

Nome: _____ Assinatura: _____

Nº USP:

i j

Instruções: Os valores de i e j nas questões 1 e 2 são os dois últimos dígitos do seu número USP. Você deve substituí-los antes de resolver estas questões.

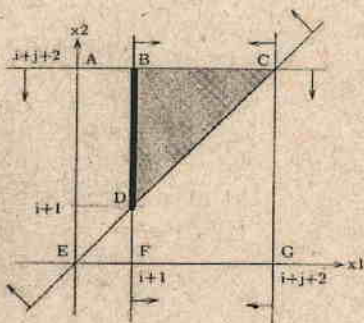
Questão 1 (2 pontos)

a) Identifique graficamente todas as soluções básicas do poliedro abaixo, fornecendo suas coordenadas e discriminando vértices, vértices degenerados, soluções básicas inviáveis e soluções básicas inviáveis degeneradas.

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} x_1 - x_2 \leq 0 \\ -x_1 \leq \boxed{i+1} \\ x_1 \leq \boxed{i+j+2} \\ x_2 \leq \boxed{i+j+2} \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

b) Identifique graficamente o conjunto de soluções ótimas do problema abaixo, e demonstre algebricamente sua afirmação.

$$\begin{cases} \min & \sum_{i=1}^{i+1} x_i \\ \text{s.a} & x \in P \end{cases}$$



a) Vértices: $B = (i+1, i+j+2)'$, $D = (i+1, i+1)'$ e $C = (i+j+2, i+j+2)'$ (este último é degenerado).

Soluções básicas inviáveis: $A = (0, i+j+2)'$, $F = (i+1, 0)'$, $G = (i+j+2, 0)'$ e $E = (0, 0)'$ (esta última é degenerada).

b) O conjunto de soluções ótimas está indicado pelo segmento de reta que liga os vértices B e D. Os pontos são da forma $z = (i+1, y)'$, para qualquer valor de y entre $i+1$ e $i+j+2$. Observe que estes pontos possuem valor da função objetivo igual a $(i+1) \cdot z_1 = (i+1)^2$. Por outro lado, todos os pontos do poliedro devem satisfazer a restrição $-x_1 \leq -(i+1) \Rightarrow x_1 \geq (i+1) \Rightarrow (i+1)x_1 \geq (i+1)^2$, o que garante a otimalidade dos pontos indicados.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$0 \neq 2 - 1 = 1 \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(A^2, A^3, A^5)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Questão 2 (3 pontos)

- a) Passe o problema da questão 1 para a forma canônica (PLC).
 b) Calcule a solução associada à base $\{1, 2, 5, 6\}$ e demonstre que ela é um vértice não-degenerado (enuncie as definições pertinentes).
 c) Demonstre que a solução do item (b) é ótima para o (PLC). Dica: considere as restrições de sinal ativas.

d) Demonstre que o ponto $(0, 0, 0, -\overbrace{\square}^{i+1}, \overbrace{\square}^{i+j+2}, \overbrace{\square}^{i+j+2})'$ é uma solução básica e que esta solução é vizinha da solução do item (b).

a) O problema na forma canônica é

$$\left\{ \begin{array}{llllllll} \min & (i+1)x_1 & & & & & & \\ \text{s.a.} & x_1 - x_2 + x_3 & & & & & & = 0 \\ & -x_1 & & + x_4 & & & & = -(i+1) \\ & x_1 & & & + x_5 & & & = i+j+2 \\ & & x_2 & & & + x_6 & & = i+j+2 \\ & & & & & & x_1, \dots, x_6 \geq 0 \end{array} \right.$$

ou, equivalentemente, $\left\{ \begin{array}{ll} \min & c'x \\ \text{s.a.} & Ax = b, \text{ onde} \\ & x \geq 0 \end{array} \right.$

$$c = \begin{bmatrix} i+1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -(i+1) \\ i+j+2 \\ i+j+2 \end{bmatrix}$$

b) O conjunto de índices $\{1, 2, 5, 6\}$ está associado às colunas A^1, A^2, A^5, A^6 , que são l.i. pois a matriz B formada por estas colunas é inversível:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por isso estas colunas formam uma base, e a solução básica associada é a única solução do sistema

$$B\bar{x}_B = b, \text{ dada por } \bar{x}_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} i+1 \\ i+1 \\ j+1 \\ j+1 \end{bmatrix}, \text{ e corresponde ao ponto } \bar{x} = (i+1, i+1, 0, 0, j+1, j+1)'$$

(as variáveis com índices fora da base foram completadas com zeros). Como este ponto satisfaz $\bar{x} \geq 0$ ele é viável, e por ser uma solução básica viável ele é um vértice. Como nenhuma das componentes associadas a variáveis básicas é nula, este vértice é não-degenerado.

c) A solução $\bar{x}$ do item (b) possui o valor $(i+1)^2$ em relação à função objetivo $(i+1)x_1$, e as restrições $x_4 \geq 0$ e $x_5 \geq 0$ são ativas neste ponto. Por causa da segunda restrição do problema ($-x_1 + x_4 = -(i+1)$), a restrição $x_4 \geq 0$ é equivalente a $-(i+1) + x_1 \geq 0$ ou ainda $x_1 \geq (i+1)$. Mas como todo ponto viável tem que satisfazer estas restrições, isso significa que todo ponto viável satisfaz $c'x = (i+1)x_1 \geq (i+1) \cdot (i+1) = c'\bar{x}$, ou seja, o ponto $\bar{x}$ é ótimo para o (PLC).

d) O ponto $y = (0, 0, 0, -(i+1), i+j+2, i+j+2)'$ é uma solução básica pois satisfaz as restrições de igualdade ($Ay = b$) e porque as colunas A^4, A^5, A^6 associadas a $y_i \neq 0$ são l.i. (são colunas da identidade). Esta solução básica é inviável (pois não satisfaz $y \geq 0$) e além disso é degenerada pois tem menos do que $m = 4$ componentes não-nulas. Uma das possibilidades de se completar as colunas para formar uma base é utilizar a coluna A^1 . A base então formada $\{1, 4, 5, 6\}$ difere da base associada a $\bar{x}$ em exatamente um índice (4), e portanto as bases são adjacentes. Isso prova que as soluções básicas correspondentes também são adjacentes. O mesmo argumento poderia ser feito usando-se A^2 (mas não A^3 !) para completar a base.

Questão 3 (2 pontos)

Considere o poliedro (não-canônico) $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ (onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$) e suponha que $P \neq \emptyset$. Mostre que ou P não possui vértices ou então $P = \{v\}$ onde v é um vértice.

Separa-se o argumento nos 2 únicos casos possíveis: ou (1) P não possui vértices, ou (2) P possui vértices. No caso (1) não há nada a ser provado. Suponha então que P possui algum vértice v . Então v é solução básica, o que indica que existem n restrições de P ativas em v e linearmente independentes. Estas n linhas linearmente independentes de A geram um (sub)sistema que possui solução única. Como qualquer solução viável do poliedro precisa satisfazer as mesmas n restrições de igualdade, qualquer solução viável precisa ser igual a v , ou seja, $P = \{v\}$.

Outra possibilidade de argumentação: este poliedro P é um subespaço-afim, e portanto sempre que dois pontos x, y pertencem a P , a reta que passa por x e y está contida em P ; assim sendo, ou o poliedro contém uma reta (e portanto não possui vértices), ou então ele não contém uma reta (e portanto possui pelo menos um vértice v , já que é não-vazio). Mas neste caso não podem existir dois pontos distintos pertencentes a P , pois isso geraria uma reta em P , e logo $P = \{v\}$.