

Nome: _____ Assinatura: _____ No USP: ☐☐☐☐☐☐☐

Instruções: A prova contém 5 questões, porém você só deve fazer 4 delas. Verifique que o caderno contém todas as questões, e leia atentamente os enunciados antes de iniciar a prova.

Indique na caixa a seguir qual das questões não deve ser corrigida:

☐

Cada questão vale 2.5 pontos, e a nota máxima é 10.0.

Escreva sempre as expressões literais antes de fazer cada conta (por exemplo $x_B = B^{-1}b$, $p' = c'_B B^{-1}$, $\bar{c}_j = c_j - c'_B B^{-1}A^j = c_j - p'A^j$, $\bar{c}' = c' - c'_B B^{-1}A$, $d_B = -B^{-1}A^j$, $u = B^{-1}A^j$, etc). Esquemas e fórmulas sem o acompanhamento de explicações textuais não serão corrigidos (terão valor 0).

Questão 1 Considere um problema na forma canônica descrito através do seguinte tableau:

	0	0	0	0	δ	3	γ	ε
$x_2 =$	β	0	1	0	α	1	0	3
$x_3 =$	2	0	0	1	-2	2	θ	-1
$x_1 =$	3	1	0	0	0	-1	2	1

Determine condições algébricas gerais sobre os parâmetros $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \theta$ que tornam as frases seguintes verdadeiras, justificando *sucintamente* o que a condição representa. Se o valor de algum parâmetro for irrelevante para a frase, você não precisa mencioná-lo, subentendendo que qualquer valor em $\mathbb{R}$ serve para aquele parâmetro. Cada item abaixo vale 0.5 ponto.

- Pode-se aplicar a fase 2 do simplex usando este tableau na primeira iteração.
- A solução básica correspondente é viável e a primeira iteração do simplex indica que o valor ótimo é $-\infty$ (ilimitação).
- A solução básica correspondente é viável, x_6 é candidato a entrar na base, e quando x_6 entrar, x_3 é a variável que deve sair.
- A solução básica correspondente é viável dual e inviável primal, e o simplex dual identifica a inviabilidade do problema primal.
- A solução básica correspondente é viável dual e inviável primal, x_2 é candidato a sair na base, e a pivotação obtida é dual-degenerada (solução dual e valor da função objetivo permanecem iguais).

Dica: Você não precisa fazer nenhuma pivotação do tableau, basta indicar as contas relevantes para verificar cada propriedade.

Questão 2 Considere o (PLC) $\min c'x$ s.a $Ax = b$, $x \geq 0$, onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad c = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- a) (1.0 ponto) Verifique se a base $\{x_3, x_4\}$ possui viabilidade primal e/ou viabilidade dual, e aplique o simplex tabular correspondente (primal ou dual) a partir desta base.
- b) (1.0 ponto) Substituindo b por $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, verifique se a base obtida no item (a) preserva viabilidade primal e/ou viabilidade dual, e aplique o simplex correspondente para o novo problema a partir daquela base. Dica: B^{-1} está no tableau do final do item (a).
- c) (0.5 ponto) Escreva as condições algébricas sobre c_1 e c_2 (supondo $c_3 = c_4 = 0$) para as quais a base obtida no final do item (b) permanece ótima.

Observação importante: sequências de tableaux sem explicação textual ou sem conclusão textual não serão considerados. Escreva as fórmulas literais antes de recalculer o tableau no item (b).

Questão 3 Considere um (PLC) com uma única restrição de igualdade:

$$(PLC) \left\{ \begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \text{s.a} & \sum_{i=1}^n a_i x_i = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \right.$$

e suponha que $b > 0$ e que $a \not\geq 0$ e $a \not\leq 0$ (ou seja, a possui componentes positivas e negativas).

- a) (0.5 ponto) Escreva o dual deste (PLC), exibindo separadamente cada restrição.
- b) (1.0 ponto) Mostre que o conjunto viável dual é um segmento de reta, e determine a solução ótima dual. Dica: considere separadamente os casos $a_i > 0$ e $a_i < 0$.
- c) (1.0 ponto) Use as condições de folgas complementares para obter uma solução primal, e mostre que a solução obtida é ótima.

Questão 4 Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica ($A = A'$), e $c \in \mathbb{R}^n$. Considere o

$$(PL) \begin{cases} \min & c'x \\ \text{s.a} & Ax \geq c \\ & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

- a) (1.0 ponto) Escreva o dual do (PL) e mostre que o conjunto viável do problema dual está contido no conjunto viável do (PL).
- b) (0.5 ponto) Enuncie detalhadamente o caso particular do teorema forte de dualidade para este par de problemas.
- c) (1.0 ponto) Mostre que se o (PL) admite solução ótima, então existe uma solução ótima x^* que satisfaz $x^* \geq 0$ e $Ax^* = c$.

Questão 5 Seja o

$$(PLC)_{\text{aux}} \begin{cases} \min & \sum_{i=1}^m y_i \\ \text{s.a} & Ax + Iy = b \\ & x, y \geq 0 \end{cases}$$

associado à fase I do método simplex, e suponha que a matriz A possui linhas l.i.

a) (0.5 ponto) Escreva o dual do $(PLC)_{\text{aux}}$.

b) (2.0 pontos) Mostre que existe uma base ótima para o $(PLC)_{\text{aux}}$ formada exclusivamente por variáveis x_i originais se, e somente se, $(0, 0, \dots, 0)'$ é solução ótima do dual do $(PLC)_{\text{aux}}$.

