MAC 105 – Fundamentos de Matemática para Computação

Prova 2 — 31/5/2017

Instruções:

- Identifique sua prova na primeira página, com nome e número USP
- Numere as páginas, principalmente se usar mais de uma folha
- A prova pode ser feita a lápis
- As questões podem estar em qualquer ordem

1. (2 pontos) Prove, **por contradição**, que, se n é um inteiro positivo tal que $n^3 - 2n - 4 = 0$, então, para todo inteiro positivo $m \neq n$, $m^3 - 2m - 4 \neq 0$.

2. (3 pontos) Suponha que m, n são inteiros, e $m \neq 0$.

   (a) Use o método do **contrapositivo** para provar que: *Se m não divide n, então $mx^2 + nx + n - m$ não tem raíz que seja um inteiro positivo.*

   (b) Prove, usando qualquer método: *Se m e n têm o mesmo sinal, então $mx^2 + nx + n - m$ não tem raíz que seja um inteiro positivo.*

3. (5 pontos) Seja $\mathbb{H}$ o conjunto dos inteiros maiores que 1. Em $\mathbb{H}$, dizemos que n *divide potencialmente* m, e denotamos $n \uparrow m$ se existe um inteiro $k > 0$ tal que $n | m^k$. Observe que, se p, q são **números primos distintos**, então **não é verdade** que $p \uparrow q$ (mesmo que isto não esteja claro para você, pode usar este fato).

   (a) Prove que $\uparrow$ é uma relação reflexiva e transitiva.

   Para o que segue, $\sim$ é a relação de equivalência associada, isto é: $n \sim m$ sse $n \uparrow m$ e $m \uparrow n$.

   (b) Mostre que se n, m são potências de um mesmo inteiro t, então $n \sim m$.

   (c) Seja $Q = \mathbb{H}/\sim$. Abaixo são definidas funções e operações sobre Q. Em cada caso, afirme se está bem definida ou não, e prove sua afirmação.

      i. $f : Q \to \mathbb{Z}_3$, dada por $f([n]) = n \,\%\, 3$.

      ii. $s([n], [m]) = [n + m]$ (permitiria definir:$[n] + [m] = [n + m]$).

      iii. $p([n], [m]) = [nm]$ (permitiria definir:$[n][m] = [nm]$).

$m \cdot p = n$

$p = \frac{n}{m}$