

**MAC 239 – Introdução aos Métodos Formais**  
**Prova Substitutiva, segundo semestre de 2013**

NOME: \_\_\_\_\_

NUSP: \_\_\_\_\_

Questão	Valor	Nota
1	2,5	
2	2,5	
3	2,5	
4	2,5	

**Recomendações Gerais:**

1. prova individual e com consulta vedada a apontamentos e colegas;
2. duração da prova = uma hora e cinquenta minutos;
3. conteúdo da prova = quatro questões e três folhas de “dicas” – verifique antes do início da prova se seu caderno de questões está completo;
4. não podem ser utilizadas folhas avulsas e as folhas desse caderno não podem ser destacadas; **utilize o verso das páginas se necessário;**
5. a compreensão dos enunciados faz parte da prova.
6. **BOA SORTE !!!**

## LEMBRETECA DE RECORDÁRIOS

*Regras de expansão de tableaux semânticos*

<i>Tipo</i>	<i>Fórmula</i>	<i>Expansão 1</i>	<i>Expansão 2</i>
$\alpha$	$VA \wedge B$	$VA$	$VB$
$\alpha$	$FA \vee B$	$FA$	$FB$
$\alpha$	$FA \rightarrow B$	$VA$	$FB$
$\alpha$	$V\neg A$	$FA$	
$\alpha$	$F\neg A$	$VA$	
$\beta$	$VA \vee B$	$VA$	$VB$
$\beta$	$FA \wedge B$	$FA$	$FB$
$\beta$	$VA \rightarrow B$	$FA$	$VB$
$\gamma$	$V\forall xP(x)$	$VP(t)$	
$\gamma$	$F\exists xP(x)$	$FP(t)$	
$\delta$	$V\exists xP(x)$	$VP(a)$	<i>a novo</i>
$\delta$	$F\forall xP(x)$	$FP(a)$	<i>a novo</i>

*Regras de expansão de tableaux KE*

Regras  $\alpha+$  regras de duas premissas:

$$\frac{VA \vee B}{FA} (V\vee_1) \qquad \frac{VA \vee B}{VA} (V\vee_2)$$

$$\frac{VA \rightarrow B}{VA} (V\rightarrow_1) \qquad \frac{VA \rightarrow B}{FA} (V\rightarrow_2)$$

$$\frac{FA \wedge B}{VA} (F\wedge_1) \qquad \frac{FA \wedge B}{FA} (F\wedge_2)$$

*Regras de Dedução Natural: Regras de Dedução Natural:*

$\frac{A \quad B}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} (\wedge I)$	$\frac{A \wedge B}{A} (\wedge E_1) \quad \frac{A \wedge B}{B} (\wedge E_2)$
$\frac{A}{A \vee B} (\vee I_1) \quad \frac{B}{A \vee B} (\vee I_2)$	$\frac{\begin{array}{c} A \quad B \\ \vdots \quad \vdots \\ A \vee B \quad C \quad C \end{array}}{C} (\vee E)$
$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} (\rightarrow I)$	$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B} (\rightarrow E)$
$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg A} (\neg I)$	$\frac{\neg A \quad A}{\perp} (\neg E)$
$(\perp I) = (\neg E)$	$\frac{\perp}{A} (\perp E)$
	$\frac{\neg \neg A}{A} (\neg \neg E)$
$\frac{\begin{array}{c} x_0 : - \\ \vdots \\ P(x_0) \end{array}}{\forall x P(x)} (\forall I)$	$\frac{\forall x P(x)}{P(t)} (\forall E)$
$\frac{P(t)}{\exists x P(x)} (\exists I)$	$\frac{\begin{array}{c} x_0 : P(x_0) \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} (\exists E)$

**Questão 1:** (2,5 pontos)

Determinar se os seqüentes abaixo são válidos ou não pelo *método dos tableaux semânticos ou tableaux KE*. Em caso negativo, exibir um contra-modelo ou uma contra-valoração.

(a)  $\exists x \forall y (p(y) \rightarrow q(x, y)) \vdash \forall x \exists y (p(x) \rightarrow q(y, x));$

(b)  $(p \wedge q) \rightarrow r, p \vdash (p \vee q) \rightarrow r$

**Questão 2:** (2,5 pontos)

- (a) Dar uma assinatura de primeira ordem e expressar as seguintes sentenças:
- (I) Todos os IMEanos são parecidos.
  - (II) Se duas pessoas não são parecidas, pelo menos uma delas não é IMEana.
- (b) Provar PELO MÉTODO DA DEDUÇÃO NATURAL que  $(I) \vdash (II)$ .

**Questão 3:** (2,5 pontos)

Os termos de uma *progressão aritmética* (PA) de termo inicial  $a_1$  e razão  $r$  são dados por:

$$a_i = a_1 + (i - 1) \times r.$$

Queremos calcular a produtória dos  $N$  primeiros termos de uma PA, ou seja:

$$P_N = \prod_{i=1}^N a_i = a_1 \times \cdots \times a_N$$

Mostrar que o programa abaixo calcula a produtória dos  $N$  primeiros termos de uma PA de razão  $r$ . Assumir que  $a_1$ ,  $a_i$ ,  $r$  e  $N$  são números inteiros. Não é necessário se demonstrar que o programa sempre pára.

OBS: Salientar qual o invariante da iteração do programa, a pré-condição e a pós-condição

```
prod = a1;
```

```
i = 1;
```

```
an = a1;
```

```
while (i < N) do
```

```
    an = an + r;
```

```
    prod = prod * an;
```

```
    i = i + 1;
```

```
od
```

**Questão 4:** (2,5 pontos)

Considere o seguinte programa, com entrada  $N$  e saída  $out$  que desejamos mostrar que pára.

```
out = 1;
```

```
i = 0;
```

```
while( i != N ) {
```

```
    out = out * (out + i);
```

```
    i = i + 2;
```

```
}
```

- (a) Dar uma função limitante (também chamada de expressão variante) para o laço do programa.
- (b) Determinar para quais valores de  $N$  o programa pára, através das regras de dedução da correção total.
- (c) Mostrar que a função limitante é decrescente.
- (d) Mostrar que eventualmente a função limitante assume valores menores ou iguais a 0.
- (e) Mostrar que quando o valor da função é zero, usando a hipótese do item (b), a condição do laço se torna falsa.