MAC 210 - Laboratório de Métodos Numéricos

Primeira prova - 3 de maio de 2022

Nome do aluno:

Assinatura:

Instruções:

1. A prova pode ser feita a lápis.
2. A prova consta de 3 questões. Verifique antes de começar a prova se o seu caderno de questões está completo.

Duração da prova: 2 horas

Questão	Nota
1	1
2	3.5
3	1
Total	5.5

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_{k+1})} \qquad f(x_k) = \frac{-(x_k - x_{k+1}) f'(x)}{1} \qquad f(x$$

QUESTÃO 1 (3.5 pontos):

Dada $f : I\!R \to I\!R$, o método de Newton para achar x^* tal que $f(x^*) = 0$ pode ser deduzido considerando a expansão de Taylor (com dois termos mais o termo do erro) ao redor de uma aproximação x_k de x^*. De forma similar, derive um método de terceira ordem que, para calcular x_{k+1}, utilize avaliações de $f(x_k)$, $f'(x_k)$ e $f''(x_k)$.

Dicas: (a) Use uma expansão de Taylor com três termos mais o termo do erro; (b) Observe que na derivação do método aparece uma equação de grau dois e, portanto, dois métodos diferentes podem ser definidos.

Observações: (i) Indique claramente com frases curtas e simples o que você está fazendo. (ii) Faça todas as suposições que achar necessárias e justifique-as.

Sendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função da qual queremos encontrar a raiz x^*, então podemos aproximar o valor de $f(x_k)$ utilizando a expansão de taylor desse ponto ao redor de x^*, x_k

$$f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + f''(x_k)\frac{(x^*-x_k)^2}{2} + \underbrace{f'''(\xi)\frac{(x^*-x_k)^3}{6}}_{\text{erro com } \xi \in (x_k, x^*)}$$

que é levemente diferente da expansão feita no método de Newton, também de x_k ao redor de x^*

NEWTON $$f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \underbrace{f''(\xi)\frac{(x^*-x_k)^2}{2}}_{\text{erro com } \xi \in (x_k, x^*)}$$

Em Newton é feita a tal manipulação: sabemos que $f(x^*) = 0$, pois x^* é a raiz de f que buscamos, logo podemos usar isso para isolar x^* e acharmos seu valor.

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \epsilon \Rightarrow -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x^* - x_k + \epsilon \Rightarrow x^* = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + \epsilon$$

, mas, como desconhecemos o erro, o valor achado não é exatamente x^*, mas sim a próxima aproximação de x^* dessa iteração, o x_{k+1}.

Faremos a mesma manipulação para o novo método:

$$f(x^*) = 0 = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + f''(x_k)\frac{(x^*-x_k)^2}{2} + \epsilon$$

$$\frac{-f(x_k)}{f'(x_k) + \frac{f''(x_k)}{2}(x^* - x_k)} + x_k = \underbrace{x^* + \epsilon}_{x_{k+1}}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) + \frac{f''(x_k)}{2}(x^* - x_k)}$$

não temos x^* teremos que ajustar para encontrar x_{k+1}

E ENTÃO?

$f(k) - f'(k)x_k + f'(k)* + f'(k)k^2 - 2f'(k)*k + f'(k)k^2$

$f(k) - f'(k)k + f'(k)k^2 + f'(k)* + f'(k)*^2 - 2f'(k)*k$

$f(k) - f'(k)k(1+k) + f'(k)*(1 + * - 2k)$

$-f(k) + f(k)k(1+k)$

Rascunho

$$-f(k) = \left[f'(x) + f''(x_k)(x^* - x_k)\right](x^* - x_k) + \epsilon$$

$$\frac{-f(k)}{f'(x) + \frac{f''(x_k)}{2}(x^* - x_k)} + x_k = x^*$$

$$\left[\frac{f'(x)}{(x^* - x_k)} + f''(x_k)\right](x^* - x_k)^2$$

$$\frac{-f(k)}{f'(x_k)} \quad - \quad \frac{f(k)}{*-k} + f'(k) + \frac{f'(k)}{2}(x^* - k)$$

$$\frac{-f'(k) - \frac{f(k)}{(*-k)}}{\frac{f''(k)}{2}}$$

$g'(x) = 2x \le p < 1$ $\quad x = \frac{3}{4} \to \frac{3}{2} > 1$ $\quad$ converge p/ $\frac{1}{4}$ $\quad \frac{9}{16} + \frac{3}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

$x = \frac{1}{4} \to \frac{1}{2} < 1$ ✓ $\quad \frac{1}{16} + \frac{3}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ ✓

QUESTÃO 2 (3.5 pontos):

Considere a função $g(x) = x^2 + \frac{3}{16}$.

(a) Esta função tem dois pontos fixos. Quais são?

(b) Considere a iteração de ponto fixo $x_{k+1} = g(x_k)$ para a função g do item (a). Para qual ou quais dos pontos que encontrou em (a) pode afirmar que o método vai convergir para esse ponto? Você pode assumir que o ponto inicial estará suficientemente perto do ponto fixo.

(c) Para o ponto ou pontos encontrados em (b), aproximadamente quantas iterações $\to k$ seriam necessárias para reduzir a distância da aproximação atual à solução num fator de 10. $= 0{,}1$?

(d) Para o ponto ou pontos encontrados em (b), a distância da aproximação atual à solução é reduzida mais rapidamente pelo método de ponto fixo ou pelo método de bissecção?

Observações: (i) Indique claramente com frases curtas e simples o que você está fazendo. (ii) Faça todas as suposições que achar necessárias e justifique-as.

$\boxed{A}$ Pontos fixos de $g(x)$ são tais que $g(x) = x$, então buscamos $x = x^2 + 3/16 \Rightarrow 0 = x^2 - x + \frac{3}{16}$, resolvendo a equação quadrada temos: $\Delta = 1 - 4 \cdot 3/16 \cdot 1 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1/4}}{2} = \frac{1 \pm 1/2}{2}$$

$\nearrow$ ponto fixo $x_1 = \frac{1 + 1/2}{2} = \frac{3/2}{2} = \frac{3}{4}$

$\searrow$ ponto fixo $x_2 = \frac{1 - 1/2}{2} = \frac{1/2}{2} = \frac{1}{4}$

$\boxed{B}$ A convergência do método do ponto fixo é tal que $|x_{k+1} - x^*| = |g(x_k) - g(x^*)| \overset{*}{=} |g'(\delta)|x_k - x^*| \le p|x_k - x^*|$, utilizando x^* a raiz que queremos encontrar pelo método e, na passagem $*$, tomamos que $g(x_k) = g(x^*) + g'(\delta)|(x_k - x^*)|$ pela expansão de Taylor no ponto x_k ao redor de x^* com um $\delta \in (x_k, x^*)$, reescrito de forma $g(x_k) - g(x^*) = g'(\delta)|(x_k - x^*)|$.

O p que aparece é um valor constante que, pelo Teorema do ponto fixo, deve ser estritamente menor que 1 para que a convergência para a raiz ocorra, considerando um ponto inicial suficientemente perto de x^* (raiz de f e ponto fixo de g pelo método). Para isso, $g'(\delta)|x_k - x^*| \le p|x_k - x^*| \Rightarrow g'(\delta) \le p < 1$, com $\delta \in (x_k, x^*)$.

Levando em consideração os pontos fixos que achamos, $x_1 = 3/4$ e $x_2 = 1/4$, podemos garantir apenas que a derivada de g próxima a esses pontos vai ser $\le p$ em x_2:

$g'(3/4 = x_1) = 2(3/4) = 3/2 > 1$, não garante convergência pelo teorema

$g'(1/4 = x_2) = 2(1/4) = 1/2 < 1$, garante convergência pelo teorema. $\Rightarrow g'(\delta) \le p < 1$ com $\delta \in (x_k, 1/4)$ que pode ser garantido com a continuidade de f, g e g' (requisitos do método), pois o valor de g' nas proximidades do ponto fixo x_2 não mudarão radicalmente e manterão o padrão de $g'(x) \le p < 1$.

Assim, o método converge apenas para $x_2 = 1/4$.

$\boxed{C}$ A convergência do método funciona de forma que, com x_0 sendo a aproximação atual e x_k sendo a aproximação em que a distância de x_0 a x^* for diminuída num fator de 10.

$|x_k - x^*| \le p|x_{k-1} - x^*| \le p^2|x_{k-2} - x^*| \le \dots \le p^k|x_0 - x^*|$, com $p < 1$

$|x_k - x^*| \le p^k |x_0 - x^*|$ $\quad \Rightarrow p^k = 0{,}1 \Rightarrow k \log_{10} p = \log_{10} 10^{-1} \Rightarrow k \log_{10} p = -1 \Rightarrow k = \frac{-1}{\log_{10} p}$

aproximação até diminuir a distância

diminuição da distância

atual

mas como x^* da convergência é $\frac{1}{4}$ e $g'(1/4) = 1/2$, utilizamos esse valor como p, então

$$\boxed{k = \frac{-1}{\log_{10} \frac{1}{2}}} =$$

D) No método da bissecção, sabemos que a distância entre o ponto inicial x_0 e a solução x^* é, no máximo, $\frac{b-a}{2}$, sendo $f(b)\cdot f(a) < 0$ (função troca de sinal e, pelo Teorema do valor intermediário, garante existência de uma raiz $x^* \in [a,b]$). Passadas mais k iterações, temos que $|x_k - x^*| \leq \frac{b-a}{2} \cdot 2^{-k}$, pois o método consiste em atualizar o intervalo inicial $[a,b]$ ao mudar suas diferentes extremidades para o valor de seu ponto <u>médio</u> $\frac{a+b}{2}$ (pode substituir a ou b, dependendo da avaliação de f nesse ponto). Assim, vamos "cortando" a distância máxima pela metade, resultando em convergência.

$\Rightarrow |x_k - x^*| \leq \frac{b-a}{2} \cdot \boxed{2^{-k}} = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{b-a}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$

No método do ponto fixo já vimos que $|x_k - x^*| \leq |x_0 - x^*| \boxed{p^k}$. Adicionalmente, utilizamos também na alternativa B que $p = g'(x_2)$, com x_2 = ponto fixo de g e raiz de $f = 1/4 \Rightarrow p = 1/2$

Assim, tanto no método da Bissecção quanto no método do Ponto Fixo temos convergência de taxa $1/2$ e, ao final de k iterações dos métodos, a distância entre a atual aproximação x_k de x^* vale $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ do que valia a distância do ponto inicial x_0 de x^*. A distância é reduzida de forma aproximadamente igual nos dois métodos devido ao valor de $p = 1/2$

$0 \to n-1 \quad \bar{p}$ ambos de grau $n-1$ } ambos tem tem $1 \to n-1$ em comum

$1 \to n \quad \hat{p}$

QUESTÃO 3 (3.0 pontos):

Sejam $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ dados. Seja $\bar{p}_{n-1}(x)$ o polinômio de grau menor ou igual a $n-1$ que interpola $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ e seja $\hat{p}_{n-1}(x)$ o polinômio de grau menor ou igual a $n-1$ que interpola $(x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$. Construa, usando $\bar{p}_{n-1}(x)$ e $\hat{p}_{n-1}(x)$, um polinômio $p_n(x)$ de grau menor ou igual a n que interpole os $n+1$ pontos dados.

Observações: (i) Indique claramente com frases curtas e simples o que você está fazendo. (ii) Faça todas as suposições que achar necessárias e justifique-as.

Sabemos que ambos os polinômios $\hat{p}$ e $\bar{p}$ têm os pontos $(x_1, f(x_1)), \ldots, (x_{n-1}, f(x_{n-1}))$, logo, pela base de Lagrange, podemos escrevê-los de tal forma:

$$\bar{p}(x) = \sum_{i=1}^{n-1}\left[f(x_i)\left(\prod_{j\neq i}^{n-1}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\right)\frac{(x-x_0)}{(x_i-x_0)}\right] + f(x_0)\left(\prod_{j=1}^{n-1}\frac{(x-x_j)}{(x_0-x_j)}\right)$$

multiplicando por $(x-x_n)$ faltaria $\frac{1}{(x_i-x_n)}$ em cada elemento do somatório

OBS

$$\hat{p}(x) = \sum_{i=1}^{n-1}\left[f(x_i)\left(\prod_{j\neq 1}^{n-1}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\right)\frac{(x-x_n)}{(x_i-x_n)}\right] + f(x_n)\left(\prod_{j=1}^{n-1}\frac{(x-x_j)}{(x_n-x_j)}\right)$$

multiplicando por $(x-x_0)$ faltaria $\frac{1}{x_i-x_0}$ em cada elemento do somatório

Mas p completo, cos pontos $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ deve ser, também pela base de Lagrange:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n-1}\left[f(x_i)\left(\prod_{j\neq i}^{n-1}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\right)\frac{(x-x_0)}{(x_i-x_0)}\frac{(x-x_n)}{(x_i-x_n)}\right] + f(x_0)\left(\prod_{j=1}^{n-1}\frac{(x-x_j)}{(x_0-x_j)}\right)\frac{(x-x_n)}{(x_0-x_n)} + f(x_n)\left(\prod_{j=1}^{n-1}\frac{(x-x_j)}{(x_n-x_j)}\right)\frac{(x-x_0)}{(x_n-x_0)}$$

$$\boxed{p(x) = \bar{p}(x)\cdot(x-x_n) + \hat{p}(x)\cdot(x-x_0)}$$

Incompleto, ainda teria que ajustar o que está em OBS

rascunho

$$\left(\prod_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{n-1}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\right)\cdot\frac{(x-x_0)}{(x_i-x_0)} \qquad \bar{p}\left[\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\left(\prod_{j\neq i}^{n-1}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\right)\boxed{\frac{(x-x_0)}{(x_i-x_0)}}\right] + f(x_0)\prod_{j=1}^{n-1}\frac{(x-x_j)}{(x_0-x_j)}$$

Lagrange

$$\bar{p} = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\prod_{\substack{j\neq i\\ j=0}}^{n-1}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

$$\hat{p} = \left[\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\left(\prod_{j\neq i}^{n-1}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\right)\cdot\boxed{\frac{(x-x_n)}{(x_i-x_n)}}\right] + f(x_n)\prod_{j=1}^{n-1}\frac{(x-x_j)}{(x_n-x_j)}$$

$$\hat{p} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\prod_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \to \left(\prod_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{n-1}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\right)\cdot\frac{(x-x_n)}{(x_i-x_n)}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\left(\prod_{j\neq i}^{n-1}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\right)\frac{(x-x_n)}{(x_i-x_n)}\frac{(x-x_0)}{(x_i-x_0)}$$

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\prod_{\substack{j\neq i\\ j=0}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \to \left(\prod_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{n-1}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\right)\cdot\frac{(x-x_n)}{(x_i-x_n)}\cdot\frac{(x-x_0)}{(x_i-x_0)} + f(x_0)\left(\prod_{j=1}^{n-1}\frac{(x-x_j)}{(x_0-x_j)}\right)\frac{(x-x_n)}{(x_0-x_n)} + f(x_n)\prod_{j=1}^{n-1}\frac{(x-x_j)}{(x_n-x_j)}\frac{(x-x_0)}{(x_n-x_0)}$$