

MAC 239 – Introdução aos Métodos Formais

2a. Prova, segundo semestre de 2013

NOME: _____

NUSP: _____

Questão	Valor	Nota
1	2,5	
2	2,5	
3	2,5	
4	2,5	

Recomendações Gerais:

1. prova individual e com consulta vedada a apontamentos e colegas;
2. duração da prova = uma hora e cinquenta minutos;
3. conteúdo da prova = quatro questões e duas folhas de “dicas” – verifique antes do início da prova se seu caderno de questões está completo;
4. não podem ser utilizadas folhas avulsas e as folhas desse caderno não podem ser destacadas; **utilize o verso das páginas se necessário;**
5. a compreensão dos enunciados faz parte da prova.
6. **BOA SORTE !!!**

LEMBRETECA DE RECORDÁRIOS

Regras de expansão de tableaux semânticos

<i>Tipo</i>	<i>Fórmula</i>	<i>Expansão 1</i>	<i>Expansão 2</i>
α	$VA \wedge B$	VA	VB
α	$FA \vee B$	FA	FB
α	$FA \rightarrow B$	VA	FB
α	$V\neg A$	FA	
α	$F\neg A$	VA	
β	$VA \vee B$	VA	VB
β	$FA \wedge B$	FA	FB
β	$VA \rightarrow B$	FA	VB
γ	$V\forall xP(x)$	$VP(t)$	
γ	$F\exists xP(x)$	$FP(t)$	
δ	$V\exists xP(x)$	$VP(a)$	a novo
δ	$F\forall xP(x)$	$FP(a)$	a novo

Regras de expansão de tableaux KE

Regras $\alpha+$ regras de duas premissas:

$$\frac{VA \vee B \quad FA}{VB} (V\vee_1) \quad \frac{VA \vee B \quad FB}{VA} (V\vee_2)$$

$$\frac{VA \rightarrow B \quad VA}{VB} (V\rightarrow_1) \quad \frac{VA \rightarrow B \quad FB}{FA} (V\rightarrow_2)$$

$$\frac{FA \wedge B \quad VA}{FB} (F\wedge_1) \quad \frac{FA \wedge B \quad VB}{FA} (F\wedge_2)$$

Regras de Dedução Natural:

$\frac{A \quad B}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} \quad (\wedge I)$	$\frac{A \wedge B}{A} \quad (\wedge E_1) \quad \frac{A \wedge B}{B} \quad (\wedge E_2)$
$\frac{A}{A \vee B} \quad (\vee I_1) \quad \frac{B}{A \vee B} \quad (\vee I_2)$	$\frac{\begin{array}{c} A \quad B \\ \vdots \quad \vdots \\ A \vee B \quad C \quad C \end{array}}{C} \quad (\vee E)$
$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} \quad (\rightarrow I)$	$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B} \quad (\rightarrow E)$
$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg A} \quad (\neg I)$	$\frac{\neg A \quad A}{\perp} \quad (\neg E)$
$(\perp I) = (\neg E)$	$\frac{\perp}{A} \quad (\perp E)$
	$\frac{\neg \neg A}{A} \quad (\neg \neg E)$
$\frac{\begin{array}{c} x_0 : - \\ \vdots \\ P(x_0) \end{array}}{\forall x P(x)} \quad (\forall I)$	$\frac{\forall x P(x)}{P(t)} \quad (\forall E)$
$\frac{P(t)}{\exists x P(x)} \quad (\exists I)$	$\frac{\begin{array}{c} x_0 : P(x_0) \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} \quad (\exists E)$

Questão 1: (2,5 pontos)

Determinar se os seqüentes abaixo são válidos ou não pelo *método dos tableaux semânticos* ou *KE*. Em caso negativo, exibir um contra-modelo.

(a) $\exists x \forall y (\neg p(x) \vee q(y)) \vdash \forall x p(x) \rightarrow \forall y q(y);$

(b) $\forall x p(x) \rightarrow q(a), \neg \forall x p(x) \vdash \neg q(a).$

Questão 2: (2,5 pontos)

(a) Dar uma assinatura de primeira ordem e expressar as seguintes sentenças:

- Todo mundo ou é egoísta ou é altruísta.
- Todo altruístas gosta de sua mãe.
- Egoístas gostam de si mesmos.

(b) Expressar as seguintes sentenças

- Todo altruísta gosta de alguém
- Todo egoísta gosta de alguém
- Todo mundo gosta de alguém.

e prová-las PELO MÉTODO DA DEDUÇÃO NATURAL a partir das sentenças do item (a)

Questão 3: (2,5 pontos)

Os termos de uma *progressão aritmética* (PA) de termo inicial a_1 e razão r são dados por:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \times r,$$

e a soma dos n primeiros termos da PA é dada por:

$$S_n = \frac{a_n + a_1}{2} \times n.$$

Mostrar que o programa abaixo calcula a soma dos N primeiros termos de uma PA de razão r . Assumir que a_1 , n , r e N são números inteiros. Não é necessário se demonstrar que o programa sempre para.

OBS: Salientar qual o invariante da iteração do programa e a pré- e pós-condições do programa.

Pré-condição:

```
soma = 0;
```

```
i = 0;
```

```
an = a1;
```

```
//Invariante:
```

```
while (i < N) do
```

```
    soma = soma + an;
```

```
    an = an + r;
```

```
    i = i + 1;
```

```
od
```

Pós-condição:

Questão 4: (2,5 pontos)

A expansão da função $\text{sen}(x)$ pela fórmula de Taylor é dada por:

$$\text{sen}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

O programa seguinte computa o valor do seno, dentro de uma certa precisão, onde $0 < \text{PRECISAO} < 1$, calculando um dos termos da fórmula de Taylor de cada vez. Se t_i é o valor do termo no início da iteração i , então $t_{i+1} = -1 \times t_i \times \frac{x}{2i} \times \frac{x}{2i+1}$. Isto gera o seguinte programa, onde todas as variáveis são reais, a menos de i , que é inteira:

```
seno = 0;
i = 1;
ti = x;
while( |ti| > PRECISAO ) do
    seno = seno + ti;

    /* Cálculo de t(i+1) */
    aux1 = x/(2*i);
    aux2 = x/(2*i+1);
    ti = -1 * ti * aux1 * aux2;
    i = i + 1;
od
```

Pede-se mostrar que o programa sempre termina, mas infelizmente não é verdade que $\forall i (|t_{i+1}| < |t_i|)$. Desta forma, proceder da seguinte maneira para construir a *expressão variante da iteração*:

- Dar uma expressão formal de lógica de primeira ordem que expressa que existe uma iteração I_0 a partir da qual o valor de $|t_i|$ sempre decresce.
- Encontrar o valor de tal iteração I_0 como função de x a partir da qual o valor absoluto do termo sempre decai. (Dica: este valor ocorre quando $\text{aux1} < 1$).
- Definir uma expressão variante $E(i)$ apropriada, definida para $i \geq I_0$ e sempre decrescente.
- Mostrar que existe um $i \geq I_0$ tal que $E(i) \leq 0$. Concluir que o programa sempre pára.