq g \text{ sse existem } n_0, A \in \mathbb{N} \text{ tais que para todo } n \geq n_0,\ f(n) \leq Ag(n).$$

   (a) Mostre que $10n^2+1 \preceq n^3$.
   (b) Mostre que $\preceq$ é reflexiva e transitiva.
   (c) Escreva a negação da afirmativa $f \preceq g$ de uma forma que não apareça nenhuma negação.
   (d) Prove que não é verdade que $n^3 \preceq 10n^2+1$.

$\frac{10}{n}+\frac{1}{n^3}$