BMAC / IME / USP – MAC-315 – Segunda Prova – 20/10/2011

Nome:________________ **Assinatura:**________________ **Nº USP:** ☐☐☐☐☐☐☐

i j

Instruções: Enuncie claramente os argumentos, hipóteses e conclusões. Escreva as expressões literais antes de fazer cada conta (por exemplo $x_B = B^{-1}b$, $\bar{c}_j = c_j - c_B' B^{-1} A^j$, $p' = c_B' B^{-1}$, $d_B = -B^{-1}A^j$, etc). Esquemas e fórmulas sem explicações textuais não serão aceitos. Os valores de i e j abaixo são os dois últimos dígitos do seu número USP. Os parâmetros

$$\alpha = \underset{i+j+2}{\boxed{}}, \quad \beta = \underset{\frac{i+1}{\alpha}}{\boxed{}}, \quad \gamma = \underset{\frac{j+1}{\alpha}}{\boxed{}} \quad \text{e} \quad \delta = \underset{\frac{(i+1)(j+1)}{\alpha}}{\boxed{}}$$

são utilizados nas questões 2 e 4. Você deve substituí-los antes de resolver estas questões. Reconfirme os valores acima verificando que $\alpha\beta\gamma = \delta$.

Questão 1 (3 pontos) Considere o problema canônico $\begin{cases} \min & c'x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$, e sejam x um vértice não-degenerado associado à base B, j um índice não-básico, e d a j-ésima direção básica.

1. Mostre que d é viável a partir de x.
2. Supondo que $d_B \not\geq 0$, qual é o significado (geométrico) da expressão $\theta^* = \min_{i:d_{B_i}<0} \left\{ \frac{-x_{B_i}}{d_{B_i}} \right\}$? Prove sua afirmação.
3. Qual é o significado do j-ésimo custo reduzido associado à base B? Prove sua afirmação.

1. Temos que mostrar que $\exists \bar{\alpha} > 0$ t.q. $x + \bar{\alpha} d \in P$. Temos $Ad = A^N d_N + A^B d_B = A^j d_j + B d_B = A^j + B(-B^{-1}A^j) = 0$ por construção, e portanto $A(x + \alpha d) = b$, $\forall \alpha$. Assim só falta mostrar que $\exists \bar{\alpha} > 0$ t.q. $x + \bar{\alpha} d \geq 0$. Como $d_N \geq 0$, segue que $x_N + \alpha d_N \geq 0$, $\forall \alpha \geq 0$; se $d_B \geq 0$ temos também que $x_B + \alpha d_B \geq 0$, $\forall \alpha \geq 0$ e portanto d é viável. Suponha por outro lado que $d_B \not\geq 0$; como x é não-degenerado, segue que $x_B > 0$ e portanto existe algum $\bar{\alpha} > 0$ tal que $x_B + \bar{\alpha} d_B \geq 0$ (por exemplo, $\bar{\alpha} = \theta^*$), mostrando que d é viável.

2. θ^* é o maior tamanho de passo α possível a partir de x na direção d mantendo a viabilidade de $x + \alpha d$. Para ver isso, seja k tal que $d_{B_k} < 0$ e $\theta^* = \frac{-x_{B_k}}{d_{B_k}}$. Como vimos no item (1), para a viabilidade de $x + \alpha d$ basta se preocupar com as componentes básicas tais que $d_{B_i} < 0$; mas neste caso $x_{B_i} + \theta^* d_{B_i} = x_{B_i} - \frac{x_{B_k}}{d_{B_k}} d_{B_i} \geq x_{B_i} - \frac{x_{B_i}}{d_{B_i}} d_{B_i} = x_{B_i} - x_{B_i} = 0$, ou seja, $x + \theta^* d$ é viável. Além disso, se $\alpha > \theta^*$, teríamos $x_{B_k} + \alpha d_{B_k} < x_{B_k} + \theta^* d_{B_k} = x_{B_k} - \frac{x_{B_k}}{d_{B_k}} d_{B_k} = x_{B_k} - x_{B_k} = 0$, e portanto $x + \alpha d$ perde a viabilidade para $\alpha > \theta^*$.

3. O j-ésimo custo reduzido $\bar{c}_j = c_j - c_B' B^{-1} A^j$ representa a variação da função objetivo na j-ésima direção básica, pois

$$c'(x+d) - c'x = c'd = c_N' d_N + c_B' d_B = c_j \underbrace{d_j}_{=1} - c_B' B^{-1} A^j = \bar{c}_j.$$

$\boxed{\textbf{Questão 2}}$ (2 pontos) Considere o problema (PLC) $\left\{\begin{array}{ll} \min & -x_3 - x_4 \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}\right\}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \underset{-\delta}{\square} & \underset{-\delta}{\square} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \underset{-\beta}{\square} & \underset{\gamma}{\square} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e a solução básica viável associada à base formada pelas variáveis $\{x_1, x_2, x_3\}$. Construa todas as direções básicas a partir desta base, e classifique-as *em relação ao poliedro* como direções inviáveis, viáveis ilimitadas e viáveis limitadas, determinando as soluções básicas vizinhas no último caso. Classifique-as também *em relação à variação da função objetivo* como direções de descida, de subida ou invariantes.

A base $\{x_1, x_2, x_3\}$ *está associada à matriz básica* $B = I$ *e à solução básica viável* $x = (0, 2, 0, 0, 0, 0)'$. *As direções básicas estão associadas aos índices não-básicos* $j = 4, 5, 6$.

$j = 4$*: Temos* $d_B = -B^{-1}A^4 = -A^4 = (\delta, \beta, 0)'$ *e portanto* $d = (\delta, \beta, 0, 1, 0, 0)'$. *Como* $d \geq 0$, *esta direção é viável e ilimitada, pois* $x + \alpha d \geq 0,\ \forall \alpha \geq 0$. *A variação da função objetivo é* $\bar{c}_4 = c'd = -d_3 - d_4 = -1 < 0$, *logo esta é uma direção de descida.*

$j = 5$*: Temos* $d_B = -B^{-1}A^5 = -A^5 = (\delta, -\gamma, 0)'$ *e portanto* $d = (\delta, -\gamma, 0, 0, 1, 0)'$. *Como* $d \not\geq 0$, *esta direção é limitada pelo tamanho de passo* $\theta^* = \min_{i:d_{B_i}<0} \left\{ \frac{-x_{B_i}}{d_{B_i}} \right\} = \frac{-x_{B_2}}{d_{B_2}} = \frac{2}{\gamma} > 0$, *sendo portanto viável. A solução básica vizinha é* $y = x + \theta^* d = (0, 2, 0, 0, 0, 0)' + \frac{2}{\gamma}(\delta, -\gamma, 0, 0, 1, 0)' = (\frac{2\delta}{\gamma}, 0, 0, 0, \frac{2}{\gamma}, 0)'$. *A variação da função objetivo é* $\bar{c}_5 = c'd = -d_3 - d_4 = 0$, *logo esta é uma direção invariante em relação à função objetivo.*

$j = 6$*: Temos* $d_B = -B^{-1}A^6 = -A^6 = (0, 0, -1)'$ *e portanto* $d = (0, 0, -1, 0, 0, 1)'$. *Como* $d \not\geq 0$, *esta direção é limitada por* $\theta^* = \min_{i:d_{B_i}<0} \left\{ \frac{-x_{B_i}}{d_{B_i}} \right\} = \frac{-x_{B_3}}{d_{B_3}} = 0$, *e portanto a direção é inviável. A variação da função objetivo é* $\bar{c}_6 = c'd = -d_3 - d_4 = +1 > 0$, *logo esta é uma direção de subida.*

$\boxed{\textbf{Questão 3}}$ (2.5 pontos)
Considere a atualização da inversa de base B^{-1} pelo método simplex revisado utilizando um vetor $u = B^{-1}A^j$ com pivô $u_k > 0$, que é definida pelas expressões

$$\begin{cases} \bar{B}_k^{-1} = \dfrac{1}{u_k} B_k^{-1} \\ \\ \bar{B}_i^{-1} = B_i^{-1} - \dfrac{u_i}{u_k} B_k^{-1}, \ i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, m \end{cases}$$

que representam as linhas da nova matriz. Verifique que essas fórmulas de fato correspondem à inversa da nova matriz básica formada pelas variáveis $\{x_{B_1}, \dots, x_{B_{k-1}}, x_j, x_{B_{k+1}}, \dots, x_{B_m}\}$. Dica: considere todos os produtos $\bar{B}_i^{-1} \bar{B}^j$, lembrando que para matrizes P e Q em geral vale que $P_i Q^j = (PQ^j)_i = (PQ)_{i,j}$.

Temos que mostrar que $\bar{B}^{-1}\bar{B} = I$, *ou seja, que* $\bar{B}_i^{-1}\bar{B}^j = I_{ij} = \begin{cases} 1 & se\ i = j \\ 0 & c.c. \end{cases}$

Temos assim quatro casos a considerar:

$i = j = k$: *Nesse caso* $\bar{B}_k^{-1}\bar{B}^k = (\frac{1}{u_k} B_k^{-1})A^j = \frac{1}{u_k}(B_k^{-1}A^j) = \frac{u_k}{u_k} = 1.$

$i = k,\ j \neq k$: *Nesse caso* $\bar{B}_k^{-1}\bar{B}^j = (\frac{1}{u_k} B_k^{-1})B^j = \frac{1}{u_k}(B_k^{-1}B^j) = \frac{1}{u_k} I_{kj} = 0.$

$i \neq k,\ j = k$: *Nesse caso*

$$\bar{B}_i^{-1}\bar{B}^k = (B_i^{-1} - \frac{u_i}{u_k} B_k^{-1})A^j = (B_i^{-1}A^j) - \frac{u_i}{u_k}(B_k^{-1}A^j) = u_i - \frac{u_i}{u_k} u_k = 0.$$

$i \neq k,\ j \neq k$: *Nesse caso*

$$\bar{B}_i^{-1}\bar{B}^j = (B_i^{-1} - \frac{u_i}{u_k} B_k^{-1})B^j = (B_i^{-1}B^j) - \frac{u_i}{u_k}(B_k^{-1}B^j) = I_{ij} - \frac{u_i}{u_k} \overbrace{I_{kj}}^{=0} = I_{ij}.$$

$\boxed{\textbf{Questão 4}}$ (2.5 pontos) Resolva, usando o simplex tabular de 2 fases e a regra de "anti-Bland" (escolher sempre as variáveis de maior índice dentre as variáveis candidatas a entrar ou sair da base), o seguinte problema:

$$\left\{\begin{array}{lrrrrrrcl}
\min & & & -x_3 & -x_4 & & & & \\
\text{s.a} & \underset{\frac{1}{i+1}}{\boxed{}}x_1 & +x_2 & & -x_4 & & & = & 2 \\
 & \underset{-\frac{1}{j+1}}{\boxed{}}x_1 & +x_2 & & & +x_5 & & = & 2 \\
 & & & x_3 & & & +x_6 & = & 0 \\
 & \multicolumn{8}{c}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}\right.$$

Fase I - Inicialização: Consideramos o problema auxiliar com 3 variáveis artificiais y_1, y_2, y_3 e o objetivo $\min y_1 + y_2 + y_3$, e a base viável correspondente a estas variáveis, com o tableau:

-4	$-\frac{1}{i+1}+\frac{1}{j+1}$	-2	-1	1	-1	-1	0	0	0
$y_1 = 2$	$\frac{1}{i+1}$	1	0	-1	0	0	1	0	0
$y_2 = 2$	$-\frac{1}{j+1}$	1	0	0	1	0	0	1	0
$y_3 = 0$	0	0	1	0	0	1	0	0	1

Por anti-Bland, x_6 entra na base, e y_3 sai da base:

-4	$-\frac{1}{i+1}+\frac{1}{j+1}$	-2	0	1	-1	0	0	0	1
$y_1 = 2$	$\frac{1}{i+1}$	1	0	-1	0	0	1	0	0
$y_2 = 2$	$-\frac{1}{j+1}$	1	0	0	1	0	0	1	0
$x_6 = 0$	0	0	1	0	0	1	0	0	1

Por anti-Bland, x_5 entra na base, e y_2 sai da base:

-2	$-\frac{1}{i+1}$	-1	0	1	0	0	0	1	1
$y_1 = 2$	$\frac{1}{i+1}$	1	0	-1	0	0	1	0	0
$x_5 = 2$	$-\frac{1}{j+1}$	1	0	0	1	0	0	1	0
$x_6 = 0$	0	0	1	0	0	1	0	0	1

Por anti-Bland, x_2 entra na base e y_1 sai:

0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
$x_2 = 2$	$\frac{1}{i+1}$	1	0	-1	0	0	1	0	0
$x_5 = 2$	$-\frac{1}{i+1}-\frac{1}{j+1}$	0	0	1	1	0	-1	1	0
$x_6 = 0$	0	0	1	0	0	1	0	0	1

Esse tableau é ótimo para a Fase I, e como possui valor ótimo 0 corresponde a uma solução viável para o problema original. Como a base é formada apenas por variáveis originais, podemos aproveitar a parte correspondente às variáveis originais, recalculando a linha 0 de acordo com a função objetivo original (observando que $c_B = 0$):

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
\hline
x_2 = 2 & \frac{1}{i+1} & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
x_5 = 2 & -\frac{1}{i+1} - \frac{1}{j+1} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
x_6 = 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

Por anti-Bland, x_4 entra na base e x_5 sai:

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
0 & -\frac{1}{i+1} - \frac{1}{j+1} & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
x_2 = 2 & -\frac{1}{j+1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
x_4 = 2 & -\frac{1}{i+1} - \frac{1}{j+1} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
x_6 = 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

Por anti-Bland, x_3 entra na base e x_6 sai:

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
0 & -\frac{1}{i+1} - \frac{1}{j+1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
x_2 = 2 & -\frac{1}{j+1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
x_4 = 2 & -\frac{1}{i+1} - \frac{1}{j+1} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
x_3 = 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

Como $\bar{c}_1 < 0$, a direção básica associada a $j = 1$ é de descida, mas como $u \leq 0$, essa direção básica é ilimitada, mostrando que o problema original tem valor ótimo $-\infty$.