

MAC 239 – Introdução aos Métodos Formais
1a. Prova, segundo semestre de 2013

NOME: _____
NUSP: _____

Recomendações Gerais:

1. prova individual e com consulta vedada a apontamentos e colegas;
2. duração da prova = uma hora e cinquenta minutos;
3. conteúdo da prova = quatro questões e duas folhas de “dicas” – verifique antes do início da prova se seu caderno de questões está completo;
4. não podem ser utilizadas folhas avulsas e as folhas desse caderno não podem ser destacadas; **utilize o verso das páginas se necessário;**
5. a compreensão dos enunciados faz parte da prova.
6. **VÁ BEM NESTA PROVA !!!**

questão	valor	nota
1	3.0	
2	2.0	
3	3.0	
4	2.0	

LEMBRETECA DE RECORDÁRIOS

Regras de expansão de tableaux semânticos

<i>Tipo</i>	<i>Fórmula</i>	<i>Expansão 1</i>	<i>Expansão 2</i>
α	$VA \wedge B$	VA	VB
α	$FA \vee B$	FA	FB
α	$FA \rightarrow B$	VA	FB
α	$V\neg A$	FA	
α	$F\neg A$	VA	
β	$VA \vee B$	VA	VB
β	$FA \wedge B$	FA	FB
β	$VA \rightarrow B$	FA	VB

Regras de expansão de tableaux KE

Regras $\alpha+$ regras de duas premissas:

$$\frac{VA \vee B \quad FA}{VB} (V\vee_1) \qquad \frac{VA \vee B \quad FB}{VA} (V\vee_2)$$

$$\frac{VA \rightarrow B \quad VA}{VB} (V\rightarrow_1) \qquad \frac{VA \rightarrow B \quad FB}{FA} (V\rightarrow_2)$$

$$\frac{FA \wedge B \quad VA}{FB} (F\wedge_1) \qquad \frac{FA \wedge B \quad VB}{FA} (F\wedge_2)$$

Regras de Dedução Natural:

$\frac{A \quad B}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} (\wedge I)$	$\frac{A \wedge B}{A} (\wedge E_1) \quad \frac{A \wedge B}{B} (\wedge E_2)$
$\frac{A}{A \vee B} (\vee I_1) \quad \frac{B}{A \vee B} (\vee I_2)$	$\frac{\begin{array}{cc} A & B \\ \vdots & \vdots \\ A \vee B & C \quad C \end{array}}{C} (\vee E)$
$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} (\rightarrow I)$	$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B} (\rightarrow E)$
$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg A} (\neg I)$	$\frac{\neg A \quad A}{\perp} (\neg E)$
$(\perp I) = (\neg E)$	$\frac{\perp}{A} (\perp E)$
	$\frac{\neg \neg A}{A} (\neg \neg E)$

Questão 1: (3 pontos)

Decidir se as seguintes fórmulas são válidas, satisfazíveis ou insatisfazíveis, *pelo método que achar mais conveniente*. Indicar claramente seu julgamento.

(a) $[p \rightarrow (q \rightarrow (r \vee s))] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow s) \vee (p \rightarrow r))];$

(b) $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow q$

Verificar se A e B são logicamente equivalentes, dando a tabela da verdade. Nota: $v(A \leftrightarrow B) = 1$ sse $v(A) = v(B)$.

(c) $A = p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$ e $B = (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$.

(a) Pelo tableau KE, vemos que a fórmula é um teorema e, pela correção do método, válida.

(a) $F [p \rightarrow (q \rightarrow (r \vee s))] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow s) \vee (p \rightarrow r))]$ dado

(b) $V p \rightarrow (q \rightarrow (r \vee s))$ ($F \rightarrow$) em 1

(c) $F (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow s) \vee (p \rightarrow r))$, ($F \rightarrow$) em 1

(d) $V p \rightarrow q$ ($F \rightarrow$) em 3

(e) $F (p \rightarrow s) \vee (p \rightarrow r)$ ($F \rightarrow$) em 3

(f) $F (p \rightarrow s)$ ($F \vee$) em 5

(g) $F (p \rightarrow r)$ ($F \vee$) em 5

(h) $V p$ ($F \rightarrow$) em 6

(i) $F s$ ($F \rightarrow$) em 6

(j) $V p$ ($F \rightarrow$) em 7

(k) $F r$ ($F \rightarrow$) em 7

(l) $V q$ ($T \rightarrow$) em 8, 4

(m) $V q \rightarrow (r \vee s)$ ($T \rightarrow$) em 8, 2

(n) $V r \vee s$ ($T \rightarrow$) em 12, 13

(o) $V s$ ($T \vee$) em 11, 14

(p) $\times$ 9, 15

(b) Falsificável com $v(p) = 1$ e $v(q) = 0$.

(c) Equivalente pelo método da tabela da verdade.

p	q	r	$q \leftrightarrow r$	$p \leftrightarrow q$	A	B
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Como as duas últimas colunas são iguais, $A \equiv B$.

Questão 2: (2 pontos)

Determinar se os seqüentes abaixo são válidos ou não pelo *método dos tableaux KE*. Em caso positivo, dar TAMBÉM uma prova pelo método de Dedução Natural; caso contrário, exibir um valoração que refuta o seqüente.

(a) $p \rightarrow (q \vee r), q \rightarrow s, r \rightarrow s, p \vdash s$;

(b) $A \vdash B$ onde $A = \begin{matrix} p_{00} \vee p_{01} \vee p_{02} \\ p_{10} \vee p_{11} \vee p_{12} \end{matrix}$ e $B = \begin{matrix} (p_{00} \rightarrow (\neg p_{01} \wedge \neg p_{02})) \wedge \\ (p_{10} \rightarrow (\neg p_{11} \wedge \neg p_{12})) \end{matrix}$

(a) Pelo tableau KE:

1. $V \ p \rightarrow (q \vee r)$
2. $V \ q \rightarrow s$
3. $V \ r \rightarrow s$
4. $V \ p$
5. $F \ s$
6. $V \ q \vee r$ ($T \rightarrow$) 1, 4
7. $F \ q$ ($T \rightarrow$) 2, 5
8. $F \ r$ ($T \rightarrow$) 3, 5
9. $V \ r$ ($T \vee$) 6, 7
10. $\times$ 8, 9

Dedução natural:

$$\frac{\frac{p \quad p \rightarrow (q \vee r)}{q \vee r} (\rightarrow E) \quad \frac{[q]^1 \quad q \rightarrow s}{s} (\rightarrow E) \quad \frac{[r]^2 \quad r \rightarrow s}{s} (\rightarrow E)}{s} (\vee E^{1,2})$$

(b) Expandindo o tableau KE, nota-se um ramo aberto e saturado com $V \ p_{00}, V \ p_{10}, F \ p_{01}, V \ p_{02}, F \ p_{11}, V \ p_{12}$.

Questão 3: (3 pontos)

Foi roubada uma importante quantia de dinheiro. A Polícia Federal decide interrogar a três suspeitos, André, Bento e Carlos, e consegue determinar diversos fatos.

- (a) No roubo não está implicada nenhuma outra pessoa salvo André, Bento e Carlos.
- (b) O criminoso (ou criminosos) fugiu/fugiram num carro.
- (c) Carlos nunca trabalha sem levar André (e eventualmente outros) como cúmplice.
- (d) Bento não sabe dirigir um carro.

Considerando estas afirmações, expressar em lógica proposicional clássica uma fórmula que codifica as informações apresentadas por estes fatos.

Pergunta: André é culpado ou pode ser inocente? Justificar formalmente sua resposta.

Vamos modelar a situação descrita acima da seguinte maneira.

A: André é criminoso

B: Bento é criminoso

C: Carlos é criminoso

D: sabe Dirigir o carro

(a)	$V A \vee B \vee C$
(b)	$V (A \vee B \vee C) \rightarrow D$
(c)	$V C \rightarrow A$
(d)	$V B \rightarrow \neg D$
(e)	FA
1.	$V D$
2.	$F C$
3.	$V B$
4.	$V \neg D$
5.	$F D$
	$\times$

Logo, André é um dos criminosos.

Questão 4: (2 pontos)

Coloque a fórmula $A \wedge \neg B$ na forma normal conjuntiva, onde:

$$A = \begin{array}{l} p_{00} \vee p_{01} \vee p_{02} \\ p_{10} \vee p_{11} \vee p_{12} \end{array} \quad \text{e} \quad B = \begin{array}{l} (p_{00} \rightarrow (\neg p_{01} \wedge \neg p_{02})) \wedge \\ (p_{10} \rightarrow (\neg p_{11} \wedge \neg p_{12})) \end{array}.$$

A fórmula A já está no formato clausal, podemos nos concentrar apenas em por a fórmula $\neg B$ numa equivalente clausal B' ; a resposta sera $A \wedge B'$.

$$\begin{aligned} B &= \neg((p_{00} \rightarrow (\neg p_{01} \wedge \neg p_{02})) \wedge (p_{10} \rightarrow (\neg p_{11} \wedge \neg p_{12}))) \\ &\equiv (p_{00} \wedge (p_{01} \vee p_{02})) \vee (p_{10} \wedge (p_{11} \vee p_{12})) \\ &\equiv (p_{00} \wedge p_{01}) \vee (p_{00} \wedge p_{02}) \vee (p_{10} \wedge p_{11}) \vee (p_{10} \wedge p_{12}) \\ &= B'. \end{aligned}$$

Neste ponto introduzimos 4 novos átomos:

$$\begin{aligned} q_1 &\leftrightarrow (p_{00} \wedge p_{01}) \\ q_2 &\leftrightarrow (p_{00} \wedge p_{02}) \\ q_3 &\leftrightarrow (p_{10} \wedge p_{11}) \\ q_4 &\leftrightarrow (p_{10} \wedge p_{12}) \end{aligned}$$

e obtemos

$$B' = q_1 \vee q_2 \vee q_3 \vee q_4 \text{ e também}$$

$$\begin{aligned} Q = & (\neg q_1 \vee p_{00}) \wedge (\neg q_1 \vee p_{01}) \wedge (q_1 \vee \neg p_{00} \vee \neg p_{01}) \wedge \\ & (\neg q_2 \vee p_{00}) \wedge (\neg q_2 \vee p_{02}) \wedge (q_2 \vee \neg p_{00} \vee \neg p_{02}) \wedge \\ & (\neg q_3 \vee p_{10}) \wedge (\neg q_3 \vee p_{11}) \wedge (q_3 \vee \neg p_{10} \vee \neg p_{11}) \wedge \\ & (\neg q_4 \vee p_{10}) \wedge (\neg q_4 \vee p_{12}) \wedge (q_4 \vee \neg p_{10} \vee \neg p_{12}) \end{aligned}$$

Assim, uma fórmula na forma normal conjuntiva equisatisfatível a $A \wedge \neg B$ é $A \wedge B' \wedge Q$.