

Nome: _____ Assinatura: _____ No USP:
i j k

Instruções: Os valores de i , j e k na questão 1 são os três últimos dígitos do seu número USP. Você deve substituí-los antes de resolver esta questão.

Atenção: enuncie todas as definições ou resultados utilizados (por exemplo $x_B = B^{-1}b$, $\bar{c}_j = c_j - c'_B B^{-1}A^j$, $d_B = -B^{-1}A^j$, etc).

Questão 1 (2+2 pontos) Modele os seguintes problemas usando programação linear, explicando o significado de cada variável e cada restrição introduzida no modelo. Você não precisa resolver os problemas.

a) Um mestre cervejeiro deseja produzir dois tipos de cerveja: clara e escura. Para isso ele dispõe de um estoque de malte, lúpulo e levedura, nas quantidades de 75 kg, 60 kg e 50 kg, respectivamente. Suas receitas para produção de cerveja especificam que cada barril de cerveja clara requer 2 kg de malte, 3 kg de lúpulo e 2 kg de levedura, enquanto o barril de cerveja escura requer 3 kg de malte, 1 kg de lúpulo e 2 kg de levedura. Considerando que cada barril de cerveja clara é vendido a R\$ 8.000,00 e cada barril de cerveja escura é vendido a R\$ 7.000,00, ajude o mestre cervejeiro a maximizar sua receita (supondo que ele consiga vender toda a cerveja que produzir).

O problema do cervejeiro é uma instância em particular do problema de produção das notas de aula, e consiste em determinar as quantidades de barris de cerveja clara (x_1) e escura (x_2) que deve produzir, sendo portanto essas as suas variáveis de decisão. As receitas trazem as quantidades de cada matéria-prima (malte, lúpulo e levedura) necessária para cada barril de cada tipo de cerveja (supostamente a água nesse exemplo não custaria nada e estaria disponível em quantidade ilimitada): assim a produção das quantidades x_1 e x_2 de barris dos dois tipos de cerveja consumirá $2x_1 + 3x_2$ kg de malte, $3x_1 + x_2$ kg de lúpulo e $2x_1 + 2x_2$ kg de levedura, valores estes restritos aos estoques disponíveis (de 75, 60 e 50 kg respectivamente). O objetivo do cervejeiro é maximizar o dinheiro arrecadado, que corresponde à expressão $8000x_1 + 7000x_2$. Logo o modelo de programação linear será

$$\begin{cases} \max & 8000x_1 + 7000x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 75 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 60 \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 50 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

b) Um produtor musical precisa planejar um show para uma banda, e isso depende da articulação de várias atividades, cada uma das quais requer um certo tempo para executar: A = encontrar lugar para o show (3 dias), B = encontrar um engenheiro de som (2 dias), C = contratar uma banda de abertura (6 dias), D = preparar propagandas em rádio, TV e web (2 dias), E = preparar o sistema de bilheteria (3 dias), F = alugar/preparar equipamento de som (3 dias), G = imprimir cartazes e flyers (5 dias), H = preparar transporte (1 dia), I = ensaios (2 dias), J = detalhes de última hora (2 dias). Algumas atividades podem ser feitas em paralelo, porém algumas atividades

são pré-requisitos de outras: A precisa ser concluída antes de B, C e E; B precisa ser concluída antes de F; C precisa ser concluída antes de D, G e H; F e H precisam ambas ser concluídas antes de I; e I precisa ser concluída antes de J. Ajude o produtor musical a estimar o tempo mínimo necessário para executar seu planejamento. Dica: considere como variáveis de decisão o início de cada uma das 10 atividades planejadas.

O tempo necessário é dado pela diferença entre o instante do fim da última tarefa e o início da primeira tarefa; podemos usar tempos relativos ao início, assim a primeira tarefa será iniciada no instante 0 e a última tarefa terminará no instante T que desejamos minimizar. As restrições que correspondem às atividades pré-requisito podem ser escritas usando as variáveis T_X ($X \in \{A, B, \dots, J\}$) que representam o instante de início da atividade X e as durações d_X conhecidas para essas atividades. Assim por exemplo a restrição de que A (que inicia em T_A e dura $d_A = 3$ dias) precisa ser concluída antes de B, C e E será representada pelas três restrições $T_A + 3 \leq T_B$, $T_A + 3 \leq T_C$ e $T_A + 3 \leq T_E$, e analogamente para todas as condições similares. A variável T a ser minimizada está restrita por $T \geq T_X + d_X$, $\forall X$ onde $T_x + d_X$ são os instantes de fim das diversas atividades. Finalmente, nenhuma atividade pode iniciar antes do instante 0 ($T_x \geq 0$, $\forall X$). O modelo portanto será

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad T \\ \text{s.a} \quad T_A + 3 \leq T_B, \quad T_A + 3 \leq T_C, \quad T_A + 3 \leq T_E, \quad T_B + 2 \leq T_F, \quad T_C + 6 \leq T_D, \\ \quad T_C + 6 \leq T_G, \quad T_C + 6 \leq T_H, \quad T_F + 3 \leq T_I, \quad T_H + 1 \leq T_I, \quad T_I + 2 \leq T_J, \\ \quad T_A + 3 \leq T, \quad T_B + 2 \leq T, \quad T_C + 6 \leq T, \quad T_D + 2 \leq T, \quad T_E + 3 \leq T, \\ \quad T_F + 3 \leq T, \quad T_G + 5 \leq T, \quad T_H + 1 \leq T, \quad T_I + 2 \leq T, \quad T_J + 2 \leq T \\ \quad T_A \geq 0, \quad T_B \geq 0, \quad T_C \geq 0, \quad T_D \geq 0, \quad T_E \geq 0, \\ \quad T_F \geq 0, \quad T_G \geq 0, \quad T_H \geq 0, \quad T_I \geq 0, \quad T_J \geq 0 \end{array} \right.$$

Questão 2 (6*0,5 pontos) Considere o problema de programação linear

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad -x_1 \quad -x_2 \quad -x_3 \\ \\ \text{s.a} \quad \boxed{} x_1 \quad + \boxed{} x_3 \leq \boxed{} \\ \quad \quad \quad k+1 \quad \quad \quad i+1 \quad \quad (i+1)(k+1) \\ \\ \quad \quad \quad \boxed{} x_2 \quad + \boxed{} x_3 \leq \boxed{} \\ \quad \quad \quad k+1 \quad \quad \quad j+1 \quad \quad (j+1)(k+1) \\ \\ \quad \quad \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

1. Passe o problema acima para a forma canônica. Use $x_4, x_5, \dots$ para as variáveis novas introduzidas.

O problema na forma canônica fica

$$\begin{cases} \min & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ \text{s.a} & (k+1)x_1 & & +(i+1)x_3 + x_4 = (i+1)(k+1) \\ & & (k+1)x_2 & +(j+1)x_3 + x_5 = (j+1)(k+1) \\ & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

2. Construa a solução básica associada às variáveis básicas x_4 e x_5 .

A solução básica associada a x_4, x_5 deverá ter $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ e resolver o sistema de equações reduzido às variáveis x_4, x_5 , cuja solução única será $x_4 = (i+1)(k+1)$ e $x_5 = (j+1)(k+1)$. Como $x_4, x_5 \geq 0$ esta solução básica é viável (um vértice).

3. Compute os custos reduzidos $\bar{c}_j$ e use-os para dizer se a solução do item 2 é ou não ótima.

Sabemos que $\bar{c}_4 = \bar{c}_5 = 0$ pois estas são as variáveis básicas. Para as demais, calculando $p' = c'_B B^{-1} = [0 \ 0]I = 0$ teremos $\bar{c}_i = c_i$ para $i = 1, 2, 3$, ou seja, $\bar{c} = (-1, -1, -1, 0, 0)$. Como $\bar{c} \not\geq 0$ temos que a solução do item 2 não é ótima.

4. Construa a direção básica d associada à entrada da variável x_1 na base.

Essa direção d é definida pelas condições $d_1 = 1$ (variável a entrar na base), $d_2 = d_3 = 0$ (demais variáveis que permanecerão não-básicas) e $d_B = \begin{bmatrix} d_4 \\ d_5 \end{bmatrix} = -B^{-1}A^1 = -I \begin{bmatrix} k+1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k-1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

5. Calcule (pela fórmula ou por construção direta) o maior tamanho de passo θ^* possível a partir da solução do item 2 na direção do item 4, bem como a nova solução $x + \theta^*d$.

O maior θ^ possível será obtido no ponto da semi-reta $x + \theta d$ em que a variável $x_{b_1} = x_4$ se anula, ou seja, quando $x_4 + \theta^*d_4 = (i+1)(k+1) + \theta^*(-k-1) = 0 \iff \theta^* = (i+1)$. A nova solução será $x + \theta^*d = (0, 0, 0, (i+1)(k+1), (j+1)(k+1))' + (i+1) * (1, 0, 0, -k-1, 0)' = (i+1, 0, 0, 0, (j+1)(k+1))'$.*

6. Mostre que a solução do item 5 é adjacente à do item 2.

A adjacência pode ser vista tanto pela presença de $n-1 = 4$ restrições ativas l.i. comuns ($x_2 = 0, x_3 = 0$ além das duas restrições do sistema $Ax = b$) como através da adjacência das bases que correspondem às soluções (a solução do item 2 está associada à base $\{4, 5\}$ e a do item 5 à base $\{1, 5\}$, que possuem $m-1 = 1$ índice em comum).

Questão 3 (0,5+0,5+2 pontos) Sendo $X \subseteq \mathbb{R}^n$, denote por $\mathcal{C}(X)$ o casco convexo de X , definido como

$$\mathcal{C}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^K \lambda_i x^i \mid K \in \mathbb{N}, x^i \in X, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^K \lambda_i = 1 \right\}$$

Sendo $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ quaisquer, mostre que

1. $X \subseteq \mathcal{C}(X)$

Basta notar que para qualquer $x \in X$ temos $x = \sum_{i=1}^K \lambda_i x^i$ fazendo $K = 1$, $x^1 = x$ e $\lambda_1 = 1$, de onde $x \in \mathcal{C}(X)$.

2. se $X \subseteq Y$ então $\mathcal{C}(X) \subseteq \mathcal{C}(Y)$

Seja $x = \sum_{i=1}^K \lambda_i x^i \in \mathcal{C}(X)$ qualquer; como $x^i \in X \subseteq Y$, segue que $x = \sum_{i=1}^K \lambda_i x^i \in \mathcal{C}(Y)$, o que prova a inclusão.

3. $\mathcal{C}(\mathcal{C}(X)) = \mathcal{C}(X)$

Por (1) e (2) segue imediatamente que $\mathcal{C}(\mathcal{C}(X)) \supseteq \mathcal{C}(X)$. Para provar a inclusão contrária, considere $x \in \mathcal{C}(\mathcal{C}(X))$ qualquer; queremos mostrar que $x \in \mathcal{C}(X)$. Pela definição, $x = \sum_{i=1}^K \lambda_i x^i$ para $K \in \mathbb{N}$, $x^i \in \mathcal{C}(X)$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^K \lambda_i = 1$. Cada $x^i \in \mathcal{C}(X)$ por sua vez pode ser escrito como $x^i = \sum_{j=1}^{K_i} \lambda_{ij} x^{ij}$ para $K_i \in \mathbb{N}$, $x^{ij} \in X$, $\lambda_{ij} \geq 0$, $\sum_{j=1}^{K_i} \lambda_{ij} = 1$. Assim,

$$x = \sum_{i=1}^K \lambda_i x^i = \sum_{i=1}^K \lambda_i \sum_{j=1}^{K_i} \lambda_{ij} x^{ij} = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{K_i} \lambda_i \lambda_{ij} x^{ij},$$

mostrando que x é uma combinação linear de $\sum_{i=1}^K K_i$ elementos $x^{ij} \in X$. Além disso $\lambda_i \lambda_{ij} \geq 0$, $\forall i, j$ e

$$\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{K_i} \lambda_i \lambda_{ij} = \sum_{i=1}^K \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{K_i} \lambda_{ij} \right) = \sum_{i=1}^K \lambda_i * 1 = 1,$$

o que mostra que x é uma combinação convexa de elementos de X , de onde $x \in \mathcal{C}(X)$. Isso mostra que $\mathcal{C}(\mathcal{C}(X)) \subseteq \mathcal{C}(X)$, completando a prova.