Bacharelado em Ciência da Computação - IME /USP

MAC-315 - Programação Matemática I

Primeiro semestre de 2003

Prof. Marcelo Queiroz

Segunda Prova – 26 de junho de 2003

Nome:____

Assinatura:____________________________________

Nº USP: 6 8 1 8 6 5 3

i j

Instruções: Os valores de i e j nas questões 1 e 2 são os dois últimos dígitos do seu número USP. Você deve substituí-los antes de resolver estas questões.

Questão 1 (2 pontos)

Resolva usando o simplex (tabular ou revisado) de duas fases o PLC dado pela formulação abaixo. Você **deve** utilizar a formulação dada.

$$\begin{cases} \min & -x_1 \\ \text{s.a} & -x_1 + 2x_2 - x_3 = \overbrace{\boxed{12}}^{2i+2} \\ & -x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = \overbrace{\boxed{38}}^{6i+8} \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = \overbrace{\boxed{14}}^{2i+4} \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Fase I: Inicialização: $\min \sum y_i$

s.a. $-x_1 + 2x_2 - x_3 + y_1 = 12$

$-x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 + y_2 = 38$

$x_1 + 2x_2 + x_4 + y_3 = 14$

$x \geq 0, \; y \geq 0$

$B = B^{-1} = I \quad x_B = B^{-1}b \quad \bar{c}_j = c_j - c_B' B^{-1} A^j$

-64	1	-10	3	-2	0	0	0
$y_1 = 12$	-1	2	-1	0	1	0	0
$y_2 = 38$	-1	$\boxed{6}$	-2	1	0	1	0
$y_3 = 14$	1	2	0	1	0	0	1

$\theta^* = \frac{38}{6}$ $\Rightarrow$

$38/6$	$-1/6$	1	$-1/3$	$1/6$	0	$1/6$	0

$i=j=0$!

$\boxed{\text{Questão 2}}$ (3 pontos)

Considere o seguinte problema (primal) de programação linear:

$$(P)\begin{cases} \min & x_1 + \overbrace{\boxed{1}}^{i+1} x_2 & & & \\ \text{s.a} & x_1 + \overbrace{\boxed{1}}^{i+1} x_2 & - \; x_3 & & = \overbrace{\boxed{1}}^{i+1} \\ & x_1 - \overbrace{\boxed{1}}^{j+1} x_2 & & + \; x_4 & = 0 \\ & & x \geq 0 & & \end{cases}$$

a) Escreva a formulação do problema Lagrangeano (min-max) associado a (P).

b) Escreva o dual (D) de (P).

c) Resolva graficamente (P) (no espaço das variáveis x_1 e x_2) e (D).

d) As soluções de (P) e (D) são únicas? São degeneradas? Existe alguma relação entre unicidade e degenerescência para este par de problemas? (explique **sucintamente**)

e) Resolva (P) usando o simplex dual a partir da base associada a $\{x_3, x_4\}$.

a) $\min \; c'x$
$\quad$ s.a. $Ax = b$
$\quad\quad x \geq 0$

$\Rightarrow \; L(x,p) = \min_{x \geq 0} \max_{p \in \mathbb{R}^n} c'x + p'(b - Ax)$

$\boxed{\textbf{Questão 3}}$ (3 pontos)

Seja B uma base ótima de

$$\begin{cases} \min & c'x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $c \in \mathbb{R}^n$. Considere o problema modificado

$$(PM) \begin{cases} \min & c'x \\ \text{s.a} & Ax = b + \lambda d \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}_+$ e $d \in \mathbb{R}^m$.

a) Mostre que (PM) nunca poderá ser ilimitado, independentemente dos valores de λ e d.

b) Forneça uma condição necessária e suficiente sobre o vetor d para que B permaneça ótima em (PM) com qualquer valor de $\lambda \geq 0$.

$\boxed{\textbf{Questão 4}}$ (2 pontos)

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica, e $c \in \mathbb{R}^n$. Mostre que se

$$\begin{cases} \min & c'x \\ \text{s.a} & Ax \geq c \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

possui solução ótima, então existe uma solução ótima x^* que satisfaz $x^* \geq 0$ e $Ax^* = c$.

$\boxed{\text{Questão 5}}$ (2 pontos)

Considere a função `achaviável(A,b)` que, dados $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$, retorna (se existir) uma solução do sistema linear

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

ou um código especial (`nil`) caso o sistema seja inviável.

Escreva o código de uma função `proglin(A,b,c)` para resolver o

$$(PLC) \begin{cases} \min & c'x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

retornando uma solução ótima x^* (se existir), ou os códigos (`nil`) se o problema é inviável e (`inf`) se o problema é ilimitado.

Obs: Você pode usar uma sintaxe próxima de C ou Octave, o que achar mais simples. Você não deve implementar o simplex.