BCC / IME / USP - MAC-315 - Segunda Prova - 24/5/2010

Nome:____________________**Assinatura:**____________________ **Nº USP:** $\square\square\square\square\square\underset{i}{\square}\underset{j}{\square}$

Instruções: Os valores de i e j nas questões 1 e 2 são os dois últimos dígitos do seu número USP. Você deve substituí-los antes de resolver estas questões.

Observação: Escreva as expressões literais antes de fazer cada conta (por exemplo $x_B = B^{-1}b$, $\bar{c}_j = c_j - c_B'B^{-1}A^j$, $p' = c_B'B^{-1}$, $d_B = -B^{-1}A^j$, etc.)

$\boxed{\textbf{Questão 1}}$ (2.5 pontos) Seja $P = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} \overbrace{\square}^{i+j+3} \\ \overbrace{\square}^{i+2} \\ \overbrace{\square}^{j+2} \end{bmatrix} \quad \text{e considere o (PL)} \quad \begin{cases} \min & -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a} & x \in P. \end{cases}$$

a) Calcule a solução básica $\bar{x}$ associada à base $\{x_1, x_2, x_5\}$. Esta base é ótima para o (PL)?

b) Calcule a direção básica $\bar{d} \in \mathbb{R}^5$ associada a $j = 4$ (colocar x_4 na base) e o ponto $y = \bar{x} + \bar{\theta}\bar{d} \in P$ com o máximo valor de $\bar{\theta} \geq 0$ possível. Atualize a matriz inversa de base usando a técnica do simplex *revisado*. Qual é o (novo) vetor de custos reduzidos $\bar{c}$ em y?

c) Desenhe o poliedro em $\mathbb{R}^2$ considerando as variáveis x_3, x_4, x_5 como variáveis de folga, e identifique graficamente as soluções e a direção básica dos itens (a) e (b).

d) Troque o objetivo do problema por $\min x_1 + 2x_2$ e identifique graficamente a nova solução ótima. Monte a solução básica correspondente em $\mathbb{R}^5$, e mostre que ela satisfaz o critério de otimalidade do simplex.

Dica: $B^{-1}_{\{x_1,x_2,x_5\}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{Questão 2}}$ (2.5 pontos)

a) Resolva utilizando o simplex tabular a partir da base $\{y_1, y_2\}$, usando a regra de Bland:

$$\begin{cases} \min & & & & & & & & & y_1 & + & y_2 & & \\ \text{s.a.} & & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & y_1 & = & \overbrace{\square}^{i+1} \\ & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & & & + & y_2 & = & \overbrace{\square}^{j+1} \\ & & & & x, y \geq 0 \end{cases}$$

Dica: 2 iterações.

b) Resolva utilizando o simplex tabular a partir da base $\{x_4, x_1\}$ (nesta ordem), usando a regra de Bland:

$$\begin{cases} \min & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & & \\ \text{s.a.} & & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & \overbrace{\square}^{i+1} \\ & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & & & = & \overbrace{\square}^{j+1} \\ & & & & & x \geq 0 \end{cases}$$

Dica: 1 iteração. Aproveite o resultado do item (a).

Questão 3 (2.5 pontos) Considere o problema

$$\begin{cases} \min & x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 \\ \text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = b_1 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = b_2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

onde b_1, b_2 são dois parâmetros. Existem quatro bases associadas a este problema: $B_{(1)} = \{x_2, x_3, x_4\}$, $B_{(2)} = \{x_1, x_3, x_4\}$, $B_{(3)} = \{x_1, x_2, x_4\}$ e $B_{(4)} = \{x_1, x_2, x_3\}$. Para cada base $B_{(i)}$, determine o conjunto de todos os valores de b_1 e b_2 para os quais a base correspondente é ótima no problema acima, e represente este conjunto visualmente (num gráfico $b_1 \times b_2$).

Dica: Comece pelo cálculo dos custos reduzidos.

$$B_{(1)}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}, B_{(2)}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, B_{(3)}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, B_{(4)}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Questão 4 (2.5 pontos) Considere o $(\text{PLC})_{\text{aux}}$ definido por

$$(PLC)_{\text{aux}} \begin{cases} \min & \sum_{i=1}^{m} y_i \\ \text{s.a.} & Ax + y = b \qquad \text{(onde } b \geq 0) \\ & x,\ y \geq 0. \end{cases}$$

a) Este problema pode ser inviável? Explique.

b) Este problema pode ser ilimitado? Explique.

c) Este problema permite detectar inviabilidade do (PLC) original (sem as variáveis y)? Explique.

d) Este problema permite detectar ilimitação do (PLC) original? Explique.