MAC 210 - Laboratório de Métodos Numéricos

Segunda prova - 23 de junho de 2022

Nome do aluno:

Assinatura:

Instruções:

1. A prova pode ser feita a lápis.
2. A prova consta de 3 questões. Verifique antes de começar a prova se o seu caderno de questões está completo.

Duração da prova: 2 horas

Questão	Nota
1	3
2	3.5
3	3.25
Total	9.75

não temos outros valores de f

QUESTÃO 1 (3.0 pontos):

Dados pontos $x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n$, para índices arbitrários $0 \leq i < j \leq n$, definimos

forma q. curta — diferenças repetidas

$$f[x_i] = f(x_i),$$

$$f[x_i, \ldots, x_j] = \begin{cases} \dfrac{f[x_{i+1}, \ldots, x_j] - f[x_i, \ldots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}, & \text{se } x_i \neq x_j, \\ \dfrac{f^{(j-i)}(x_i)}{(j-i)!}, & \text{se } x_i = x_j. \end{cases}$$

Uma fórmula secreta $f(x)$ para a juventude eterna foi descoberta pelo Dr. Quick. Porém, o Dr. Quick desapareceu misteriosamente do laboratório de biotecnologia no qual trabalhava e corre o rumor de que esteja negociando com uma organização rival.

Das notas que o Dr. Quick deixou para trás no seu sumiço é claro que $f(0) = 0$, $f(1) = 2$ e $f[x_0, x_1, x_2] = 1$ para qualquer tripla de pontos x_0, x_1, x_2. Encontre $f(x)$. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Observações: (a) Indique claramente com frases curtas e simples o que você está fazendo. (b) Faça todas as suposições que achar necessárias e justifique-as.

$$\boxed{f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} - \dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}}{x_2-x_0} = 1 \quad \text{se } x_0 \neq x_1 \neq x_2 \text{ pela definição}}$$

$f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{f^{(2-0)}(x_0)}{(2-0)!} = 1$ se $x_0 = x_2$ ou $x_0 = x_2 = x_1$

$f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{\dfrac{f^{(2-1)}(x_1)}{(2-1)!} - \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0} = 1$ se $x_2 = x_1$ $\qquad \dfrac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \dfrac{f^{(1-0)}(x_0)}{(1-0)!}}{x_2-x_0} = 1$ se $x_1 = x_0$

$(x_1 = x_0 = 1)$ $\dfrac{\dfrac{f(x_2)-f(1)}{x_2-1} - f'(1)}{x_2-1} = 1$ $\qquad (x_1 = x_0 = 0)$ $\dfrac{\dfrac{f(x_2)-f(0)}{x_2} - f'(0)}{x_2} = 1$

$(x_2 = x_1 = 1)$ $\dfrac{f''(1) - \dfrac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}}{1-x_0} = 1$ $\qquad (x_2 = x_1 = 0)$ $\dfrac{f''(0) - \dfrac{f(0)-f(x_0)}{-x_0}}{-x_0} = 1$

para qualquer tripla x_0, x_1, x_2, fixamos $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, x_2 varia, só não é o nem 1

$$\boxed{\star \ (x_1 = 1 \text{ e } x_0 = 0) \ \frac{\dfrac{f(x_2)-f(1)}{x_2-1} - \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}}{x_2-0} = \frac{\dfrac{f(x)-2}{x-1} - \left(\dfrac{2-0}{1}\right)}{x} = 1 \Rightarrow \frac{f(x)-2}{x-1} - 2 = x \Rightarrow f(x) = (x+2)(x-1)+2 \quad f(x) = x^2 - x + 2x - 2 + 2 \quad \boxed{f(x) = x^2 + x}}$$

$(x_1 = 0 \text{ e } x_0 = 1)$ $\dfrac{\dfrac{f(x_2)-f(0)}{x_2-0} - \dfrac{f(0)-f(1)}{0-1}}{x_2-1} = \dfrac{\dfrac{f(x)-0}{x} - \left(\dfrac{0-2}{-1}\right)}{x-1} = 1 \Rightarrow f(x) = \big((x-1)+2\big)x = (x+1)x = x^2+x$ ✓

(conferindo $f(x)$ se mudarmos valores fixados)

✓

↗ expandir 1 a mais pois cancela

QUESTÃO 2 (2.0 + 1.5 pontos):

(a) Seja $f : I\!R \to I\!R$. Derive uma aproximação para a $\boxed{\text{derivada quarta de } f \text{ avaliada em } x_0}$ usando as expansões de Taylor em $x_0 \pm h$ e $x_0 \pm 2h$.

$2 \cdot \frac{16}{24} \overset{2}{=} \frac{4}{3}$

(b) Exiba uma expressão para o erro. De que ordem é o erro?

constante que multiplica

Observações: (a) Indique claramente com frases curtas e simples o que você está fazendo. (b) Faça todas as suposições que achar necessárias e justifique-as.

$\boxed{A}$ $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} + f'''(x_0)\frac{h^3}{6} + f^{IV}(x_0)\frac{h^4}{24} + f^{V}(x_0)\frac{h^5}{120} + f^{VI}(\xi)\frac{h^6}{720}$ com ξ entre x_0 e x_0+h

$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} - f'''(x_0)\frac{h^3}{6} + f^{IV}(x_0)\frac{h^4}{24} - f^{V}(x_0)\frac{h^5}{120} + f^{VI}(\bar{\xi})\frac{h^6}{720}$ com $\bar{\xi}$ entre x_0 e x_0-h

(1) $f(x_0+h)+f(x_0-h) = 2f(x_0) + \cancel{2}f''(x_0)\frac{h^2}{\cancel{2}} + \cancel{2}f^{IV}(x_0)\frac{h^4}{\cancel{24}\,12} + \frac{h^6}{360}\left[\left(f^{VI}(\xi) + f^{VI}(\bar{\xi})\right)\frac{1}{2}\right]$

* pelo Teorema do Valor Intermediário, temos que existe $\hat{\xi}$ tal que $f^{VI}(\hat{\xi}) = \frac{1}{2}\left(f^{VI}(\xi) + f^{VI}(\bar{\xi})\right)$ e $\hat{\xi}$ entre x_0-h e x_0+h. utilizaremos $f^{VI}(\hat{\xi})$ para "unificar" a expressão do erro em (1)

(1) $f(x_0+h)+f(x_0-h) = 2f(x_0) + h^2 f''(x_0) + \frac{h^4}{12} f^{IV}(x_0) + \frac{h^6}{360} f^{VI}(\hat{\xi})$

$f(x_0+2h) = f(x_0) + f'(x_0)\,2h + f''(x_0)\frac{4h^2}{2} + f'''(x_0)\frac{8h^3}{6} + f^{IV}(x_0)\frac{16h^4}{24} + f^{V}(x_0)\frac{32h^5}{120} + f^{VI}(\delta)\frac{64h^6}{720}$ com δ entre x_0 e x_0+2h

$f(x_0-2h) = f(x_0) - f'(x_0)\,2h + f''(x_0)\frac{4h^2}{2} - f'''(x_0)\frac{8h^3}{6} + f^{IV}(x_0)\frac{16h^4}{24} - f^{V}(x_0)\frac{32h^5}{120} + f^{VI}(\bar{\delta})\frac{64h^6}{720}$ com $\bar{\delta}$ entre x_0 e x_0-2h

(2) $f(x_0+2h)+f(x_0-2h) = 2f(x_0) + f''(x_0)\,4h^2 + f^{IV}(x_0)\frac{4h^4}{3} + \frac{8h^6}{45}\left[\left(f^{VI}(\delta) + f^{VI}(\bar{\delta})\right)\frac{1}{2}\right]$

* novamente pelo Teorema do Valor Intermediário vamos substituir $\left(f^{VI}(\delta)+f^{VI}(\bar{\delta})\right)\frac{1}{2}$ por $f^{VI}(\hat{\delta})$ tal que $\hat{\delta}$ está entre x_0+2h e x_0-2h em (2)

(2) $f(x_0+2h)+f(x_0-2h) = 2f(x_0) + 4h^2 f''(x_0) + \frac{4h^4}{3} f^{IV}(x_0) + \frac{8h^6}{45} f^{VI}(\hat{\delta})$

Queremos uma aproximação de $f^{IV}(x_0)$, então devemos eliminar as aparições de $f''(x_0)$ para achar nossa fórmula:

$(1) - \frac{1}{4}(2) = f(x_0+h) + f(x_0-h) - \frac{1}{4}\left(f(x_0+2h)+f(x_0-2h)\right)$

$= (2-\frac{1}{2})f(x_0) + \cancel{(1-1)h^2 f''(x_0)} + (\frac{1}{12} - \frac{1}{3})h^4 f^{IV}(x_0) + \overbrace{\left[\frac{h^6}{360}f^{VI}(\hat{\xi}) - \underbrace{\frac{8h^6}{4\cdot 45}}_{\frac{8}{180}} f^{VI}(\hat{\delta})\right]}^{E}$ → fará parte do erro no item $\boxed{B}$.

$= \frac{3}{2}f(x_0) - \frac{1}{4}h^4 f^{IV}(x_0) + E$

* Expandiremos Taylor em $\hat{\xi}$ e $\hat{\delta}$ ao redor do x_0 para unificar o erro (fazer aparecer apenas uma sexta derivada em termo intermediário)

$f^{VI}(\hat{\xi}) = f^{VI}(x_0) + f^{VII}(\beta)\cdot(\hat{\xi}-x_0)$, mas, como $\hat{\xi}$ está entre x_0+h e x_0-h, então a diferença $\hat{\xi}-x_0$ é de ordem $O(h)$.

Além disso, vamos usar (supor) que as derivadas são contínuas (assim como fizemos ao usar o Teorema do Valor Intermediário) e limitadas. Resumimos a expansão de $f^{VI}(\hat{\xi})$ em $f^{VI}(x_0) + O(h)$.

$f^{VI}(\hat{\delta}) = f^{VI}(x_0) + f^{VII}(\bar{\beta})\cdot(\hat{\delta}-x_0)$, mas, como $\hat{\delta}$ está entre x_0+2h e x_0-2h, então a diferença $\hat{\delta}-x_0$ é de ordem $O(h)$ também.

Supomos por mais uma vez as derivadas contínuas e resumimos a expansão de $f^{VI}(\hat{\delta})$ em $f^{VI}(x_0) + O(h)$

$E = \frac{h^6}{180}\left(\frac{f^{VI}(\hat{\xi})}{2} - 8f^{VI}(\hat{\delta})\right) = \frac{h^6}{180}\left(\frac{f^{VI}(x_0) + O(h)}{2} - 8f^{VI}(x_0) - O(h)\right) = \frac{h^6}{180}\left(-\frac{15}{2}\right) f^{VI}(x_0) + O(h^7)$

$$f(x_0+h)+f(x_0-h)-\frac{\left(f(x_0+2h)+f(x_0-2h)\right)}{4}=\frac{3}{2}f(x_0)-\frac{1}{4}h^4 f^{IV}(x_0)+E$$

Com essa expressão deduzimos que a fórmula da aproximação de $f^{IV}(x_0)$ é:

$$\left[\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-\frac{1}{4}\left(f(x_0+2h)+f(x_0-2h)\right)-\frac{3}{2}f(x_0)}{h^4}\right]\cdot -4=f^{IV}(x_0)+\frac{E}{\left(-\frac{1}{4}h^4\right)}$$

$$\boxed{\frac{\left(f(x_0+2h)+f(x_0-2h)\right)+6f(x_0)-4\left(f(x_0+h)+f(x_0-h)\right)}{h^4}}$$

é aproximação de $f^{IV}(x_0)$ utilizando as expansões de Taylor em $x_0 \pm h$ e $x_0 \pm 2h$

$\boxed{B}$ A expressão para o erro já foi construída e reduzia ao longo do Item $\boxed{A}$. Para isso, supomos que as hipóteses do Teorema da função intermediária eram válidas, em especial da função ter derivadas contínuas até onde precisarmos (pelo menos C^7) e também que suas derivadas eram limitadas na última manipulação com expansões de Taylor.

Chegamos então em um erro estimado de $\dfrac{-\frac{15}{360}h^6 f^{VI}(x_0)+O(h^7)}{-\frac{1}{4}h^4}=+\frac{15}{90}h^2 f^{VI}(x_0)+O(h^3)$

A expressão para o erro é $O(h^3)+\frac{15}{90}h^2 f^{VI}(x_0)$ e ele é de ordem$\left(O(h^2)\right)$.

$(b^2 - 2ba \quad b + a^2)\ (b-a)$

$b^3 - 2b^2a + ba^2 - b^2a + 2ba^2 - a^3 = b^3 - a^3 - 3b^2a + 3ba^2$

QUESTÃO 3 (1.5 + 2.0 pontos):

(a) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Derive a regra do ponto médio para aproximar $\int_a^b f(x)dx$.

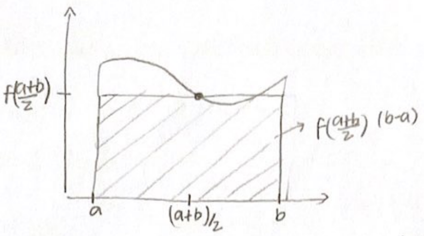
(b) Mostre que o erro é dado por $E(f) = \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3$ para algum $\xi \in [a,b]$.

Observações: (a) Indique claramente com frases curtas e simples o que você está fazendo.
(b) Faça todas as suposições que achar necessárias e justifique-as.

A) Na regra do ponto médio, aproximamos $f(x)$, para todo x em um intervalo $[a,b]$, pela constante $f(\frac{a+b}{2})$, que corresponde à avaliação de f no ponto médio do intervalo $[a,b]$, dado por $\frac{a+b}{2}$. Assim, a integral aproximada de f é calculada por:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \underbrace{f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)}_{\text{constante}} dx = f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \cdot x \Big|_a^b = f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) b - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) a = \boxed{(b-a)\, f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)}$$

Pela regra do ponto médio: $I_f \approx (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$



B) Erro da aproximação é $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx = \int_a^b f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx$. Entretanto, não temos como integrar $f(x)$, pois é exatamente isto que queremos encontrar, logo, usaremos a expansão de Taylor em x ao redor de $\frac{a+b}{2}$ para substituir $f(x)$ dentro da integral:

$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$ p/ um ξ entre x e $\frac{a+b}{2}$. Como $x \in [a,b]$, então ξ está entre a e b.

→ DEPENDE DE X.

$$\int_a^b \cancel{f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)} + f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\left(x - \tfrac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2}\left(\frac{x-a+b}{2}\right)^2 - \cancel{f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)}\, dx = \underbrace{\underbrace{f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)}_{\text{cte}} \int_a^b x - \left(\tfrac{a+b}{2}\right) dx}_{(1)} + \underbrace{\underbrace{\frac{f''(\xi)}{2}}_{\text{cte}} \int_a^b \left(x - \left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right)^2 dx}_{(2)}$$

(1) $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[\frac{x^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)x\right]\Big|_a^b = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\right]$

$= f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} - \frac{ba}{2} - \frac{b^2}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{a^2}{2}\right] = 0$

(2) $\frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b x^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - x(a+b)\, dx = \frac{f''(\xi)}{2}\left[\frac{x^3}{3} + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 x - \frac{x^2}{2}(a+b)\right]\Big|_a^b = \frac{f''(\xi)}{2}\left[\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2(b-a) - (a+b)\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right)\right]$

$= \frac{f''(\xi)}{2}\left[\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} + \left(\frac{ba^2 + 2b^2a + b^3 - a^3 - 2ba^2 - b^2a}{4}\right) - \frac{b^2a}{3} - \frac{b^3}{2} + \frac{a^3}{2} + \frac{ba^2}{2}\right] = \frac{f''(\xi)}{2}\left[\frac{4b^3 - 4a^3 + 3ba^2 + 6b^2a + 3b^3 - 3a^3 - 6ba^2 - 3b^2a - 6b^2a - 6b^3 + 6a^3 + 6ba^2}{12}\right]$

$= \frac{f''(\xi)}{2}\left[\frac{b^3 - a^3 + 3ba^2 - 3b^2a}{12}\right] = \frac{f''(\xi)}{2}\frac{(b-a)^3}{12} = \frac{f''(\xi)(b-a)^3}{24}$

Reconstituindo o erro: $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b x - \left(\frac{a+b}{2}\right) dx + \frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b \left(x - \left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2 dx = 0 + \boxed{\frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3}$ para um $\xi \in [a,b]$