BMAC / IME / USP – MAC-315 – Terceira Prova – 1/12/2011

Nome:________________ **Assinatura:**________________ **Nº USP:** ☐☐☐☐☐ i ☐ j ☐

Instruções: Enuncie claramente os argumentos, hipóteses e conclusões. Escreva as expressões literais antes de fazer cada conta (por exemplo $x_B = B^{-1}b$, $\bar{c}_j = c_j - c'_B B^{-1} A^j$, $p' = c'_B B^{-1}$, $d_B = -B^{-1}A^j$, etc). Esquemas e fórmulas sem explicações textuais não serão aceitos. Os valores de i e j usados na questão 2 são os dois últimos dígitos do seu número USP. Você deve substituí-los antes de resolver esta questão.

$\boxed{\textbf{Questão 1}}$ (3 pontos) Na definição de dualidade tratamos as restrições envolvendo A e b de forma diferente das restrições de sinal. Em particular, um problema da forma

$$(P) \begin{cases} \min & c'x \\ \text{s.a} & Ax \leq b, \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

era reformulado como $\min_{x\geq 0} \max_{p\leq 0} c'x + p'(b - Ax)$. Seria possível tratar as restrições de sinal de forma análoga às demais, introduzindo termos de penalização correspondentes na função objetivo:

$$\text{(min-max)} \begin{cases} \min_{x\in\mathbf{R}^n} \max_{\substack{p\leq 0 \\ q\geq 0}} c'x + p'(b - Ax) + q'(0 - x) \end{cases}$$

a) Mostre que o problema (min-max) acima é equivalente ao problema (P) original.
Dica: considere a função $h(x) = \max_{\substack{p\leq 0 \\ q\geq 0}} c'x + p'(b - Ax) + q'(0 - x)$.

b) Mostre que o dual dessa formulação, dado por

$$\max_{\substack{p\leq 0 \\ q\geq 0}} \min_{x\in\mathbf{R}^n} c'x + p'(b - Ax) + q'(0 - x)$$
$$|||$$
$$\max_{\substack{p\leq 0 \\ q\geq 0}} \min_{x\in\mathbf{R}^n} p'b + (c' - p'A - q')x$$

é equivalente ao dual de (P) de acordo com a definição original.

a) Vamos mostrar que $h(x) = \begin{cases} c'x & \text{se } Ax \leq b,\ x \geq 0 \\ +\infty & \text{caso contrário} \end{cases}$.

Suponha que x satisfaz $Ax \leq b$, $x \geq 0$. Nesse caso, $\forall p \leq 0$ e $\forall q \geq 0$ teremos que $p'(b - Ax) + q'(0 - x) \leq 0$, sendo que o máximo dessa expressão é atingido quando $p = 0$ e $q = 0$. Logo

$$h(x) = \max_{\substack{p\leq 0 \\ q\geq 0}} c'x + p'(b - Ax) + q'(0 - x) = c'x + \max_{\substack{p\leq 0 \\ q\geq 0}} p'(b - Ax) + q'(0 - x) = c'x.$$

Por outro lado, se x viola alguma restrição, verificamos que o máximo acima vale $+\infty$, pois

1. *se $A_i x > b_i$ para algum i, então podemos construir uma sequência que leva a expressão do* max *para $+\infty$, tomando $p_i \to -\infty$ e $p_j = 0$, $\forall j \neq i$, e $q = 0$.*
2. *se $x_i < 0$ para algum i, então tomando $p = 0$ e $q_i \to +\infty$, $q_j = 0$, $\forall j \neq i$, construimos uma sequência que leva o* max *da expressão que define $h(x)$ para $+\infty$.*

Assim, o problema (min-max) $\min_{x\in\mathbf{R}^n} h(x)$ é equivalente ao problema (P).

b) O dual de (P) segundo a definição original é (D) $\left\{\begin{array}{ll} \max & p'b \\ s.a & A'p \leq c \\ & p \leq 0 \end{array}\right.$.

Considere a função $g(p,q) = \min_{x \in \mathbf{R}^n} p'b + (c' - p'A - q')x$. *Vamos mostrar que* $g(p,q) = \left\{\begin{array}{ll} p'b & \textit{se } A'p + q = c \\ -\infty & \textit{caso contrário} \end{array}\right.$. *Suponha que* $A'p + q = c$*; então* $c' - p'A - q' = 0$*, e portanto*

$$g(p,q) = \min_{x \in \mathbf{R}^n} p'b + (c' - p'A - q')x = p'b + \min_{x \in \mathbf{R}^n} 0'x = p'b.$$

Por outro lado, se $c_i - p'A^i - q_i \neq 0$ *para algum* i*, podemos levar o* min *da definição de* $g(p,q)$ *para* $-\infty$*, tomando* $x_i \to \pm\infty$ *e* $x_j = 0$, $\forall j \neq i$*; escolheremos o sinal de* x_i *contrário ao da expressão* $c_i - p'A^i - q_i$*, de tal forma que*

$$\lim p'b + (c' - p'A - q')x = p'b + \lim (c_i - p'A^i - q_i)x_i = -\infty.$$

Logo o problema $\max_{\substack{p \leq 0 \\ q \geq 0}} g(p,q)$ *é equivalente a (D)* $\left\{\begin{array}{ll} \max & p'b \\ s.a & A'p + q = c \\ & p \leq 0 \\ & q \geq 0 \end{array}\right.$ *que por sua vez é equivalente ao problema (D), interpretando o vetor* q *como variáveis de folga.*

Questão 2 (4 pontos) Considere o (PLC) $\min c'x$ s.a $Ax = b,\ x \geq 0$, onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \overset{-i-j-2}{\boxed{}} \\ \overset{i+j+3}{\boxed{}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad c = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Verifique se a base $\{x_3, x_4\}$ possui viabilidade primal e/ou viabilidade dual, e aplique o simplex tabular correspondente (primal ou dual) a partir desta base.

b) Substituindo b por $\begin{bmatrix} \overset{-i-j-2}{\boxed{}} \\ \overset{i+j+1}{\boxed{}} \end{bmatrix}$, verifique se a base obtida no item (a) preserva viabilidade primal e/ou viabilidade dual, e aplique o simplex correspondente para o novo problema a partir daquela base. Dica: B^{-1} está no tableau.

c) Substituindo c por $(-1, 1, 0, 0)'$, verifique se a base obtida no item (b) preserva viabilidade primal e/ou viabilidade dual, e aplique o simplex correspondente para o novo problema a partir daquela base. Dica: $p' = (0, 1)$ no cálculo dos novos custos reduzidos.

Observação importante: sequências de tableaux sem explicação textual ou sem conclusão textual não serão considerados. Escreva as fórmulas literais antes de recalcular os tableaux nos itens (b) e (c).

a) Temos $B = I$ e portanto $x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} -i-j-2 \\ i+j+3 \end{bmatrix} \not\geq 0$, que é inviável primal. Além disso, $c_B = 0$, logo $\bar{c}' = c' - c'_B B^{-1}A = c' = (2, 1, 0, 0) \geq 0$, que é viável dual. Assim podemos aplicar o simplex dual.

0	2	1	0	0
x_3 =-i-j-2	-1	$\boxed{-1}$	1	0
x_4 =i+j+3	-1	1	0	1

$x_3 < 0$ sai da base
x_2 entra pois é o $\min_{v_i<0} \frac{\bar{c}_i}{|v_i|}$

-i-j-2	1	0	1	0
x_2 =i+j+2	1	1	-1	0
x_4 =1	-2	0	1	1

Tableau ótimo (pois $x_B \geq 0$)
Solução ótima: $x^* = (0, i+j+2, 0, 1)'$
Valor ótimo: i+j+2

b) Com o novo vetor b temos $x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i-j-2 \\ i+j+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i+j+2 \\ -1 \end{bmatrix} \not\geq 0$ que é inviável (primal). Como $\bar{c}$ não depende de b, a base $\{x_2, x_4\}$ permanece viável dual e podemos aplicar o simplex dual:

-i-j-2	1	0	1	0
$x_2 =$i+j+2	1	1	-1	0
$x_4 =$-1	$\boxed{-2}$	0	1	1

$x_4 < 0$ sai da base
x_1 entra (é o único com $v_i < 0$)

-i-j-2.5	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
$x_2 =$i+j+1.5	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$x_1 = \frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Tableau ótimo (pois $x_B \geq 0$)
Solução ótima: $x^* = (\frac{1}{2}, i+j+1.5, 0, 0)'$
Valor ótimo: i+j+2.5

c) Com o novo vetor c temos $c'_B = (1, -1)$ e $B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, logo $p' = c'_B B^{-1} = [1 \ -1] \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = [0 \ 1]$. Assim

$$\begin{aligned} \bar{c}_3 &= c_3 - p'A^3 = 0 - [0 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\ \bar{c}_4 &= c_4 - p'A^4 = 0 - [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 < 0 \end{aligned}$$

Assim a base perde viabilidade dual, mas não primal (pois x_B não depende de c), e portanto podemos aplicar o simplex primal.

-i-j-1	0	0	0	-1
$x_2 =$i+j+1.5	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$
$x_1 = \frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

x_4 entra na base (pois $\bar{c}_4 < 0$)
x_2 sai (é o único com $u_i > 0$)

i+j+2	0	2	-1	0
$x_4 =$2i+2j+3	0	2	-1	1
$x_1 =$i+j+2	1	1	1	0

Tableau ilimitado!
$\bar{c}_3 < 0$ indica que a direção básica d associada é de descida, enquanto $u \leq 0$ indica que $x + \alpha d$ é viável para qualquer $\alpha \geq 0$
Valor ótimo: $-\infty$

Questão 3 (3 pontos) Considere um (PLC) com uma única restrição de igualdade:

$$(PLC)\begin{cases} \min & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \text{s.a} & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b, \\ & x \geq 0, \end{cases}$$

e suponha que $b > 0$, $c > 0$ e que $a \not\geq 0$ e $a \not\leq 0$ (ou seja, a possui componentes positivas e negativas).

a) Escreva o dual deste (PLC), exibindo separadamente cada restrição.

b) Mostre que o conjunto viável dual é um segmento de reta, e determine a solução ótima dual. Dica: considere separadamente os casos $a_i > 0$ e $a_i < 0$.

c) Escreva as condições de folgas complementares usando a solução ótima dual.

d) Use as condições do item (c) para obter uma solução primal, e mostre que a solução obtida é ótima no primal.

a) O dual do (PLC) é

$$\begin{cases} \max p'b = pb & \\ s.a & A'p \leq c \equiv \begin{array}{l} a_1 p \leq c_1 \\ a_2 p \leq c_2 \\ \vdots \\ a_n p \leq c_n \end{array} \\ & p \in \mathbb{R} \end{cases}$$

b) O sistema $\{a_i p \leq c_i\}_{i=1}^{n}$ *é equivalente a*

$$\begin{array}{ll} p \leq \frac{c_i}{a_i} & \forall a_i > 0 \\ p \geq -\frac{c_i}{a_i} & \forall a_i < 0 \end{array}$$

(observando que se $a_i = 0$ *então a restrição* $a_i p = 0 \leq c_i$ *é automaticamente satisfeita). Logo o poliedro dual é*

$$\left\{ p \in \mathbb{R} \mid \max_{a_i<0} \left\{ -\frac{c_i}{a_i} \right\} \leq p \leq \min_{a_i>0} \left\{ \frac{c_i}{a_i} \right\} \right\},$$

que é um segmento de reta. Como $b > 0$*, o problema* $\max pb$ *vai selecionar o extremo superior do intervalo, ou seja,* $p^* = \min_{a_i>0} \left\{ \frac{c_i}{a_i} \right\}$*, com valor ótimo* $p^* b$*.*

c) As condições de folgas complementares para este problema são

$$(FC)\begin{cases} p(b - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i) = 0 & \\ x_i(c_i - a_i p) = 0 & i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Substituindo $p^* = \min_{a_i>0} \left\{ \frac{c_i}{a_i} \right\} > 0$ *teremos que o sistema se reduz a*

$$(FC)\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b & \\ x_i = 0 & \textit{se } a_i p^* \neq c_i \ (\textit{em particular } \forall a_i \leq 0) \end{cases}$$

d) O sistema do item (c) é equivalente a $x_i = 0$, $\forall i$ *t.q.* $a_i p^* \neq c_i$ *e* $\sum_{i=1}^n a_i x_i = b$. *Seja* k *um índice qualquer que realiza o* min *da definição de* p^* *(ou seja, tal que* $p^* = \frac{c_k}{a_k}$ *com* $a_k > 0$*). Definindo* $x_k = \frac{b}{a_k} > 0$ *e* $x_j = 0$, $\forall j \neq k$, *teremos que* x *verifica as condições de folgas complementares do item (c), é viável no (PLC) do enunciado (pois* $\sum_{i=1}^n a_i x_i = a_k x_k = a_k \frac{b}{a_k} = b$ *e* $x \geq 0$*) e, além disso, possui como valor de função objetivo* $c_k x_k = c_k \frac{b}{a_k} = p^* b$, *que é o valor ótimo dual. Isso garante que o vetor* x *assim construído é solução ótima do (PLC).*