15/08/2013

Exemplos

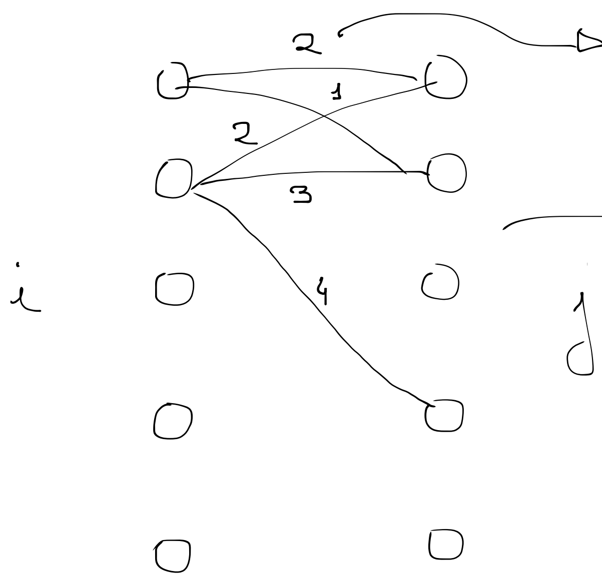
Programa linear:
$$\boxed{\max \underbrace{\sum c_i}_{\text{custos/ganhos}} x_i} \to \text{variáveis de decisão}$$

função objetivo

com restrições:
$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

onde $x_i \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$

Problema de emparelhamento



c_{ij} = ganho se i casar com j

$$x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ casou com } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

↓ minha decisão

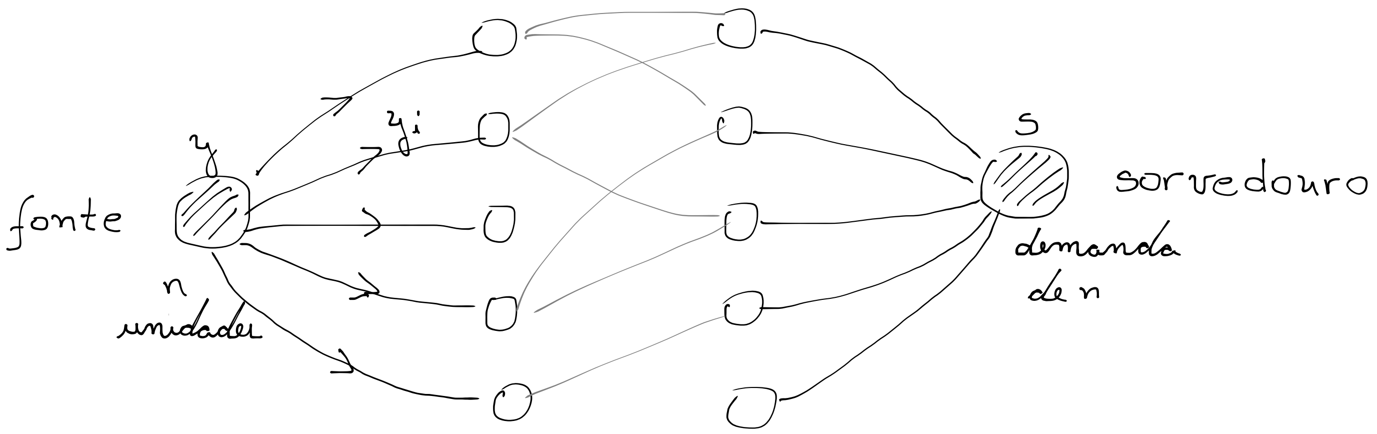
$$\max \sum c_{ij} x_{ij}$$

com $\sum_j x_{ij} = 1$, para todo i

$\sum_i x_{ij} = 1$, para todo j

$x_{ij} \geq 0$, $x \in \mathbb{N}$

Podemos inserir "nós fantasmas" (artificiais) para facilitar a formulação:

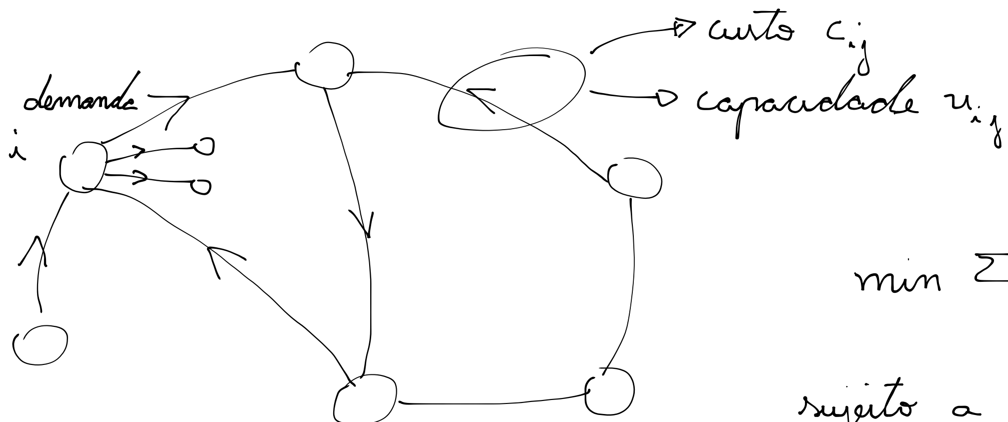


$$\max \sum c_{ij} x_{ij} \;, \text{ com } \sum_j x_{ij} = y_i$$

$$\sum_i x_{ij} = s_j \qquad \text{e} \qquad \sum s_j = n, \quad \sum y_i = n$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \,, \; y_i \geq 0 \,, \; s_j \geq 0$$

Problema de fluxos em redes



$$\min \sum c_{ij} x_{ij}$$

sujeito a $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$

demanda $\equiv \sum x_{ij} - \sum x_{ji} = d_i$

Problema do caixeiro viajante

Como passar por todos os vértices percorrendo a menor distância possível.

Na prática $\Rightarrow$ heurística

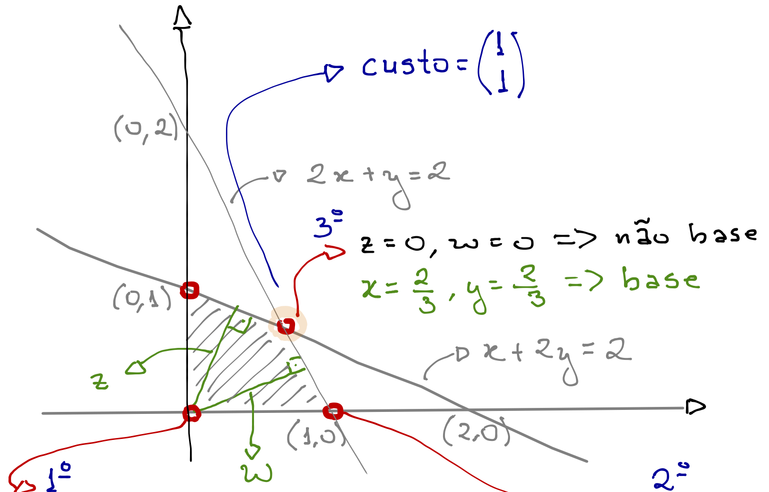
$$\min \sum x_{ij}\,, \quad \text{com} \quad \sum_j x_{ij} \geq 1 \quad \text{e} \quad \sum_i x_{ij} \geq 1$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{relaxamento}} \quad 0 \leq x_{ij} \leq 1$$

20/08/2013

Método simplex (1947)

Geometria



1°

$x=0,\ y=0 \Rightarrow$ não base

$z=2,\ w=2 \Rightarrow$ base

2°

$y=0,\ w=0 \Rightarrow$ não base

$z=1,\ x=1 \Rightarrow$ base

Álgebra

$$\max\ x+y$$

$$\text{suj} \quad \begin{aligned} 2x+y &\leq 2 \\ -x+2y &\leq 2 \\ x,y &\geq 0 \end{aligned}$$

1. Transformar desigualdades em igualdades.

$$\max\ x+y$$

$$\text{suj} \quad \begin{aligned} 2x+y+w &= 2 \\ x+2y + z &= 2 \\ x,y,z,w &\geq 0 \end{aligned}$$

2. Escolher $\begin{cases} \text{um } \underbrace{\text{vértice}}_{\text{geometria}} \text{ inicial} \\ \text{uma } \underbrace{\text{base}}_{\text{álgebra}} \text{ inicial} \end{cases}$

$$\max \; x + y$$

$$\text{suj} \quad \begin{aligned} \boxed{w} &= 2 - \boxed{2x - y} \to x \leq 1 \\ \boxed{z} &= 2 - \boxed{x - 2y} \to x \leq 2 \end{aligned}$$

base — não base

$$x, y, z, w \geq 0$$

Reescrevendo as equações:

$$x = \boxed{1 - \frac{1}{2}y} - \frac{1}{2}w \quad \to y \leq 2$$

$$z = 2 - \left(1 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}w\right) - 2y =$$

$$= \boxed{1 - \frac{3}{2}y} + \frac{1}{2}w \quad \to y \leq \frac{2}{3} \Rightarrow \text{crítico}$$

$$x, y, z, w \geq 0$$

$$\max \left(1 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}w\right) + y = \max \left(1 + \underbrace{\frac{1}{2}y}_{\text{vale a pena aumentar o } y} - \frac{1}{2}w\right)$$

Agora, o y entra na base e z sai da base:

base

$$\boxed{y} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}w$$

$$\boxed{x} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}w\right) - \frac{1}{2}w =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}w$$

$$\max \; 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}w\right) - \frac{1}{2}w = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}w$$

não base

Portanto, $\max(x+y) = \frac{4}{3} \Rightarrow$ ponto ótimo $\begin{cases} z = 0, \quad w = 0 \\ x = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{2}{3} \end{cases}$

↪ Exemplo: $\max\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$

$$\text{suj}\quad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Reescrevendo o problema com as "variáveis de folga":

$$\max\ \underbrace{5x_1}_{} + 4x_2 + 3x_3$$

$x_1 \leq 2{,}5 \Rightarrow$ crítico

$$\text{suj}\quad \begin{aligned} x_4 &= \boxed{5 - 2x_1} - 2x_2 - x_3 \\ x_5 &= \boxed{11 - 4x_1} - x_2 - 2x_3 \quad \rightarrow x_1 \leq 2{,}75 \\ x_6 &= \boxed{8 - 3x_1} - 4x_2 - 2x_3 \quad \rightarrow x_1 \leq \tfrac{8}{3} = 2{,}67 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

↳ entra $x_1 \Rightarrow$ sai x_4 : $x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$

$$\max\ \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \underbrace{\frac{1}{2}x_3}_{} - \frac{5}{4}x_4$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \quad \rightarrow x_3 \leq 5 \\ x_5 &= \text{substituindo } x_1 \ldots = 1 + 5x_2 \qquad + 2x_4 \\ x_6 &= \text{substituindo } x_1 \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{4}x_4 \quad \rightarrow x_3 \leq 1 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

crítico

↳ entra $x_3 \Rightarrow$ sai x_6 : $x_3 = 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6$

$$\max\ 13 - 3x_2 - x_4 - x_6$$

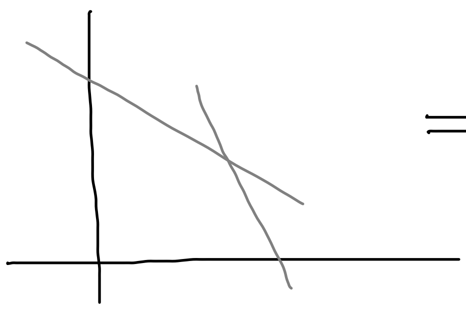
acabou! $\Rightarrow x_2 = x_4 = x_6 = 0$

$$\begin{aligned} x_1 &\overset{\ldots}{=} 2 - 2x_2 - 2x_4 + x_6 &&\Rightarrow x_1 = 2 \\ x_5 &\overset{\ldots}{=} 1 + 5x_2 + 2x_4 &&\Rightarrow x_5 = 1 \\ x_3 &= 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6 &&\Rightarrow x_3 = 1 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

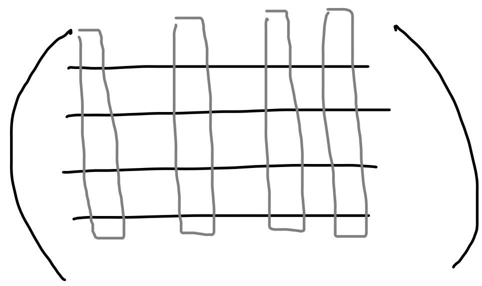
Portanto, o ponto ótimo é: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

22/08/2013

$$\begin{aligned}\min\ & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{suj}\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ & x_i \geq 0\end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned}\min\ & c^t x \\ \text{suj}\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0\end{aligned}$$



$\Longrightarrow$



$\Longrightarrow$ A

$$A = (B \mid N)$$

matriz base (quadrada)

matriz não base

Método Simplex (reduzido) $\Longrightarrow$ resolução de sistemas da forma

$$Bx = c$$

matriz base

vetores calculados a cada passo

$$A = (B \mid N) \qquad\qquad \max\ c_B^t x_B + c_N^t x_N$$

$$x = (x_B \mid x_N) \qquad\qquad \text{suj}\ \ Bx_B + Nx_N = b$$

$$c = (c_B \mid c_N) \qquad\qquad x_B, x_N \geq 0$$

(aula passada...)

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

$$c_B^t x_B + c_N^t x_N = c_B^t\left(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N\right) + c_N^t x_N =$$

$$= c_B^t B^{-1}b + \underbrace{\left(c_N^t - c_B^t B^{-1}N\right)}_{\text{custos reduzidos} = CR} x_N$$

Resolução de Sistemas Lineares

dimensão m = número de restrições

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

27/08/2013

Método Simplex Revisado

(Simplex com Matrizes e Vetores)

$$
\begin{array}{ll}
\max & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\text{suj} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\
 & 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11 \\
 & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{ll}
\max & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\text{suj} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\
 & 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 11 \\
 & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_6 = 8 \\
 & x_i \geq 0
\end{array}
$$

$$
\Longrightarrow
\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}}_{N}
\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X_N}
+
\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B \text{ (base)}}
\underbrace{\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}}_{X_B}
=
\underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}}_{b}
$$

$$
z = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}}_{C_N^t}
\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X_N}
\qquad
c^t = (\underbrace{5 \quad 4 \quad 3}_{c_N^t} \quad \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{c_B^t})
$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{ll} \max & C_N^t X_N \\ \text{suj} & B X_B + N X_N = b \Rightarrow X_B = B^{-1} b - B^{-1} N X_N \\ & X_B,\ X_N \geq 0 \end{array}$$

$\longrightarrow$

→ entra na base

$$\max \ \boxed{5x_1} + 4x_2 + 3x_3$$

$$\text{suj} \quad \begin{array}{lllll} x_4 & = & 5 & - \boxed{2x_1} - 3x_2 - x_3 & \longrightarrow x_1 \leqslant 2{,}5 \leftarrow \text{crítico} \\ x_5 & = & 11 & - \boxed{4x_1} - x_2 - 2x_3 & \longrightarrow x_2 \leqslant 2{,}75 \\ \underbrace{x_6}_{X_B} & = & \underbrace{8}_{B^{-1}b} & \underbrace{- \boxed{3x_1} - 4x_2 - 2x_3}_{B^{-1} N X_N} & \longrightarrow x_3 \leqslant 8/3 \approx 2{,}66 \end{array}$$

→ entra na base

$$\max \ z = \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \boxed{\frac{1}{3}x_3} - \frac{5}{2}x_4$$

$$\text{suj} \quad \begin{array}{lllll} x_1 & = & 5/2 & - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 & \longrightarrow x_3 \leqslant 5 \\ x_5 & = & 1 & + 5x_2 \qquad + 2x_4 & \\ x_6 & = & 1/2 & + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 & \longrightarrow \underbrace{x_3 \leqslant 1}_{\text{crítico}} \\ x_i \geqslant 0 \end{array}$$

$$\max \ c^t X = (C_B^t \mid C_N^t) \begin{pmatrix} X_B \\ \hline X_N \end{pmatrix} = $$
$$= C_B^t X_B + C_N^t X_N =$$
$$= \underbrace{C_B^t B^{-1} b}_{\frac{25}{2}} + \underbrace{(C_N^t - C_B^t B^{-1} N)}_{C_R \,=\, \left(-\frac{7}{2} \ \ \frac{1}{3} \ \ -\frac{5}{2}\right)} X_N$$

$$X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C_B = (5 \ 0 \ 0);$$

$$X_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad C_N = (4 \ 3 \ 0);$$

relativo ao problema original

$$N X_N + B X_B = \begin{pmatrix} 3x_2 + x_3 + x_4 \\ x_2 + 2x_3 \\ 4x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 4x_1 + x_5 \\ 3x_1 + x_6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_6 \end{pmatrix}$$

$$\max \quad z = \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}(1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6) - \frac{5}{2}x_4 = 13 - 3x_2 - x_4 - x_6$$

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}(1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6) - \frac{1}{2}x_4 = 2 - 2x_2 - 2x_4 + x_6$$

$$x_5 = 1 + 5x_2 + 2x_4$$

$$x_3 = 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6$$

$$x_i \geq 0$$

$$X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_3 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \quad c_B^t = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} ;$$

$$X_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_6 \end{pmatrix} ; \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad c_N^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

$$\max z = c^t X = (c_B^t \mid c_N^t) \begin{pmatrix} X_B \\ \hline X_N \end{pmatrix} = c_B^t X_B + c_N^t X_N = c_B^t (B^{-1} b - B^{-1} N X_N) + c_N^t X_N =$$

$$= \underbrace{c_B^t B^{-1} b}_{13} + \underbrace{(c_N^t - c_B^t B^{-1} N)}_{c_R = (-3 \;\; -1 \;\; -1)} X_N$$

Portanto, a solução é dada por $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 1$, onde $z = 13$.

29/08/2013

Vamos resolver o mesmo problema na forma matricial. isto é, com o Método Simplex Revisado.

$$\begin{array}{ll} \max & c^t x \\ \text{suj} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} , \quad \text{onde} \quad c^t = (c_B^t \mid c_N^t), \quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ \hline x_N \end{pmatrix} \text{ e } A = (B \mid N)$$

$$\max \quad \overbrace{(0 \;\; 0 \;\; 0)}^{c_B^t} \overbrace{\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}}^{x_B} + \overbrace{(5 \;\; 4 \;\; 3)}^{c_N^t} \overbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}^{x_N}$$

$$\text{suj} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}}_{x_B} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}}_{N} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x_N} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}}_{b}$$

$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N$

$$\max \quad c_B^t x_B + c_N^t x_N = c_B^t B^{-1} b + \underbrace{(c_N^t - c_B^t B^{-1} N)}_{c_R^t} x_N$$

$$\text{suj} \quad B x_B + N x_N = b$$

Simplex Revisado:

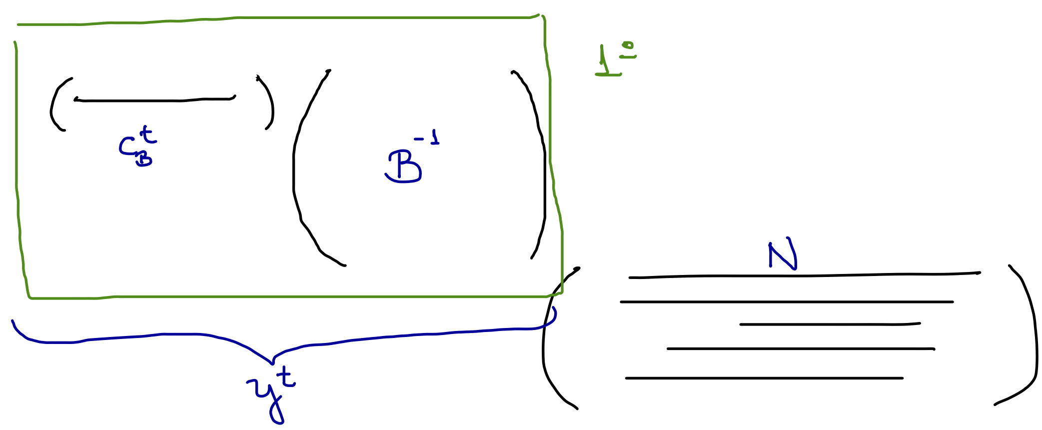
$$\max \quad c_B^t B^{-1} b + (c_N^t - c_B^t B^{-1} N) x_N$$

$$\text{suj} \quad x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N$$

$$x_B, x_N \geq 0$$

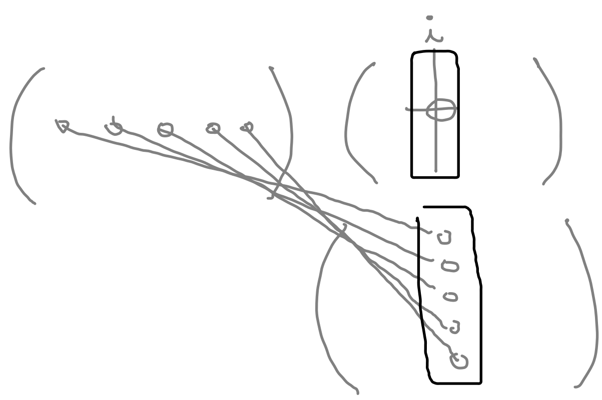
1. Calculo o custo reduzido $c_R^t = c_N^t - c_B^t B^{-1} N$
2. Se $(c_R)_i \leq 0$ terminou
3. Calculo a i-ésima coluna de $B^{-1}N$ e faço o "teste da razão" para decidir quem sai da base
4. Calculo a nova base e repito.

Queremos calcular $c_R^t = c_N^t - c_B^t B^{-1} N$



$$y^t = c_B^t B^{-1} = (B^{-1})^t c_B \Rightarrow B^t y = c_B$$

Calcular a i-ésima coluna de $B^{-1}N$:



$$p = B^{-1} N_i \Rightarrow B p = N_i$$

$\therefore$ a i-ésima coluna de $B^{-1}N$ é B^{-1} * i-ésima coluna de N

Como resolver: $Bp = N_i \implies B = LU \implies B^t = U^t L^t$

$$PB = LU \xrightarrow{\text{custa}} \frac{n^3}{3}$$

$$PBp = PN_i$$

$$L\underbrace{Up}_{a} = PN_i = v \implies \begin{cases} La = v \xrightarrow{\text{custa}} \dfrac{n^2}{2} \\ Up = a \xrightarrow{\text{custa}} \dfrac{n^2}{2} \end{cases}$$

Portanto, o custo da fatoração é o mais alto e uma vez fatorado B usamos a fatoração no cálculo de c_R e da i-ésima coluna de $B^{-1}N$.

10/09/2013

Método das Duas Fases

$$\max \; x_1 + x_2$$
$$\text{suj} \quad 2x_1 - x_2 \leq -10$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 20$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$\xrightarrow{\text{Problema}}$

$$x_3 = -10 - 2x_1 + x_2$$
$$x_4 = 20 - x_1 + 2x_2$$

não é uma base factível (se tomar $x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = -10$)

Solução: crio uma $\underbrace{\text{variável artificial}}$

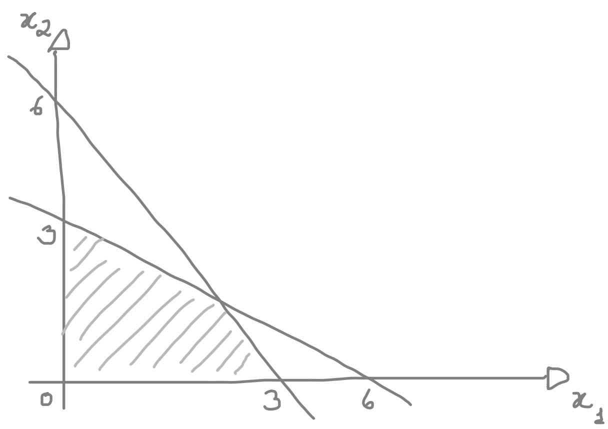
$$\min \; x_3$$
$$\text{suj} \quad 2x_1 - x_2 - x_3 = -10$$
$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 20$$
$$x_i \geq 0$$

$\Longrightarrow$

$$\min \; x_3$$
$$x_3 = 10 + 2x_1 - x_2$$
$$x_4 = 20 - x_1 + 2x_2$$
$$x_i \geq 0$$

2º Exemplo:

$$\max \; x_1 + x_2$$
$$\text{suj} \quad 2x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



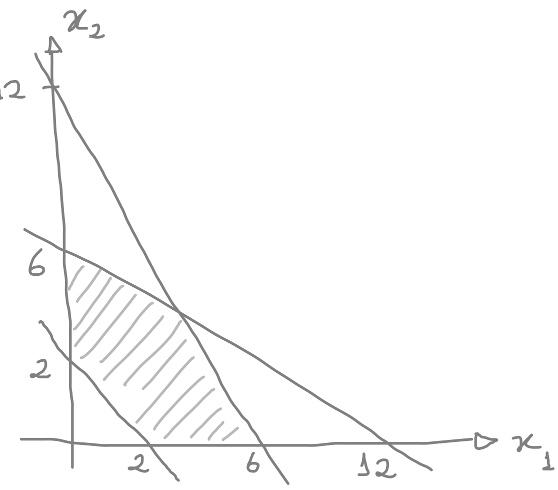
$$\max \; \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{suj} \; \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

onde $X_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $X_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2º Exemplo:

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + x_2 \\ \text{suj}\ & 2x_1 + x_2 \leqslant 12 \\ & x_1 + 2x_2 \leqslant 12 \\ & -x_1 - x_2 \leqslant -2 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$



Primeira fase: achar um vértice

$$\begin{aligned} \min\ & x_6 \\ \text{suj}\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 12 \\ & -x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & 2 \underbrace{- x_1} - x_2 + x_5 \\ \text{suj}\ & x_3 = 12 - 2\overset{\leq 6}{x_1} - x_2 \\ & x_4 = 12 - \overset{\leq 12}{x_1} - 2x_2 \\ & x_6 = 2 - \overset{\leq 2}{x_1} - x_2 + x_5 \ * \end{aligned}$$

$\xrightarrow[\text{na base}]{x_1 \text{ entra}}$

$$\begin{aligned} \max\ & 2 + x_5 \quad (x_1 + x_2) \\ \text{suj}\ & x_3 = 8 + x_2 - 2x_5 + \cancel{2x_6} \\ & x_4 = 10 - x_2 - x_5 + \cancel{x_6} \\ & x_1 = 2 - x_2 + x_5 - \cancel{x_6} \end{aligned}$$

17/09/2013

Dualidade

Cada problema de programação linear está associado a um outro chamado de dual.

problema primal (ou original)

$$\begin{aligned} \max\ & x + y \\ \text{suj}\ & 2x + y \leqslant 2 \\ & x + 2y \leqslant 2 \\ & x, y \geqslant 0 \end{aligned}$$

problema primal

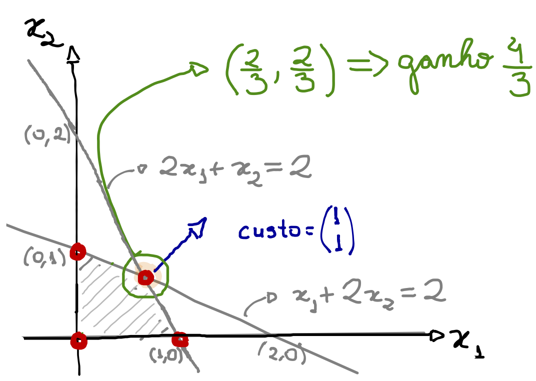
$$\begin{aligned} \max\ & c^t x \\ \text{suj}\ & Ax \leqslant b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ & x \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \; ;$$

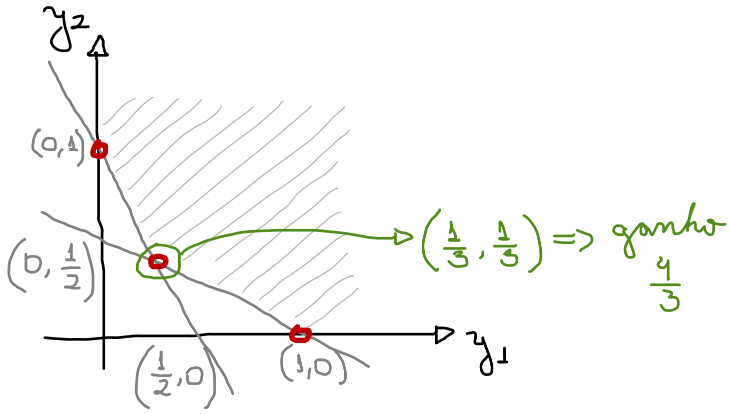
transposta

problema dual

$$\begin{aligned} \min\ & 2y_1 + 2y_2 \\ \text{suj}\ & 2y_1 + y_2 \geqslant 1 \\ & y_1 + 2y_2 \geqslant 1 \\ & y_1, y_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$



4 vértices



3 vértices

Se variarmos o problema, por exemplo mexendo a reta $2x_1 + x_2 = 2$:

$$2x_1 + x_2 = 2 + h \Rightarrow 2(2 - 2x_2) + x_2 = 2 + h \Rightarrow x_2 = \frac{2-h}{3}$$

$$x_1 + 2x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 2 - 2x_2 \qquad x_1 = \frac{4-2h}{3}$$

Logo, variando a reta de $h = 1$, temos um ganho de $\frac{1}{3}$.

Outro exemplo:

primal

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{suj}\ & x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leqslant 10 \\ & 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 \leqslant 15 \\ & x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{aligned}$$

dual

$$\begin{aligned} \min\ & 10y_1 + 15y_2 \\ \text{suj}\ & y_1 + 2y_2 \geqslant 1 \\ & 4y_1 + 7y_2 \geqslant 2 \\ & 5y_1 + 3y_2 \geqslant 3 \\ & y_1, y_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Relações entre o primal e o dual:

1- se o primal e o dual tem solução ótima, então o valor do ótimo nos dois problemas é o mesmo.

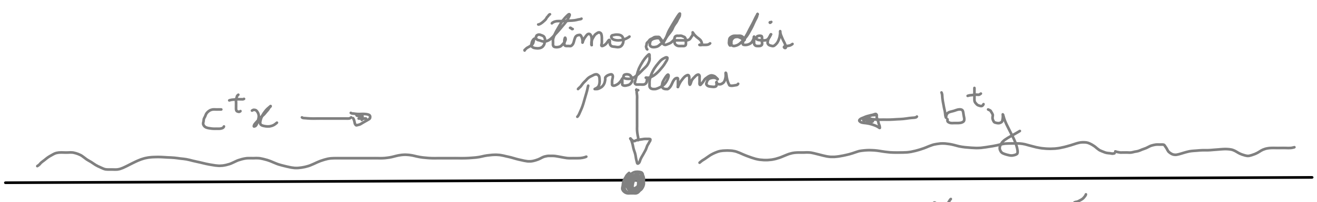
2- se o primal é ilimitado, então o dual não tem solução.

3- se o dual é ilimitado, então o primal não tem solução.

4- pode acontecer de nenhum dos dois ter solução.

5- se x é solução do primal e y é solução do dual, então $c^T x \leq b^T y$

VISUALIZAÇÃO



variações possíveis para o primal

$$\max\ c^t x \quad \text{suj } Ax \leq b,\ x \geq 0$$

variações possíveis para o dual

$$\min\ b^t y \quad \text{suj } A^t y \geq c,\ y \geq 0$$

Teorema: se x é solução do primal e y é solução do dual, então $c^T x \leq b^T y$ $\square$

Prova: $Ax \leq b$, $x \geq 0$ $\qquad$ $A^t y \geq c$, $y \geq 0$

$$Ax \leq b \Rightarrow x^t A^t \leq b^t \Rightarrow x^t A^t y \leq b^t y$$

$$A^t y \geq c \Rightarrow y^t A \geq c^t \Rightarrow y^t A x \geq c^t x$$

$$\text{mas} \quad x^t A^t y = \underbrace{\left[y^t (Ax)\right]}_{\text{é um número}}^t = y^t A x \implies b^t y \geq c^t x$$ ■

Teorema: se o primal e o dual tem solução ótima, então o valor do ótimo nos dois problemas é o mesmo.

$$c^t x^* = b^t y^*$$ □

Demonstração: método simplex

PRIMAL: $\begin{array}{l} \max c^t x \\ \text{suj } Ax \leq b \\ \quad x \geq 0 \end{array} \longrightarrow A = (B \mid N) \; ; \; x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \; ;$

$$Ax = b \implies Bx_B + Nx_N = b \implies x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N$$

$$c^t x = c_B^t x_B + c_N^t x_N = c_B^t B^{-1} b + (c_N^t - c_B^t B^{-1} N) x_N$$

no ótimo $\; r = c_N^t - c_B^t B^{-1} N \leq 0 \implies r^t = c_N - N^t (B^{-1})^t c_B \quad (i)$

DUAL: $\begin{array}{l} \min b^t y \\ \text{suj } A^t y \geq c \\ \quad y \geq 0 \end{array} \longrightarrow A^t y = \begin{pmatrix} B^t \\ N^t \end{pmatrix} y \geq \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix} \implies \begin{cases} B^t y \geq c_B \\ N^t y \geq c_N \end{cases} \quad (ii)$

Mas de $(i) \implies N^t (B^{-1})^t c_B \geq c_N$

logo, tomando $y^* = (B^{-1})^t c_B$, que é solução do primal, é uma solução viável do dual, pois pela (ii):

$$B^t y = B^t (B^{-1})^t c_B = c_B \geq c_B$$

Ganho associado a $y^* = (B^{-1})^t c_B$ no dual é

$$b^t y^* = b^t (B^{-1})^t c_B = c_B^t B^{-1} b = \text{ganho do primal}.$$

■

17/09/2013

Analogia da dualidade com o cálculo: multiplicadores de Lagrange

$$
\begin{array}{lll}
\max & 5x+4y+3z & = f(x,y,z) \\
\text{suj} & x^2+y^2+z^2=1 & = g_1(x,y,z) \\
& 4x+\quad 3z = 10 & = g_2(x,y,z)
\end{array}
$$

$$\nabla f = \underbrace{y_1}_{}\nabla g_1 + \underbrace{y_2}_{}\nabla g_2$$

multiplicadores de Lagrange

primal	dual
$\max\ c^t x$	$\min\ b^t y$
suj $Ax \leq b$	suj $A^t y \geq c$
$x \geq 0$	$y \geq 0$

multiplicadores de Lagrange

Obs.: A partir da solução ótima do primal é possível encontrar a solução ótima do dual.

a cada passo: $A = (B \mid N)$ $\quad$ $Ax = b \Rightarrow (B \mid N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = b$

$$X = \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$$

$$BX_B + NX_N = b$$

$$X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N$$

$$z = c^t X = c_B^t X_B + c_N^t X_N = c_B^t(B^{-1}b - B^{-1}NX_N) + c_N^t X_N$$

no ótimo $\quad c_N^t - c_B^t B^{-1} N \leq 0 \implies N^t (B^{-1})^t c_B \geq c_N$ //

Por outro lado, no dual:

$$
\begin{array}{ll}
\min & b^t y \\
\text{suj} & A^t y \geq c \\
& y \geq 0
\end{array}
\qquad A^t = \begin{pmatrix} B^t \\ N^t \end{pmatrix} \qquad A^t y \geq c \Rightarrow \begin{array}{l} B^t y \geq c_B \\ N^t y \geq c_N \end{array}
$$ //

no ótimo $\quad y^* = (B^{-1})^t c_B \Rightarrow N^t y^* = N^t (B^{-1})^t c_B \geq c_N$ //

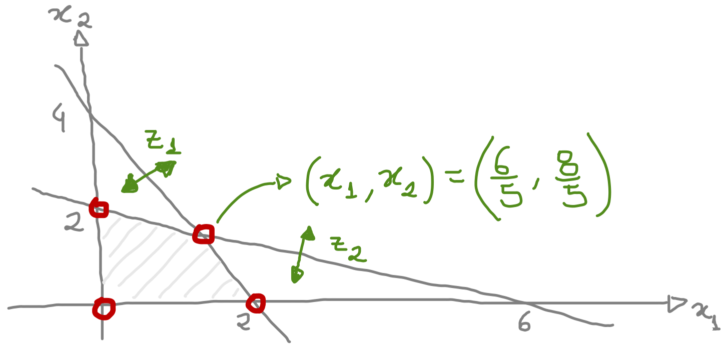
Logo, o ganho ótimo do primal: $c^t x^* = c_B^t x_B = c_B^t B^{-1} b =$ ($x_N = 0$ no ótimo)

$$= b^t (B^{-1})^t c_B = \underbrace{b^t y^*}_{\text{ganho ótimo do dual}}$$

Afinal, para que serve o dual?

primal:

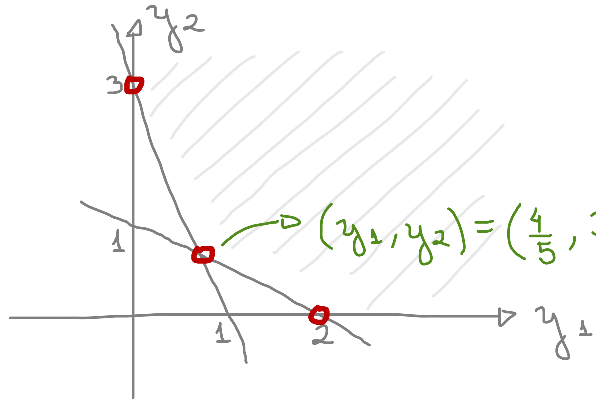
$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{suj} \quad & x_1 + 3x_2 \leq 6 + z_1 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 4 + z_2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Vale a pena variar uma das retas de ± 1 unidade?

dual:

$$\begin{aligned} \min \quad & 6y_1 + 4y_2 \\ \text{suj} \quad & y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ & 3y_1 + y_2 \geq 3 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Logo, variando as retas no primal, teremos:

$$\Delta\text{ganho} = y_1^* z_1 + y_2^* z_2 = \frac{4}{5} z_1 + \frac{3}{5} z_2$$

Então, neste exemplo, vale a pena fazer $z_1 = 1$ e $z_2 = -1$.

$x_B = B^{-1} b - B^{-1} N \cancel{x_N}$ ($= 0$ no ótimo)

$y^* = (B^{-1})^t c_B$

$\tilde{x}_B = B^{-1}(b + z)$

$$\leadsto \; c_B^t \tilde{x}_B = \underbrace{c_B^t B^{-1}}_{(y^*)^t} (b + z) = \underbrace{(y^*)^t b}_{\text{ganho antigo}} + \underbrace{(y^*)^t z}_{\text{variação do ganho}}$$

No exemplo, ganho $= c_B^t x^* = \frac{36}{5} = (y^*)^t b$.

Exemplo mais complicado:

$$\begin{array}{llll} \max & c^t x & & \\ \text{suj} & Ax \leq a & \to & u \\ & Bx = b & \to & v \\ & Dx \geq d & \to & w \\ & x \geq 0 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min & a^t u + b^t v + d^t w \\ \text{suj} & A^t u + B^t v + D^t w \geq c \\ & u \geq 0 \\ & v \text{ é irrestrito} \\ & w \leq 0 \end{array}$$

Obs.: o dual do dual é o primal.

24/09/2013

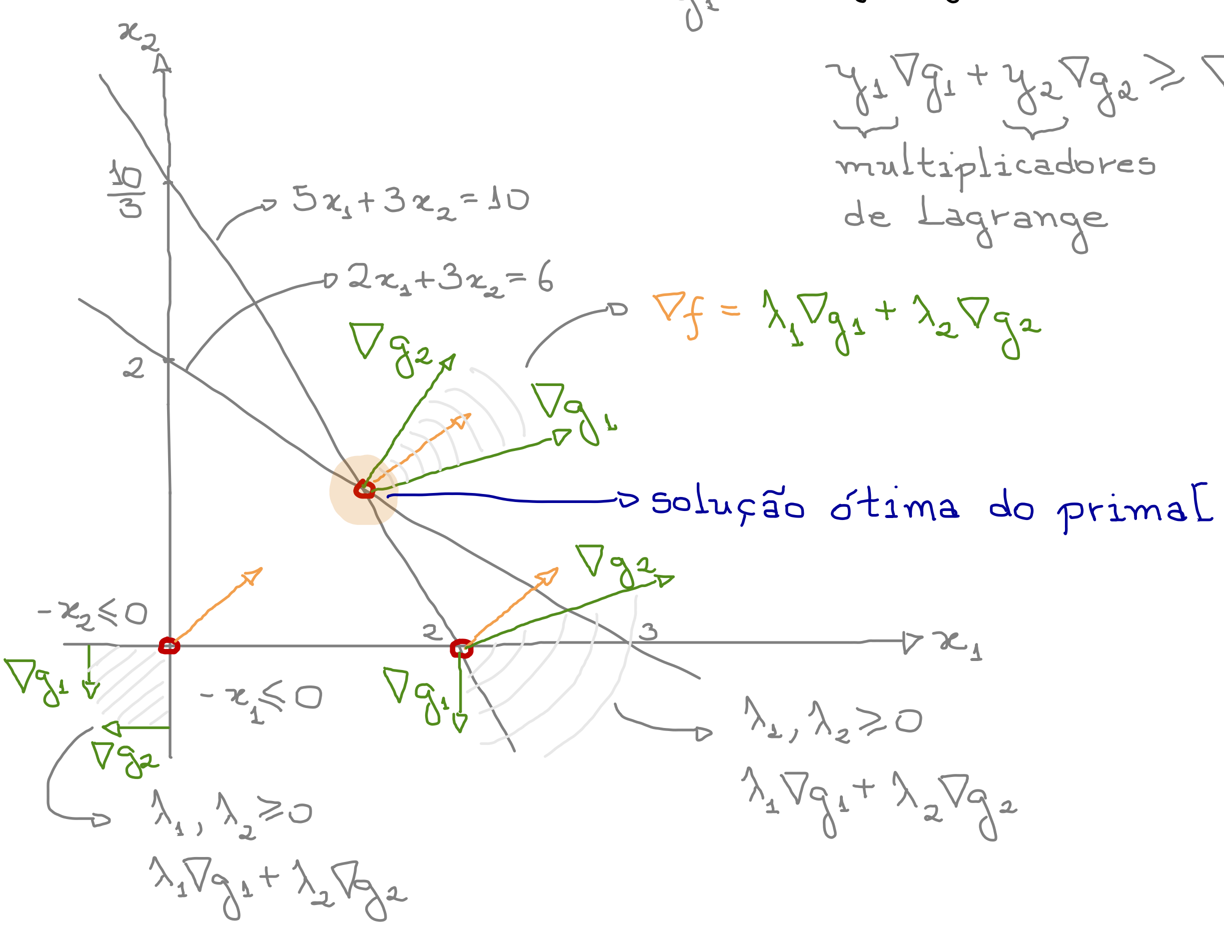
Dualidade: relação entre programação linear e não-linear

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{suj} & 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min & 6y_1 + 10y_2 \\ \text{suj} & \boxed{\begin{matrix}2\\3\end{matrix}}\, y_1 + \boxed{\begin{matrix}5\\3\end{matrix}}\, y_2 \geq \boxed{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}} \to \nabla f \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

∇g_1 ∇g_2

$$\underbrace{y_1}\nabla g_1 + \underbrace{y_2}\nabla g_2 \geq \nabla f$$

multiplicadores de Lagrange



regras para construção do dual

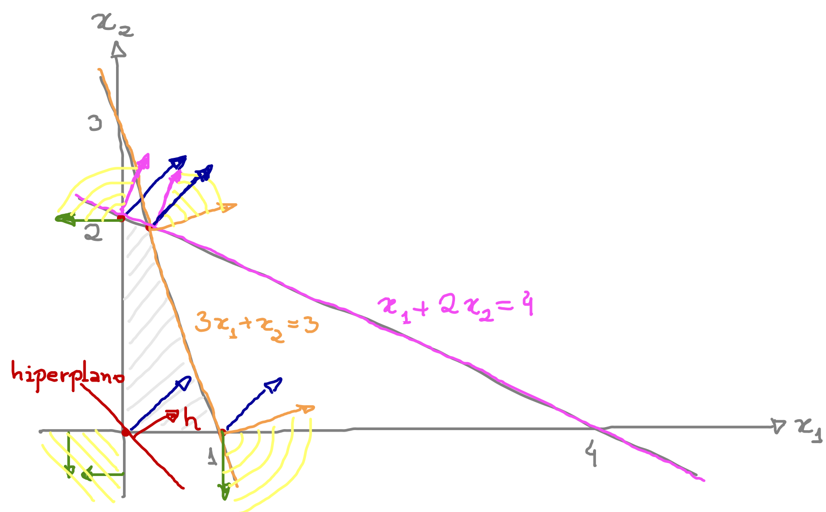
primal	dual
max, $\leq$	min, $\geq$
$Ax \leq b$	$y \geq 0$
$x \geq 0$	$A^t y \geq 0$
$Ax = b$	y irrestrito

$\rightarrow$ Exemplo:

$$\begin{aligned} \min\ & c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ \text{suj}\ & A x_1 + B x_2 \geq b \\ & x_1 \text{ irrestrito},\ x_2 \geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \max\ & b^t y \\ \text{suj}\ & A^t y = c_1 \\ & B^t y \leq c_2 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

26/09/2013

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + x_2 \\ \text{suj}\ & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Lembrando do teorema do valor médio: $f(x+\Delta x) = f(x) + f'(\xi)\Delta x$

vale também $f(x+\Delta x) = f(x) + \underbrace{f'(x)}_{=0 \text{ no mínimo}}\Delta x + \frac{1}{2} f''(\xi)(\Delta x)^2$

Definição: o cone gerado por um conjunto de vetores $\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$ é o conjunto de todas as combinações lineares $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_n g_n$, com $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0$. $\square$

Considere o problema $\max\ c^t x$
$$\text{suj}\quad \begin{aligned} g_1^t x &\leq b_1 \\ &\vdots \\ g_m^t x &\leq b_m \end{aligned}$$

se $\underbrace{\begin{cases} g_1^t x^* = b_1 \\ \vdots \\ g_k^t x^* = b_k \end{cases}}_{\text{restrições ativas}}$ e $\underbrace{\begin{cases} g_{k+1}^t x^* < b_{k+1} \\ \vdots \\ g_{k+n}^t x^* < b_m \end{cases}}_{\text{restrições inativas}}$ e $c \in \text{cone}(g_1, \cdots, g_k)$

então x^* é ótimo. □

Demonstração: Dado x tal que

temos $\begin{aligned} g_1' x &\leq b_1 \\ &\vdots \\ g_m' x &\leq b_m \end{aligned}$; hipótese $c = \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_k g_k$

onde $\begin{aligned} g_1' x^* &= b_1 \\ &\vdots \\ g_k' x^* &= b_k \end{aligned}$ e $\begin{aligned} g_{k+1}' x^* &< b_{k+1} \\ &\vdots \\ g_m' x^* &< b_m \end{aligned}$

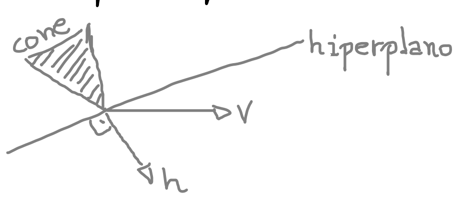
Queremos mostrar que $c^t x \leq c^t x^*$.

Note que se usarmos a hipótese: $c^t x = \lambda_1 g_1' x + \cdots + \lambda_k g_k' x$

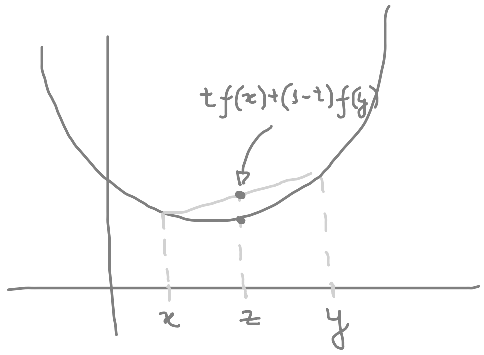
$$c^t x^* = \lambda_1 g_1' x^* + \cdots + \lambda_k g_k' x^* =$$
$$= \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_k b_k$$

Então, para a prova basta "fazer o caminho inverso" e mostrar que se $c \in$ cone das ativas, então é ótimo.

Teorema da Separação: se $V \notin \text{cone}\{g_1, \cdots, g_n\}$, então existe um hiperplano que separa V do cone. (i.e. $\exists\, h$ tal que $h'V > 0$ e $h' g_i < 0$). □



Obs.:



f é convexa se

$$f(z) \leq t\,f(x)+(1-t)\,f(y)$$

$$f(tx+(1-t)y) \leq t\,f(x)+(1-t)\,f(y)$$

$$z = tx+(1-t)y\,, \quad 0 \leq t \leq 1$$

01/10/2013

$$x_B = B^{-1}b \longrightarrow x_B = (B+\Delta)^{-1}b\ ?$$

$$(B+\Delta)^{-1}b = \left[B\left(\mathbb{1}+B^{-1}\Delta\right)\right]^{-1}b = \left(\mathbb{1}+B^{-1}\Delta\right)^{-1}B^{-1}b \approx \left(\mathbb{1}-B^{-1}\Delta\right)B^{-1}b =$$
$$= x_B - B^{-1}\Delta x_B$$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\,, \quad \text{se } |x|<1$$

$$(\mathbb{1}+M)^{-1} = \mathbb{1} - M + M^2 - M^3 + \cdots\,, \quad \text{se } |\text{autovalores}(M)| < 1$$

03/10/2013

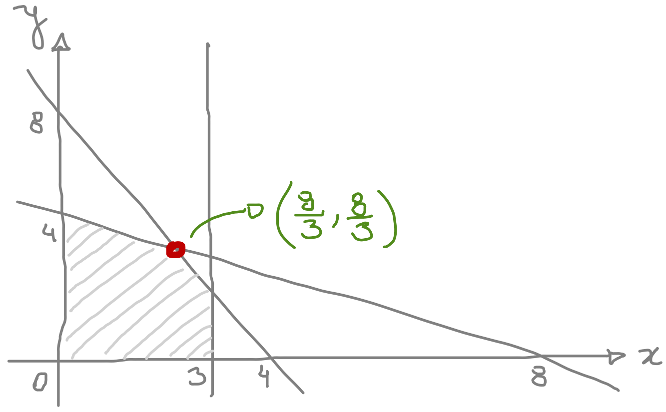
(problema 8.1 a do Chvátal, página 135)

$$\begin{aligned}
\max\ & -3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 + x_6 + x_7 - 4x_8 \\
\text{suj}\ & x_1 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 - 2x_6 + 4x_7 - 6x_8 = 7 \\
& x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 + x_6 - 3x_7 + 5x_8 = -3 \\
& 0 \leq x_1 \leq 8 \longrightarrow \text{restrição de caixa} \\
& 0 \leq x_2 \leq 6 \\
& 0 \leq x_3 \leq 4 \\
& 0 \leq x_4 \leq 15 \\
& 0 \leq x_5 \leq 2 \\
& 0 \leq x_6 \leq 10 \\
& 0 \leq x_7 \leq 10 \\
& 0 \leq x_8 \leq 3
\end{aligned}$$

Solução: $x_1 = 0$, $x_2 = 6$,
$x_3 = 0$, $x_4 = 15$,
$x_5 = 2$, $x_6 = 1$,
$x_7 = 1$, $x_8 = 0$.

$$z = -6 + 30 - 2 + 1 + 1 = 24$$

$$\begin{aligned} \max\ & x+y \\ \text{suj}\ & x+2y \leq 8 \\ & 2x+y \leq 8 \\ & y \geq 0 \\ & 0 \leq x \leq 3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \max\ & z = x+y \\ \text{suj}\ & u = 8 - x - 2y \quad (i) \\ & v = 8 - 2x - y \quad (ii) \end{aligned}$$

Três tipos de variável:

1. básicas (u, v)
2. não-básicas com valor mínimo
3. não-básicas com valor máximo

(i) $x \leq 8 \rightarrow$ mas $x \leq 3$, logo $u = 5$

(ii) $x \leq 4 \rightarrow$ mas $x \leq 3$, logo $v = 2$

(i) $u = 5 - x - 2y \implies y \leq \frac{5}{2}$

(ii) $v = 2 - 2x - y \implies y \leq 2 \ * \implies y = 8 - 2x - v$

$$\begin{aligned} \max\ & z = 8 - x - v \\ \text{suj}\ & u = -8 + 3x + 2v \quad (i) \\ & y = 8 - 2x - v \quad (ii) \end{aligned}$$

com $x = 3$

$\rightsquigarrow$ Apesar do custo de x ser -1, temos que lembrar que x está no máximo $(x=3)$ e, então, se diminuir x, aumenta-se z.

(i) $u = 1 \implies x \geq \frac{8}{3}$

(ii) $y = 2 \implies$ não é limitante

$$\max\ z = 8 - \left(\frac{8}{3} - \frac{2}{3}v + \frac{1}{3}u\right) = \frac{16}{3} + \frac{2}{3}v - \frac{1}{3}u$$

$\rightsquigarrow$ ACABOU!

$$\begin{aligned} \text{suj}\ & x = 8/3 - 2/3\, v + 1/3\, u \\ & y = 8 - 2\left(\frac{8}{3} - \frac{2}{3}v + \frac{1}{3}u\right) - v = -\frac{8}{3} + \frac{1}{3}v - \frac{2}{3}u \end{aligned}$$

Vamos aplicar no problema:

$$\max \; -3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 + x_6 + x_7 - 4x_8$$

suj

$$x_1 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 - 2x_6 + 4x_7 - 6x_8 = 7$$

$$x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 + x_6 - 3x_7 + 5x_8 = -3$$

$0 \leqslant x_1 \leqslant 8$ $\quad$ $0 \leqslant x_5 \leqslant 2$

$0 \leqslant x_2 \leqslant 6$ $\quad$ $0 \leqslant x_6 \leqslant 10$

$0 \leqslant x_3 \leqslant 4$ $\quad$ $0 \leqslant x_7 \leqslant 10$

$0 \leqslant x_4 \leqslant 15$ $\quad$ $0 \leqslant x_8 \leqslant 3$

Solução: $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, $x_3 = 0$, $x_4 = 15$, $x_5 = 2$, $x_6 = 1$, $x_7 = 1$, $x_8 = 0$.

$$\min \; z = u + v = 10 - x_1 + x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 9x_5 + 3x_6 - 7x_7 + 11x_8 \qquad x_1 \leqslant 8 \text{ (caixa)}$$

$$u = 7 - x_1 - 3x_3 - x_4 + 5x_5 + 2x_6 - 4x_7 + 6x_8 \Rightarrow x_1 \leqslant 7 \; *$$

$$v = 3 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 + x_6 - 3x_7 + 5x_8 \Rightarrow x_1 \text{ irrestrito}$$

$$x_1 = 7 - 3x_3 - x_4 + 5x_5 + 2x_6 - 4x_7 + 6x_8 - u \sim u = 0$$

$$\min \; z = 3 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 + x_6 - 3x_7 + 5x_8 \qquad x_4 \leqslant 15 \text{ (caixa)}$$

$$x_1 = 7 - 3x_3 - x_4 + 5x_5 + 2x_6 - 4x_7 + 6x_8 \Rightarrow x_4 \leqslant 7$$

$$v = 3 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 + x_6 - 3x_7 + 5x_8 \Rightarrow x_4 \leqslant 3 \; *$$

$$x_4 = 3 + x_2 - 2x_3 + 4x_5 + x_6 - 3x_7 + 5x_8 - v \sim v = 0$$

$$x_1 = 7 - 3x_3 - 3 - x_2 + 2x_3 - 4x_5 - x_6 + 3x_7 - 5x_8 + 5x_5 + 2x_6 - 4x_7 + 6x_8 =$$

$$= 4 - x_2 - x_3 + x_5 + x_6 - x_7 + x_8$$

fim da 1ª fase!

$$\max \; z = -3(4 - x_2 - x_3 + x_5 + x_6 - x_7 + x_8) - x_2 - x_3 +$$

$$+ 2(3 + x_2 - 2x_3 + 4x_5 + x_6 - 3x_7 + 5x_8) - x_5 + x_6 + x_7 - 4x_8 =$$

$$= -6 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_5 - 2x_7 + 3x_8 \qquad x_2 \leqslant 6 \text{ (caixa)}$$

$$x_4 = 3 + x_2 - 2x_3 + 4x_5 + x_6 - 3x_7 + 5x_8 \Rightarrow x_2 \leqslant 12 \text{ (por } x_4 \leqslant 15\text{)}$$

$$x_1 = 4 - x_2 - x_3 + x_5 + x_6 - x_7 + x_8 \Rightarrow x_2 \leqslant 4 \; *$$

$$x_2 = 4 - x_1 - x_3 + x_5 + x_6 - x_7 + x_8$$

$$z = -6 + 4(4 - x_1 - x_3 + x_5 + x_6 - x_7 + x_8) - 2x_3 + 4x_5 - 2x_7 + 3x_8 =$$

$$= 10 - 4x_1 - 6x_3 + 8x_5 + 4x_6 - 6x_7 + 7x_8$$

$$x_4 = 7 - x_1 - x_3 + x_5 + x_6 - x_7 + x_8 - 2x_3 + 4x_5 + x_6 - 3x_7 + 5x_8 =$$
$$= 7 - x_1 - 3x_3 + 5x_5 + 2x_6 - 4x_7 + 6x_8$$

$$\max \quad z = 10 - 4x_1 - 6x_3 + 8x_5 + 4x_6 - 6x_7 + 7x_8 \qquad x_5 \leq 2 \text{ (caixa)}$$
$$x_2 = 4 - x_1 - x_3 + x_5 + x_6 - x_7 + x_8 \Rightarrow x_5 \leq 2 \text{ (pois } x_2 \leq 6)$$
$$x_4 = 7 - x_1 - 3x_3 + 5x_5 + 2x_6 - 4x_7 + 6x_8 \Rightarrow x_5 \leq \tfrac{8}{5} \text{ (pois } x_4 \leq 15) \ *$$

$$\max \quad z = 10 - 4x_1 - 6x_3 + 8x_5 + 4x_6 - 6x_7 + 7x_8 \qquad x_6 \leq 10 \text{ (caixa)}$$
$$x_2 = \tfrac{28}{5} - x_1 - x_3 + x_5 + x_6 - x_7 + x_8 \Rightarrow x_6 \leq \tfrac{2}{5} \text{ (pois } x_2 \leq 6)$$
$$x_4 = 15 - x_1 - 3x_3 + 5x_5 + 2x_6 - 4x_7 + 6x_8 \Rightarrow x_6 = 0 \text{ (pois } x_4 \leq 15) \ *$$

$$\max \quad z = 10 - 4x_1 - 6x_3 + 8x_5 + 4x_6 - 6x_7 + 7x_8 \qquad x_8 \leq 3 \text{ (caixa)}$$
$$x_2 = \tfrac{28}{5} - x_1 - x_3 + x_5 + x_6 - x_7 + x_8 \Rightarrow x_8 \leq \tfrac{2}{5} \text{ (pois } x_2 \leq 6)$$
$$x_4 = 15 - x_1 - 3x_3 + 5x_5 + 2x_6 - 4x_7 + 6x_8 \Rightarrow x_8 = 0 \text{ (pois } x_4 \leq 15) \ *$$

Solução:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 28/5 \\ 0 \\ 15 \\ 8/5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad z = 10 + \frac{64}{5} = \frac{114}{5}$$

Conferindo:

$$x_1 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 - 2x_6 + 4x_7 - 6x_8 = 15 - 8 = 7 \checkmark$$
$$x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 + x_6 - 3x_7 + 5x_8 = \frac{28}{5} - 15 + \frac{32}{5} = -3 \checkmark$$

08/10/2013

$$\max\ z+w$$

$$\text{suj}\quad \begin{array}{ll} x+2y+z = 12 & i \\ -2x-y+z-w=-12 & ii \\ -x+y+2z-w = 0 & iii \\ 0\leqslant x,y\leqslant 12 & \\ 0\leqslant z,w\leqslant 3 & \end{array}$$

iii = i + ii combinação linear $\Rightarrow$ então descarto a última linha

$$\min\ \alpha+\beta+\gamma = 24-2x-4y-2z \qquad x\leqslant 12 \text{ (caixa)}$$

$$\text{suj}\quad \begin{array}{l} \alpha = 12-x-2y-z \Rightarrow x\leqslant 12 \\ \beta = 12-2x-y+z-w \Rightarrow x\leqslant 6 \ * \\ \gamma = x-y-2z+w \Rightarrow x \text{ irrestrito} \end{array}$$

$$x = 6-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}w-\cancel{\frac{1}{2}\beta}\ \ \beta=0$$

$$\min\ 24-2\left(6-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}w\right)-4y-2z = 12-3y-3z+w \qquad y\leqslant 12 \text{ (caixa)}$$

$$\text{suj}\quad \begin{array}{l} \alpha = 6-\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}w \\ \gamma = 6-\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}w \\ x = 6-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}w \Rightarrow y\leqslant 12 \end{array} \quad \Rightarrow y\leqslant 4$$

$$y = 4-z+\frac{1}{3}w-\cancel{\frac{2}{3}\alpha}\ \ \alpha=0$$

$$\min\ 12-3\left(4-z+\frac{1}{3}w\right)-3z+w = 0$$

$$\text{suj}\quad \begin{array}{l} y = 4-z+\frac{1}{3}w \\ \gamma = 6-\frac{3}{2}\left(4-z+\frac{1}{3}w\right)-\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}w = 0 \\ x = 6-\frac{1}{2}\left(4-z+\frac{1}{3}w\right)+\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}w = 4+z-\frac{2}{3}w \end{array}$$

fim da 1ª fase

$x=4$; $y=4$;
$z=0$; $w=0$;

$$\max\ z+w \qquad z\leqslant 3 \text{ (caixa)} \quad *$$

$$\text{suj}\quad \begin{array}{l} x = 4+z-\frac{2}{3}w \Rightarrow z\leqslant 8 \text{ (pois } x\leqslant 12) \\ y = 4-z+\frac{1}{3}w \Rightarrow z\leqslant 4 \end{array}$$

$\therefore\ z\leqslant 3$

$$\max \quad z + w \qquad w \leq 3 \quad (\text{caixa}) \quad *$$

$$\text{suj} \quad x = 7 + z - \frac{2}{3}w \Rightarrow w \leq \frac{21}{2} \quad (\text{pois } z = 3)$$

$$y = 1 - z + \frac{1}{3}w \Rightarrow w \leq 3 \cdot 11 = 33 \quad (\text{pois } z = 3 \text{ e } y \leq 12) \quad \therefore w \leq 3$$

Solução: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Teorema: Se a base no passo k é não singular, então no passo $k+1$ ela também é não singular. □

→ Justificativa: $B_k \longrightarrow B_{k+1}$ só troca 2 colunas, logo continua não singular.

10/10/2013

Usando Programação Linear para Provar Teoremas

Teorema: Se um sistema de equações $Ax = b$, com A de dimensão $m \times n$, tem uma solução $x \geq 0$, então também há uma solução $y \geq 0$ com no máximo m coordenadas positivas. □

→ Exemplo:

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 - 5x_5 + x_6 = 5$$
$$7x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 - 3x_5 + x_6 = -4$$
$$x_i \geq 0$$

→ Demonstração: Fase I do Método Simplex

1. multiplique as linhas com $b_i \leq 0$ por -1 e, com isso, o sistema $Ax = b$ fica com $b \geq 0$.

2. Introduza as variáveis artificiais

$$(*)\quad \min \sum_{i=1}^{m} a_i = \mathbb{1}' a \rightsquigarrow (1\ \ 1\ \ 1)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (a_1+a_2+a_3)$$

$$\text{suj}\quad \underbrace{I_m}_{\text{base inicial}} a + Ax = b$$

$$a, x \geq 0$$

3. O problema $(*)$ é factível ($a=b$, $x=0$ é solução) e limitado ($\sum_i a_i \geq 0$) $\Longrightarrow$ Método simplex encontra a solução ótima.

4. A solução ótima vai corresponder a uma base B.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & A \\ 0 & & 1 & \end{array}\right)$$

$$B = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} I & u \\ 0 & V \end{pmatrix} & \begin{matrix}]\,k \\ ]\,m-k \end{matrix} \\ \begin{matrix} k & m-k \end{matrix} & \end{array} \qquad N = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & R \\ I & S \end{pmatrix} & \begin{matrix}]\,m-k \\ ]\,n-(m-k) \end{matrix} \\ \begin{matrix} m-k & n-(m-k) \end{matrix} & \end{array} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} I & -uV^{-1} \\ 0 & V^{-1} \end{pmatrix}$$

$$y_B = \begin{pmatrix} a_B \\ x_B \end{pmatrix} \qquad y_N = \begin{pmatrix} a_N \\ x_N \end{pmatrix} \qquad c_B = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c_N = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_a \\ b_x \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \tilde{A} y = b \\ y \geq 0 \end{cases} \rightsquigarrow y_B = B^{-1}b - B^{-1}N y_N$$

$$\begin{pmatrix} a_B \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_a - uV^{-1}b_x \\ V^{-1}b_x \end{pmatrix} - B^{-1}N \cancelto{0}{y_N}$$

Como o problema tem solução $z = 0 = \underbrace{\mathbb{1}' a_B}_{\geq 0} + \mathbb{1}' \cancelto{0}{a_N} = 0 \Rightarrow a_B = 0$

$$\therefore\quad b_a = uV^{-1}b_x$$

Resumindo: $A = \begin{pmatrix} u & R \\ V & S \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} uV^{-1}b_x \\ b_x \end{pmatrix} \begin{matrix}]\,k \\ ]\,m-k \end{matrix}$

Note que $x = \begin{pmatrix} V^{-1}b_x \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix}]\,m-k \\ ]\,n-(m-k) \end{matrix}$ e $Ax = \begin{pmatrix} uV^{-1}b_x \\ b_x \end{pmatrix} = b$.

Logo, x é uma solução com $m-k \leq m$ coordenadas $\neq 0$. ∎

Teorema: O sistema de desigualdades $Ax \leq b$ tem solução se e somente se não existe $y \geq 0$ tal que $y^T A = 0$ e $y^T b < 0$. □

↳ **Exemplo:**

$$\left.\begin{array}{rl} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 10 & \rightsquigarrow y_1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 \leq 5 & \rightsquigarrow y_2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 10 & \rightsquigarrow y_3 \\ -4x_1 - 2x_2 - x_3 \leq -2 & \rightsquigarrow y_4 \end{array}\right\} y^T A$$

$$0 \leq \text{negativo}$$

↳ **Exemplo:**

$$\begin{array}{rl} & 2x_1 + x_2 \leq -1 \\ + & -2x_1 - x_2 \leq 0 \\ \hline & 0x_1 + 0x_2 \leq -1 \end{array} \quad \therefore \text{ não tem solução.}$$

↳ **Demonstração:**

Parte fácil ($\Rightarrow$): se existir $y \geq 0$ tal que $y^T A = 0$ e $y^T b < 0$, então o sistema não tem solução. De fato, neste caso, se $Ax \leq b$, então $y^T Ax \leq y^T b \Rightarrow 0 \leq y^T b < 0$ (contradição!).

Parte difícil ($\Leftarrow$): se o sistema $Ax \leq b$ não tem solução, então existe $y \geq 0$ tal que $y^T A = 0$ e $y^T b < 0$.

↳ Prova: dualidade

Considere o problema: $(**)$

$$\begin{array}{ll} \min & \lambda \in \mathbb{R} \\ \text{suj} & Ax - \lambda \mathbb{1} \leq b \\ & \lambda \geq 0 \end{array} \qquad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Este problema é: 1. factível $x = 0$, $\lambda = -\min b_i$, $1 \leq i \leq m$

2. limitado

Logo, o P.L. $(**)$ tem uma solução ótima. Pelo teorema de dualidade o problema dual também tem solução ótima. Para escrever o dual de $(**)$ é conveniente escrevê-lo como:

$$\begin{array}{ll} \min & 1\lambda \\ \text{suj} & \lambda \mathbb{1} - Ax \geq -b \\ & \lambda \geq 0 \end{array} \implies \begin{array}{ll} \max & -b^T y \\ \text{suj} & \mathbb{1}^T y \leq 1 \\ & -A^T y = 0 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

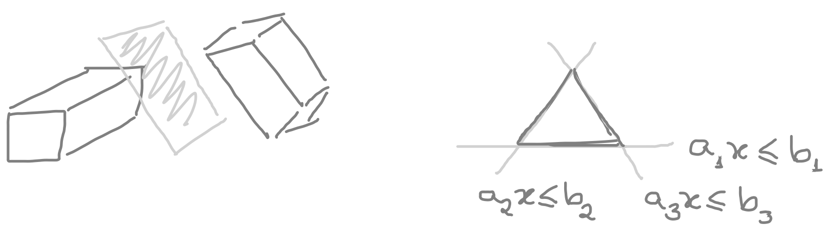
A solução ótima do dual y^* satisfaz:

$$\begin{cases} A^T y^* = 0 \\ y^* \geq 0 \\ -b^T y^* = \lambda^* = \text{valor da solução do primal} > 0 \end{cases}$$

Logo, y^* é o vetor y procurado. ■

Teorema: Se dois poliedros convexos são disjuntos, então existe um hiperplano que os separa. □

↳ Exemplos:

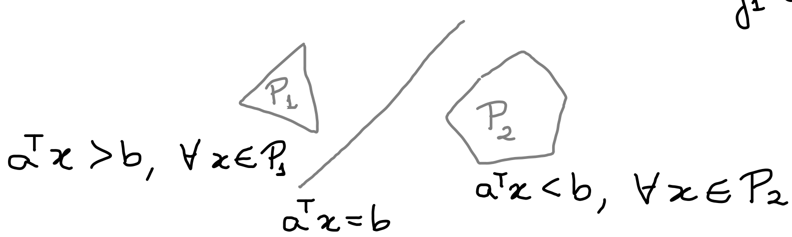


↳ **Demonstração:** poliedro $\iff$ $Ax \leq b$

$P_1 \equiv$ poliedro $1 \iff A_1 x \leq b_1$
$P_2 \equiv$ poliedro $2 \iff A_2 x \leq b_2$

$P_1 \cap P_2 = \emptyset \iff$ o sistema $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ não tem solução $\iff \exists\ y_1 \geq 0$ e $y_2 \geq 0$ tais que: $y_1^T A_1 + y_2^T A_2 = 0$ e $y_1^T b_1 + y_2^T b_2 < 0$

Visualmente:



$a = A_1^T y_1 = -A_2^T y_2$, então, se $x \in P_1 \iff A_1 x \leq b_1$

$\therefore\ a^T x = y_1^T A_1 x \leq y_1^T b_1 = b \implies$ se $x \in P_1$ então $a^T x \leq b$

Se $x \in P_2$ $(A_2 x \leq b_2)$: $a^T x = -(y_2^T A_2 x) \geq -y_2^T b_2 > y_1^T b_1 = b$

∎

15/10/2013

LISTA 2

2.a.

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 5x_2 \\ \text{suj}\ & 3x_1 + x_2 \leq -1 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 5x_2 \\ \text{suj}\ & 3x_1 + x_2 + x_3 - a = -1 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

1^a fase:

$$\begin{aligned} \min\ & a = 3\overset{\geq 0}{x_1} + \overset{\geq 0}{x_2} + \overset{\geq 0}{x_3} + 1 \\ \text{suj}\ & a = 1 + 3x_1 + x_2 + x_3 \\ & x_4 = 3 - x_1 - x_2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, a \geq 0 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ solução ótima da 1^a fase $\underbrace{a = 1}_{>0}$ e $x_4 = 3$

>0, $\therefore$ não tem solução!

2.b.

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + x_2 \\ \text{suj}\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1^a fase: $\min\ a = 1 - x_1 - x_2 + x_3$

$x_1 + x_2 - x_3 + a = 1 \rightsquigarrow x_1 \leq 1$ ✱

$x_1 + x_2 + x_4 = 2 \rightsquigarrow x_1 \leq 2$

$x_1 = 1 - x_2 + x_3 - \cancel{a}^{\to 0}$ fim 1^a fase

$$\begin{aligned} \max\ & z = x_1 + x_2 = 1 + x_3 \\ \text{suj}\ & x_1 = 1 - x_2 + x_3 \rightsquigarrow x_3 \text{ ilimitada} \\ & x_4 = 2 - (1 - x_2 + x_3) - x_2 = 1 - x_3 \rightsquigarrow x_3 \leq 1 \ ✱ \rightsquigarrow x_3 = 1 - x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ & z = 2 - x_4 \\ \text{suj}\ & x_1 = 2 - x_2 - x_4 \\ & x_3 = 1 - x_4 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ ótimo: $x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 0$ e $z = 2$.

3. $\max\ x_1+x_2$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ $\max\ x_1+x_2$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ $\max\ c^t x$

$$\begin{array}{lll} \max & x_1+x_2 \\ \text{suj} & x_1+x_2 \geq 1 \\ & x_1+x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{lll} \max & x_1+x_2 \\ \text{suj} & -x_1-x_2 \leq 1 \\ & x_1+x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ll} \max & c^t x \\ \text{suj} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Dual:
$$\begin{array}{ll} \min & -y_1+2y_2 \\ \text{suj} & -y_1+y_2 \geq 1 \\ & \cancel{-y_1+y_2 \geq 1} \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ll} \min & b^t y \\ \text{suj} & A^t y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min & -y_1+2y_2 \\ \text{suj} & -y_1+y_2-y_3 = 1 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array} \rightsquigarrow y_2 = 1+y_1+y_3$$

$$z = -y_1+2(1+y_1+y_3) = 2+y_1+2y_3$$

$\rightsquigarrow$ ótimo: $y_1=0$, $y_2=1$, $y_3=0$ e $z=2$

Relação entre a solução do dual e um ponto viável do primal:

primal

$$\begin{array}{ll} \max & c^t x \\ \text{suj} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

dual

$$\begin{array}{ll} \min & b^t y \\ \text{suj} & A^t y \geq c \\ & y \text{ irrestrito} \end{array}$$

$$A = \left(B \,\vdots\, N\right), \quad X = \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix};$$

$$BX_B + NX_N = b \rightsquigarrow X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N$$

$$z = c_B^t X_B + c_N^t X_N = c_B^t\left(B^{-1}b - B^{-1}NX_N\right) + c_N^t X_N = c_B^t B^{-1} b + \underbrace{\left(c_N^t - c_B^t B^{-1} N\right)}_{\leq 0 \text{ no ótimo}} X_N$$

$\therefore$ no ótimo $c_N \leq N^t (B^{-1})^t c_B$

No dual:
$$\begin{array}{ll} \min & b^t y \\ \text{suj} & B^t y \geq c_B \\ & N^t y \geq c_N \\ & y \text{ irrestrito} \end{array} \rightsquigarrow y = (B^t)^{-1} c_B \text{ é solução do dual}$$

Note que, no problema 2.b tínhamos:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \quad c_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \; ;$$

$$\hookrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (B^{-1})^t c_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$ é solução do primal

1. Hipótese: $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\, x \geq 0\}$ é limitado

Mostrar que o dual de
$$\begin{aligned} \max \;& c^t x \\ \text{suj } \;& Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$
é viável.

Dual:
$$\begin{aligned} \min \;& b^t y \\ \text{suj } \;& A^t y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Como o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\, x \geq 0\}$ é limitado e $f(x) = c^t x$ é contínua, existe x^* tal que $Ax^* \leq b$ e $x^* \geq 0$ e $\forall v$ tal que $Av \leq b$ e $v \geq 0$ e $c^t v \leq c^t x^*$.

$$A = \begin{pmatrix} U & R \\ V & S \end{pmatrix} ; \quad X^* = \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_B \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix} ;$$

$$UX_B + R \cdot 0 = b_B$$
$$VX_B + S \cdot 0 < b_N$$

...

22/10/2013

2. Exemplo:

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 \\ \text{suj} & x_1 + x_3 = 5 \\ & x_1 - x_2 - x_5 + x_6 = 0 \\ & x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 0 \\ & 0 \leq x_i \leq 3 \end{array}$$

1º passo: achar uma base inicial

$\min\ a_1 + a_2 + a_3 = 5 - 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4$ $\qquad x_1 \leq 3$

suj $a_1 = 5 - x_1 - x_3 \rightsquigarrow x_1 \leq 5$

$a_2 = -x_1 + x_2 + x_5 - x_6 \rightsquigarrow x_1 \leq 0$ *

$a_3 = -x_3 + x_4 - x_5 + x_6 \rightsquigarrow x_1$ irrestrito

$a_1, a_2, a_3 \geq 0$

$x_1 = x_2 + x_5 - x_6 - \cancel{a_2}^{0} \Longrightarrow z = 5 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 + 2x_6$

$\min\ a_1 + a_2 + a_3 = 5 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 + 2x_6$ $\qquad x_3 \leq 3$

suj $a_1 = 5 - x_2 - x_3 - x_5 + x_6 \rightsquigarrow x_3 \leq 5$

$x_1 = x_2 + x_5 - x_6 \rightsquigarrow x_3$ irrestrito

$a_3 = -x_3 + x_4 - x_5 + x_6 \rightsquigarrow x_3 \leq 0$ *

$a_1, a_3 \geq 0$ $\quad a_2 = 0$

$x_3 = x_4 - x_5 + x_6 - \cancel{a_3}^{0} \Longrightarrow z = 5 - x_2 - x_4$

$\min\ a_1 + a_2 + a_3 = 5 - x_2 - x_4$ $\qquad x_2 \geq 3$ * (caixa)

suj $a_1 = 5 - x_2 - x_4 \rightsquigarrow x_2 \geq 5$

$x_1 = x_2 + x_5 - x_6 \rightsquigarrow x_2 \leq 3$ (pois $x_1 \leq 3$)

$x_3 = x_4 - x_5 + x_6 \rightsquigarrow x_2$ irrestrito

$a_1 \geq 0$ $\quad a_2, a_3 = 0$

$\min\ a_1 + a_2 + a_3 = 5 - x_2 - x_4$ $\qquad x_4 \geq 3$ (caixa)

suj $a_1 = 5 - x_2 - x_4 \rightsquigarrow x_4 \geq 2$ (pois $x_2 = 3$) *

$\boxed{x_2 = 3}$

$x_1 = x_2 + x_5 - x_6 \rightsquigarrow x_4$ irrestrito

$x_3 = x_4 - x_5 + x_6 \rightsquigarrow x_4 \leq 3$ (pois $x_3 \leq 3$)

$a_1 \geq 0$ $\quad a_2, a_3 = 0$

$x_4 = 5 - x_2 - \cancel{x_1} \nearrow 0 \Longrightarrow z = 0 \Longrightarrow$ fim da 1ª fase

2ª fase: vértice $(3,3,2,2,0,0)$

$$\min\ z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 =$$
$$= \cancel{x_2} + x_5 - x_6 + \cancel{2}x_2 + 15 - \cancel{3}x_2 - 3x_5 + 3x_6 + 20 - 4x_2 + 5x_5 + 6x_6 =$$
$$= 35 - 4x_2 + 3x_5 + 8x_6$$

suj $x_4 = 5 - x_2 \rightarrow x_2$ está no máximo

$\boxed{x_2 = 3}$

$x_1 = x_2 + x_5 - x_6$

$x_3 = 5 - x_2 - x_5 + x_6$

$0 \leq x_i \leq 3$

solução: $x = (3,3,2,2,0,0)$ e $z = 23$.

Exemplo:

$$\begin{array}{lllllllllll}
\min & 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 \\
\text{suj} & x_1 + x_2 + x_3 & & & & & = 7 \\
& x_1 & - x_4 & & & - x_7 & = 0 \\
& x_2 & & - x_5 & & + x_7 - x_8 & = 0 \\
& x_2 & & & - x_6 & + x_8 & = 0 \\
& 0 \leq x_i \leq 3
\end{array}$$

1ª fase: $\min\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 7 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_6$ $\quad x_1 \leq 3$ (caixa)

suj $a_1 = 7 - x_1 - x_2 - x_3 \rightarrow x_1 \leq 7$

$a_2 = -x_1 + x_4 + x_7 \rightarrow x_1 \leq 0$ *

$a_3 = -x_2 + x_5 - x_7 + x_8 \rightarrow x_1\ \forall$

$a_4 = -x_2 + x_6 - x_8 \rightarrow x_1\ \forall$

$a_i \geq 0$

$x_1 = x_4 + x_7 - \cancel{a_2} \nearrow 0 \Longrightarrow z = 7 - 3x_2 - x_3 - x_4 + x_5 - 2x_7$

$\min\ z = 7 - 3x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_6 - 2x_7$ $\quad x_2 \leq 3$ (caixa)

suj $a_1 = 7 - x_2 - x_3 - x_4 - x_7 \rightarrow x_2 \leq 7$

$x_1 = x_4 + x_7 \rightarrow x_2\ \forall$

$a_3 = -x_2 + x_5 - x_7 + x_8 \rightarrow x_2 \leq 0$

$a_4 = -x_2 + x_6 - x_8 \rightarrow \rightarrow x_2 \leq 0$ *

$a_1, a_3, a_4 \geq 0$ $\quad a_2 = 0$ $\quad x_2 = x_6 - x_8 - \cancel{a_4} \nearrow 0 \Longrightarrow z = 7 - x_3 - x_4 + x_5 - 3x_6 - 2x_7 + 3x_8$

$$\min\ z = 7 - x_3 - x_4 + x_5 - 2x_6 - 2x_7 + 3x_8 \qquad x_3 \leq 3 \text{ (caixa)} *$$

$$\begin{aligned}
\text{suj}\quad & a_1 = 7 - x_3 - x_4 - x_6 - x_7 + x_8 \rightsquigarrow x_3 \leq 7 \\
& x_1 = x_4 + x_7 \rightsquigarrow x_3\ \forall \\
& a_3 = x_5 - x_6 - x_7 + 2x_8 \rightsquigarrow x_3\ \forall \\
& x_2 = x_6 - x_8 \rightsquigarrow x_3\ \forall \\
& a_1, a_3 \geq 0 \qquad a_2, a_4 = 0
\end{aligned}$$

$$\min\ z = 7 - x_4 + x_5 - 2x_6 - 2x_7 + 3x_8 - x_3 \qquad x_4 \leq 3 \text{ (caixa)} *$$

$$\boxed{x_3 = 3}$$

$$\begin{aligned}
\text{suj}\quad & a_1 = 7 - x_3 - x_4 - x_6 - x_7 + x_8 \rightsquigarrow x_4 \leq 4 \text{ (pois } x_3 = 3) \\
& x_1 = x_4 + x_7 \rightsquigarrow x_4 \leq 3 \text{ (pois } x_1 \leq 3) \\
& a_3 = x_5 - x_6 - x_7 + 2x_8 \rightsquigarrow x_4\ \forall \\
& x_2 = x_6 - x_8 \rightsquigarrow x_4\ \forall \\
& a_1, a_3 \geq 0 \qquad a_2, a_4 = 0
\end{aligned}$$

$$\min\ z = 7 + x_5 - 2x_6 - 2x_7 + 3x_8 - x_3 - x_4 \qquad x_6 \leq 3 \text{ (caixa)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_3 &= 3 \\ x_4 &= 3 \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}
\text{suj}\quad & a_1 = 7 - x_3 - x_4 - x_6 - x_7 + x_8 \rightsquigarrow x_6 \leq 1 \text{ (pois } x_3, x_4 = 3) \\
& x_1 = x_4 + x_7 \rightsquigarrow x_6\ \forall \\
& a_3 = x_5 - x_6 - x_7 + 2x_8 \rightsquigarrow x_6 \leq 0\ * \\
& x_2 = x_6 - x_8 \rightsquigarrow x_6 \leq 3 \text{ (pois } x_2 \leq 3) \\
& a_1, a_3 \geq 0 \qquad a_2, a_4 = 0
\end{aligned}$$

$$x_6 = x_5 - x_7 + 2x_8 - \cancel{a_3}^{\,0} \implies z = 7 - x_5 - x_8 - x_3 - x_4$$

$$\min\ z = 7 - x_5 - x_8 - x_3 - x_4 \qquad x_5 \leq 3 \text{ (caixa)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_3 &= 3 \\ x_4 &= 3 \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}
\text{suj}\quad & a_1 = 7 - x_3 - x_4 - x_5 - x_8 \rightsquigarrow x_5 \leq 1 \text{ (pois } x_3, x_4 = 3)\ * \\
& x_1 = x_4 + x_7 \rightsquigarrow x_5\ \forall \\
& x_6 = x_5 - x_7 + 2x_8 \rightsquigarrow x_5 \leq 3 \text{ (pois } x_6 \leq 3) \\
& x_2 = x_5 - x_7 + x_8 \rightsquigarrow x_5 \leq 3 \text{ (pois } x_2 \leq 3) \\
& a_1 \geq 0 \qquad a_2, a_3, a_4 = 0
\end{aligned}$$

$$x_5 = 7 - x_3 - x_4 - x_8 - \cancel{a_1}^{\,0} \implies z = 0$$

fim da 1ª fase

<u>2ª fase</u>: vértice $x = (3, 1, 3, 3, 1, 1, 0, 0)$

$$\begin{aligned}
\min\ z &= 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 = \\
&= 8x_4 + 8x_7 + 2x_5 - 2x_7 + 2x_8 + 3x_3 + 4x_4 + 35 - 5x_3 - 5x_4 - 5x_8 + \\
&\qquad + 6x_5 - 6x_7 + 12x_8 = \\
&= 35 - 2x_3 + 7x_4 + 8x_5 + 2x_7 + 9x_8
\end{aligned}$$

$$\min\ z = 35 - 2x_3 + 7x_4 + 8x_5 + 2x_7 + 9x_8$$ ⇝ posso tentar diminuir x_4

suj

$x_5 = 7 - x_3 - x_4 - x_8$ ⇝ $x_4 \geq 1$ (pois $x_5 \leq 3$ e $x_3 = 3$) *

$x_1 = x_4 + x_7$ ⇝ $x_4 \geq 0$

$x_6 = x_5 - x_7 + 2x_8$ ⇝ $x_4\ \forall$

$x_2 = x_5 - x_7 + x_8$ ⇝ $x_4\ \forall$

$0 \leq x_i \leq 3$

$\boxed{\begin{array}{l} x_3 = 3 \\ x_4 = 3 \end{array}}$

↳ mas não compensa aumentar x_5, pois o coeficiente de x_5 em z é maior do que o de x_4.

∴ solução: $x = (3, 1, 3, 3, 1, 1, 0, 0)$ e $z = 58$

29/10/2013

Resolução da 2ª prova

1. $\min\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

suj

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 \quad + x_5 \quad + a_1 &= 5 \\ x_1 - x_2 \quad - x_4 \quad + a_2 &= 1 \\ x_3 + x_4 \quad - x_6 + a_3 &= 1 \end{aligned}$$

$0 \leq x_i \leq 3$

$$\begin{aligned} a_1 &= 5 - x_1 - x_3 - x_5 \\ a_2 &= 1 - x_1 + x_2 + x_4 \\ a_3 &= 1 - x_3 - x_4 + x_6 \\ \hline z &= 7 - 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 + x_6 \end{aligned}$$

$x_1 \leq 3$

$$\begin{aligned} a_1 &= 4 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 && x_2 \leq 4 \\ x_1 &= 1 + x_2 + x_4 && x_2 \leq 2 \\ a_3 &= 1 - x_3 - x_4 + x_6 \\ \hline z &= a_2 + a_3 = 5 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 - x_5 + x_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 5 - x_1 - x_3 - x_5 && x_3 \leq 2 \\ x_2 &= -1 + x_1 - x_4 \\ a_3 &= 1 - x_3 - x_4 + x_6 && x_3 \leq 1 \\ \hline z &= 6 - x_1 - 2x_3 - x_4 - x_5 + x_6 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 4 - x_1 + x_4 - x_5 - x_6 & \quad x_5 \leqslant 1\\
x_2 &= -1 + x_1 - x_4\\
x_3 &= 1 - x_4 + x_6\\
\hline
z &= 4 - x_1 + x_4 - x_5 - x_6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_5 &= 4 - x_1 + x_4 - x_6 & \quad x_1 \geqslant 1\\
x_2 &= -1 + x_1 - x_4 & \quad x_1 \geqslant 1\\
x_3 &= 1 - x_4 + x_6\\
\hline
z &= \underbrace{4 - x_4}_{x_5 + x_3 + x_2} + 2x_1 + x_4 + x_6 = 4 + 2x_1 + x_6
\end{aligned}
$$

fim da 1ª fase

x_1 está no máximo

$$
\begin{aligned}
x_5 &= 3 - x_2 - x_6\\
x_1 &= 1 + x_2 + x_4\\
x_3 &= 1 - x_4 + x_6\\
\hline
z &= 6 + 2x_2 + 2x_4 + x_6
\end{aligned}
$$

<u>solução</u>: $x_1 = 1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$; $x_4 = 0$; $x_5 = 3$; $x_6 = 0$;

2. $$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8\\
\text{suj} \quad & x_1 + x_5 + x_6 = 7\\
& x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 4\\
& -x_3 + x_6 - x_7 - x_8 = 1\\
& -x_4 + x_5 + x_8 = 1\\
& 0 \leqslant x_i \leqslant 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \overset{(4)}{7} - x_1 - x_5 - x_6 & \quad x_5 \leqslant 4\\
a_2 &= \overset{(1)}{4} - x_1 + x_2 - x_3 - x_4\\
a_3 &= 1 + x_3 - x_6 + x_7 + x_8\\
a_4 &= 1 + x_4 - x_5 - x_8 & \quad x_5 \leqslant 1\\
\hline
z &= 13 - 2x_1 + x_2 - 2x_5 - 2x_6 + x_7
\end{aligned}
$$

x_1 vai pro max ($x_1 = 3$)

$$
\begin{array}{ll}
a_1 = \overset{(3)}{6} - x_1 - x_4 - x_6 + x_8 & x_4 \leq 3 \\
a_2 = \overset{(1)}{4} - x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & x_4 \leq 1 \\
a_3 = 1 + x_3 - x_6 + x_7 + x_8 & \\
x_5 = 1 + x_4 - x_8 & x_4 \leq 2 \\
\hline
z = 11 - 2x_1 + x_2 - 2x_4 - 2x_6 + x_7 + 2x_8 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
a_1 = 2 - x_2 + x_3 - x_6 + x_8 & x_2 \leq 2 \\
x_4 = \overset{(1)}{4} - x_1 + x_2 - x_3 & x_2 \leq 1 \\
a_3 = 1 + x_3 - x_6 + x_7 + x_8 & \\
x_5 = \overset{(2)}{5} - x_1 + x_2 - x_3 - x_8 & x_2 \leq 1 \\
\hline
z = 3 - x_2 + 2x_3 - 2x_6 + x_7 + 2x_8 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
a_1 = \overset{(1)}{7} - x_1 - x_5 - x_6 & x_6 \leq 1 \\
x_4 = \overset{(4)}{-1} + x_5 + x_8 & \\
a_3 = 1 + x_3 - x_6 + x_7 + x_8 & x_6 \leq 1 \\
x_2 = \overset{(1)}{-5} + x_1 + x_3 + x_5 + x_8 & \\
\hline
z = 8 - x_1 + x_3 - x_5 - 2x_6 + x_7 + x_8 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
x_6 = \overset{(1)}{7} - x_1 - x_5 & x_1 \geq 1 & \\
x_4 = \overset{(4)}{-1} + x_5 + x_8 & & \\
a_3 = \overset{(0)}{-6} + x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_8 & x_1 \geq 3 & * \text{ crítico} \\
x_2 = \overset{(1)}{-5} + x_1 + x_3 + x_5 + x_8 & x_1 \geq 2 & \\
\hline
z = -6 + x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_8 & &
\end{array}
$$

↳ diminuir x_1

$$
\begin{array}{llll}
 & x_6 = 1 + x_3 + x_7 + x_8 & & \\
x_1 = 3 & x_4 = \overset{(4)}{-1} + x_5 + x_8 & x_5 \geq 2 & \\
x_5 = 3 & x_1 = \overset{(0)}{6} - x_3 - x_5 - x_7 - x_8 & x_5 = 3 & * \text{ crítico} \\
 & x_2 = 1 - x_7 & & \text{fim da 1ª fase} \\
\hline
 & z = 7 - x_7 + x_8 + x_3 + x_5 + x_7 + x_8 = 7 + x_3 + x_5 + 2x_8 & &
\end{array}
$$

↳ diminuir x_5

$$
\begin{array}{lll}
 & x_6 = 1 + x_3 + x_7 + x_8 & x_7 \leq 2 \\
x_1 = 3 & x_4 = \overset{(2)}{5} - x_1 - x_3 - x_7 + x_8 & x_7 \leq 2 \\
x_5 = 3 & x_5 = \overset{(0)}{6} - x_1 - x_3 - x_7 - x_8 & x_7 \leq 3 \\
 & x_2 = 1 - x_7 & x_7 \leq 1 \\
\hline
 & z = 13 - x_1 - x_7 + x_8 &
\end{array}
$$

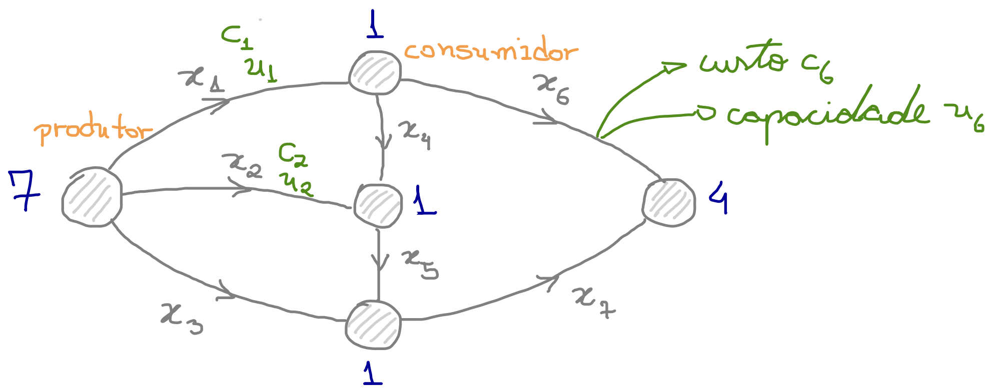
$$
\begin{array}{lrl}
 & x_6 = & 2 \quad - x_2 + x_3 \qquad\qquad + x_8 \\
x_1 = 3 & x_4 = & 4 - x_1 + x_2 - x_3 \qquad + x_8 \\
 & x_5 = & 5 - x_1 + x_2 - x_3 \qquad - x_8 \\
 & x_7 = & 1 \quad - x_2 \\
\hline
 & z = & 12 - x_1 + x_2 + x_8
\end{array}
$$

<u>solução:</u> $x_1 = 3$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = 1$; $x_5 = 2$; $x_6 = 2$; $x_7 = 1$; $x_8 = 0$;

31/10/2013

Fluxo em Redes

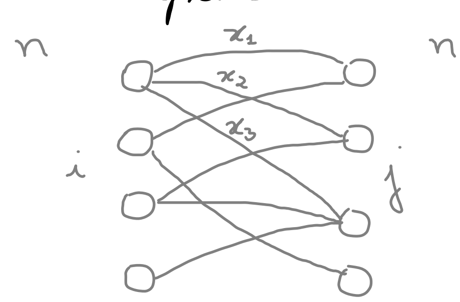
rede ou grafo



$$
\begin{array}{ll}
\min & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5 + c_6x_6 + c_7x_7 \\
\text{suj} & x_1 + x_2 + x_3 \\
 & x_1 \qquad\qquad - x_4 \quad - x_6 \qquad = 1 \\
 & \quad x_2 \qquad + x_4 - x_5 \qquad\quad = 1 \\
 & \qquad x_3 \qquad\quad + x_5 \quad - x_7 = 1 \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad x_6 + x_7 = 4 \\
 & 0 \leq x_i \leq u_i
\end{array}
$$

→ Exemplos:

1) Emparelhamento



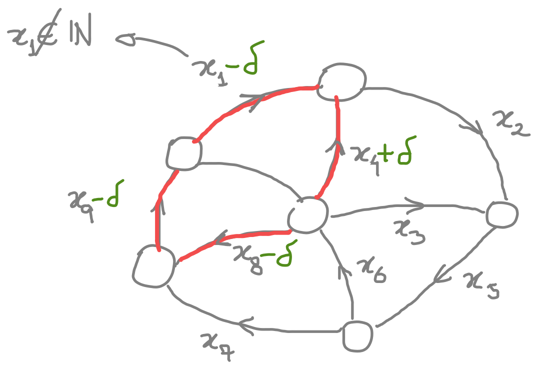
$$\sum_{j \in V(i)}^{n} x_{ij} = 1$$

$$\sum_{i \in V(j)}^{n} x_{ij} = 1$$

$$x_{ij} \geq 0$$

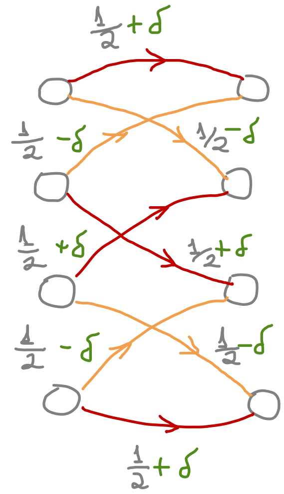
Mas neste exemplo não poderíamos obter uma solução com os x_i's fracionários?

Teorema: Em um problema de fluxo com dados inteiros com solução ótima, sempre há uma solução ótima inteira. $\square$

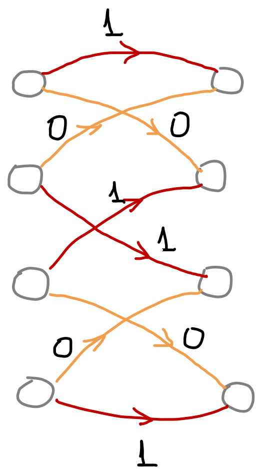


sempre acaba fechando um ciclo e sempre é possível consertar (somando e subtraindo δ)

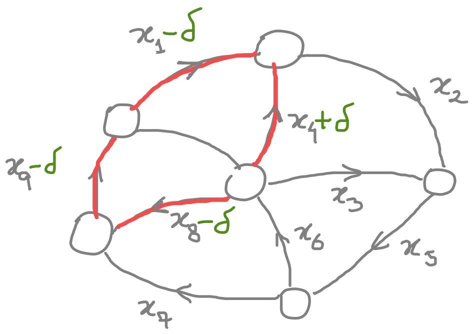
$\rightsquigarrow$ Subexemplo:



$\delta = \frac{1}{2}$



$\rightsquigarrow$ Subexemplo:

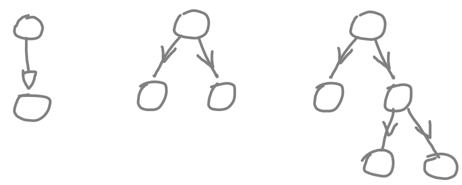


$$c_1(x_1-\delta)+c_4(x_4-\delta)+c_8(x_8-\delta)+c_9(x_9-\delta)$$
$$c_1x_1+c_4x_4+c_8x_8+c_9x_9+\delta\underbrace{(-c_1+c_4-c_8-c_9)}_{>0}$$

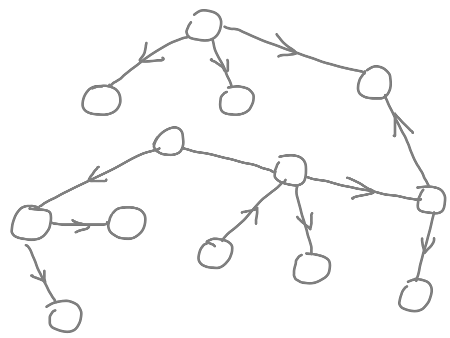
Se der problema, troco o sinal dos δ's.

SIMPLEX		FLUXO
bases	$\longrightarrow$	$\begin{cases}\text{floresta}\\ \text{árvore}\end{cases}$

Obs.: Floresta := grafo sem ciclos

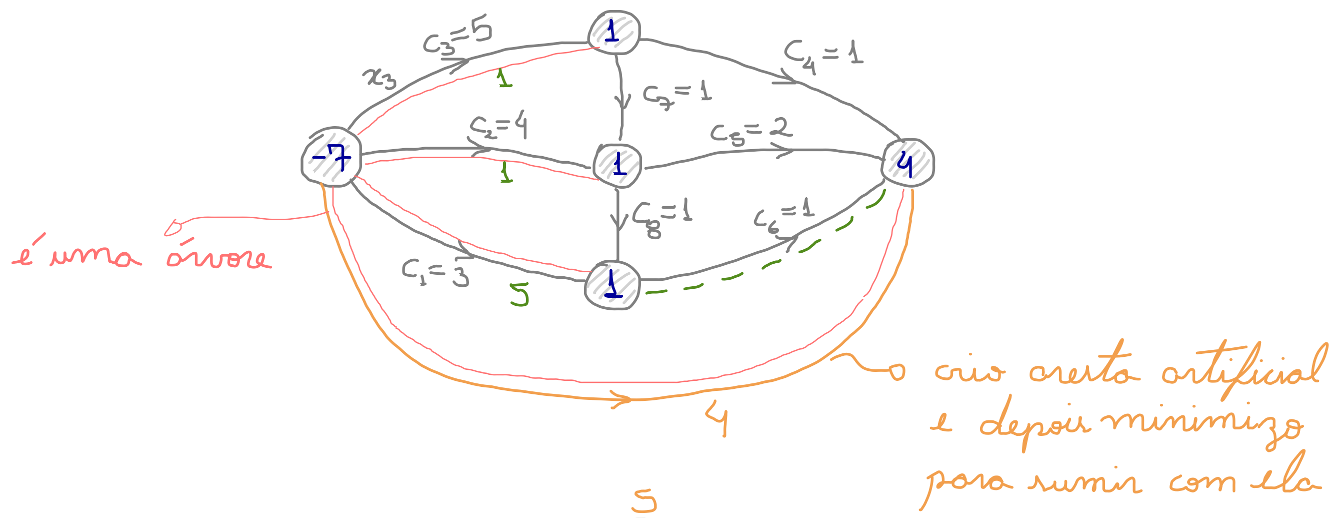


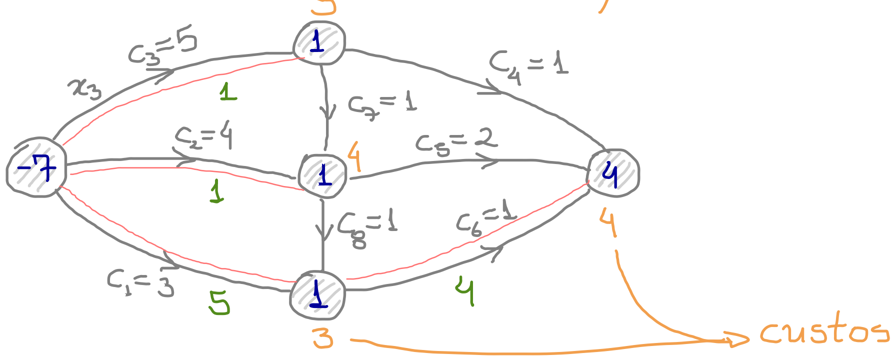
Árvore := floresta conexa



nota-se que se adicionar uma aresta na árvore forma-se um ciclo

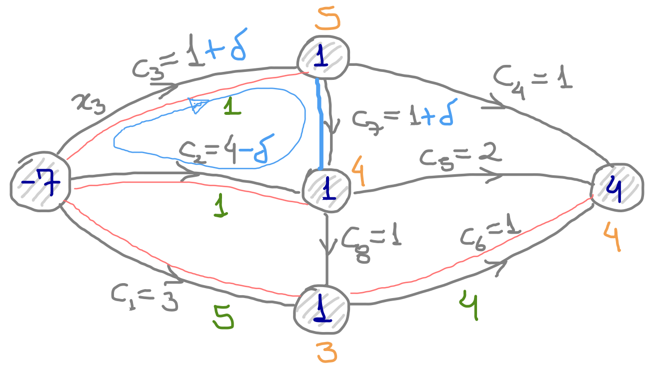
Simplex na rede

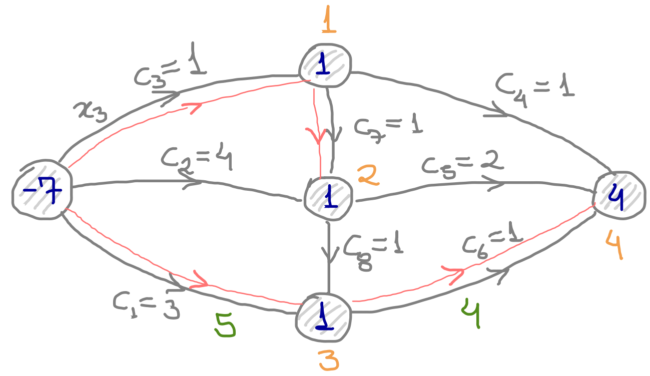


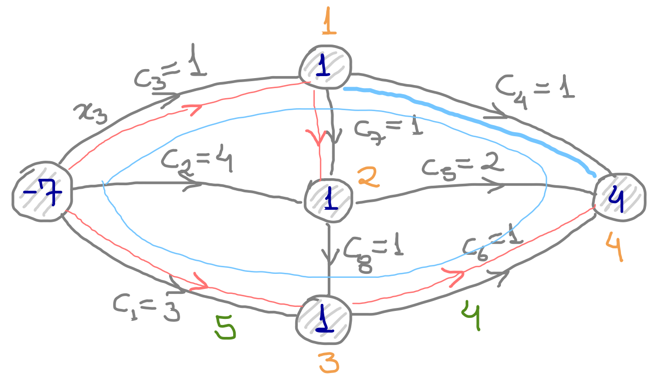


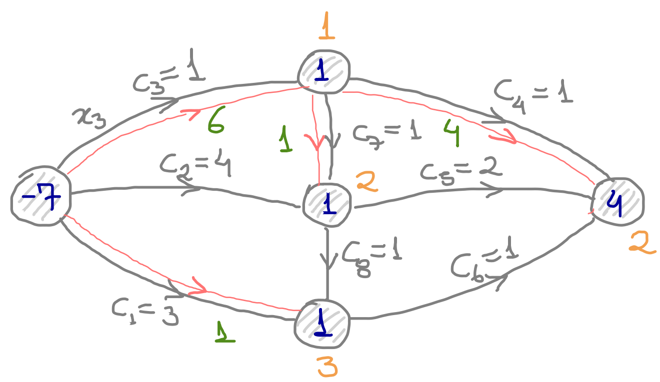
Se adicionarmos qualquer aresta à árvore, criamos um ciclo e podemos fazer a análise do custo para cada ciclo. No caso da árvore acima já estamos no ótimo.

Se tivéssemos $c_3 = 1$ valeria a pena adicionar arestas:



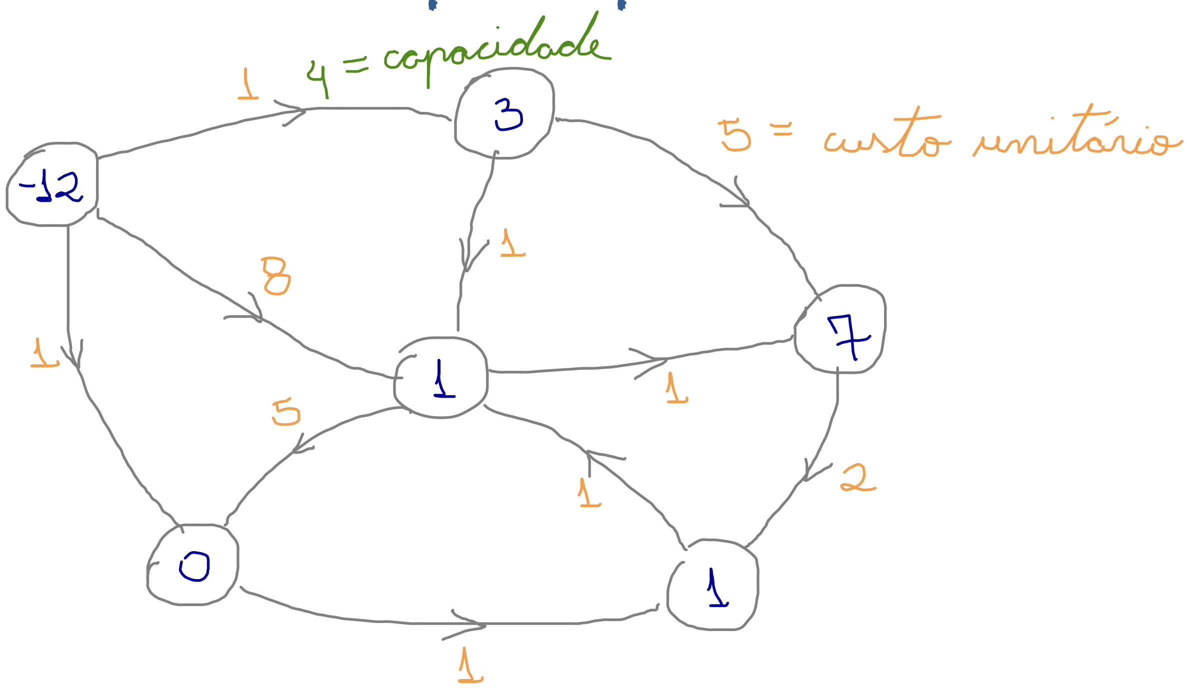


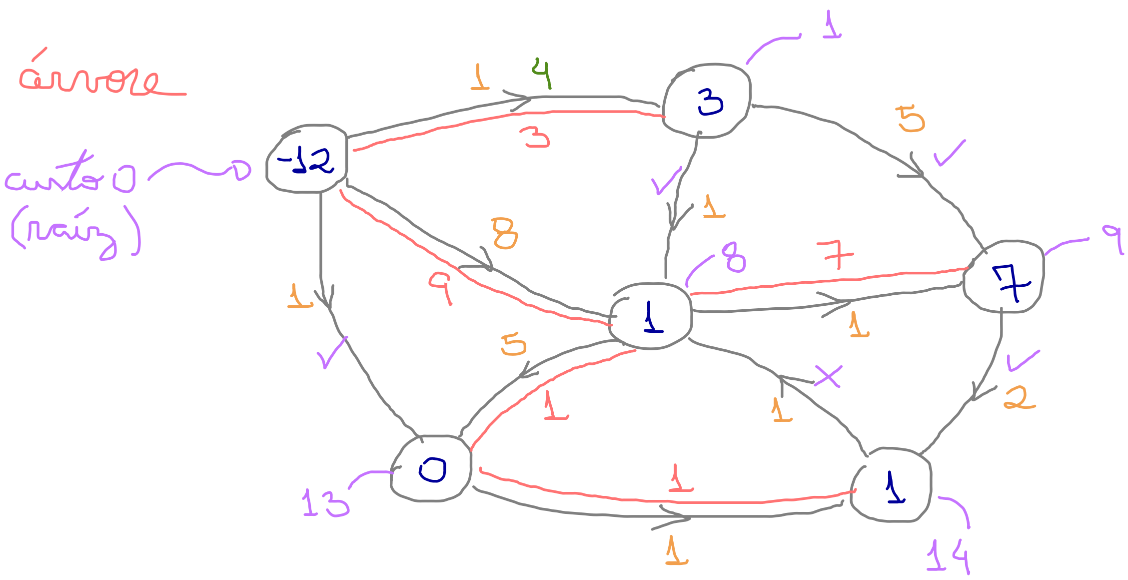




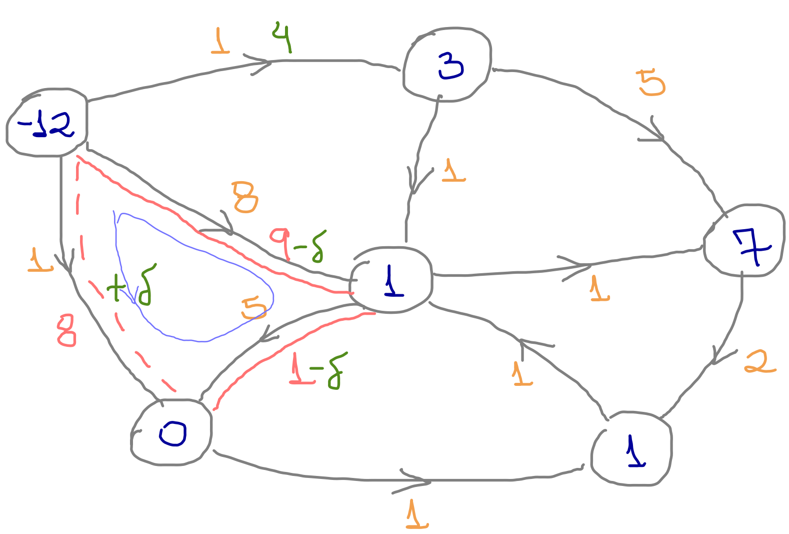
05/11/2013

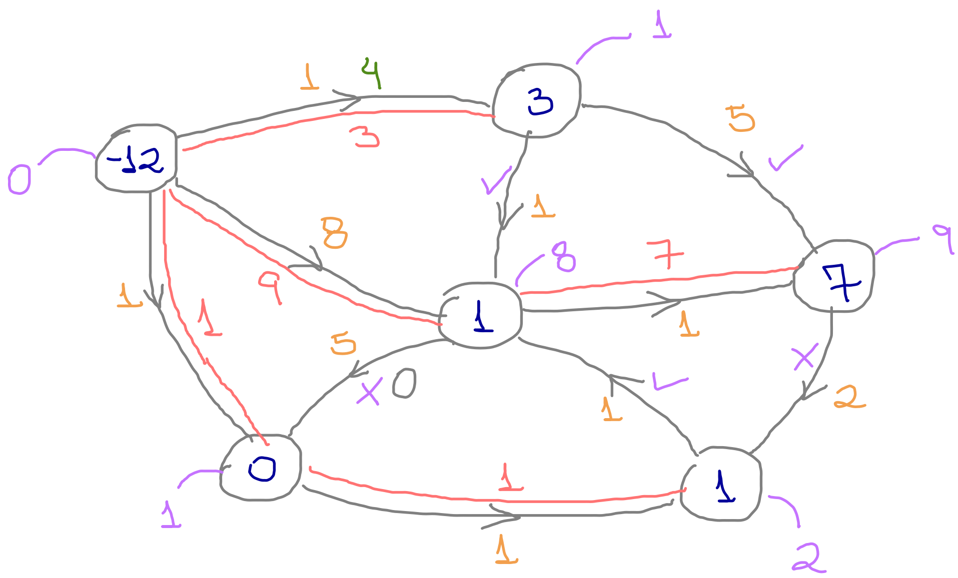
Método Simplex para Redes

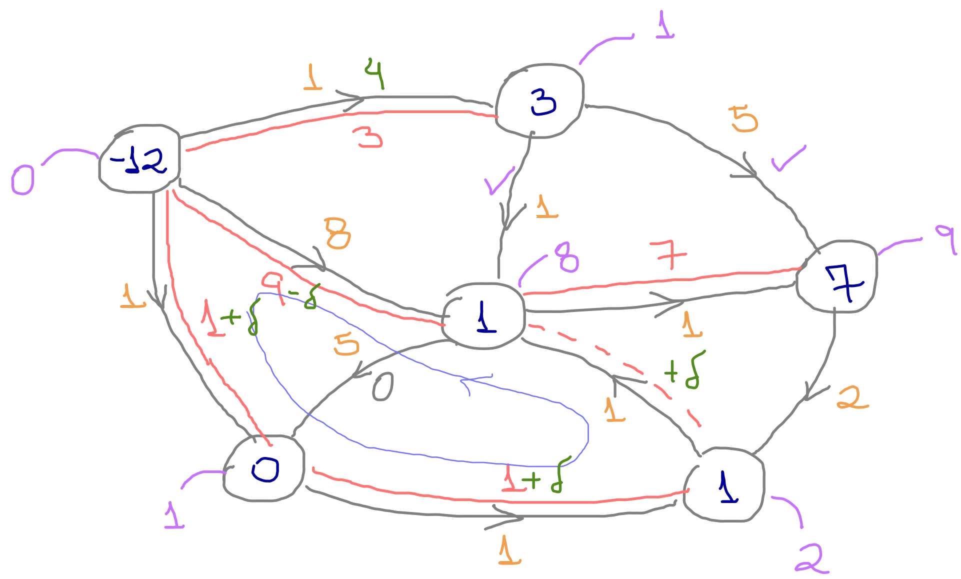


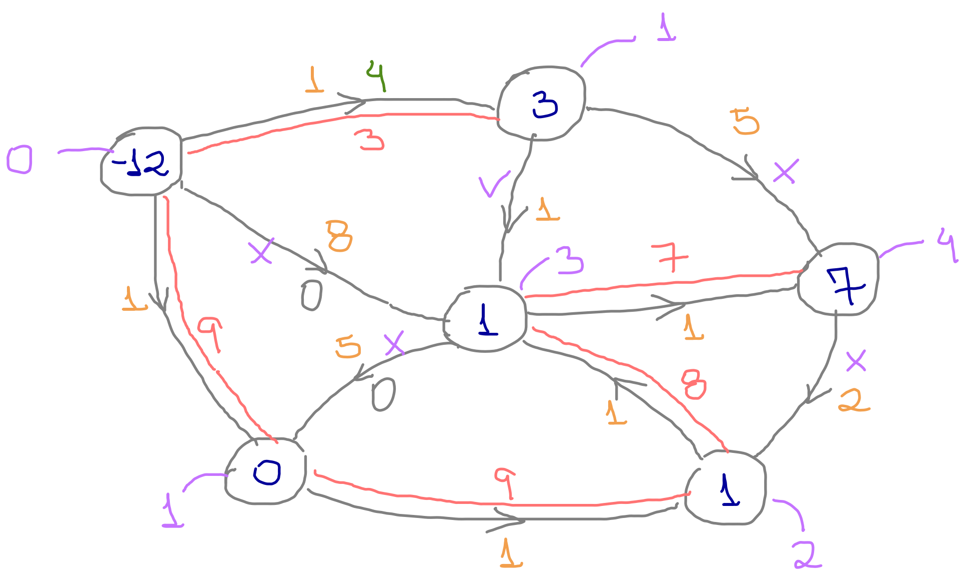


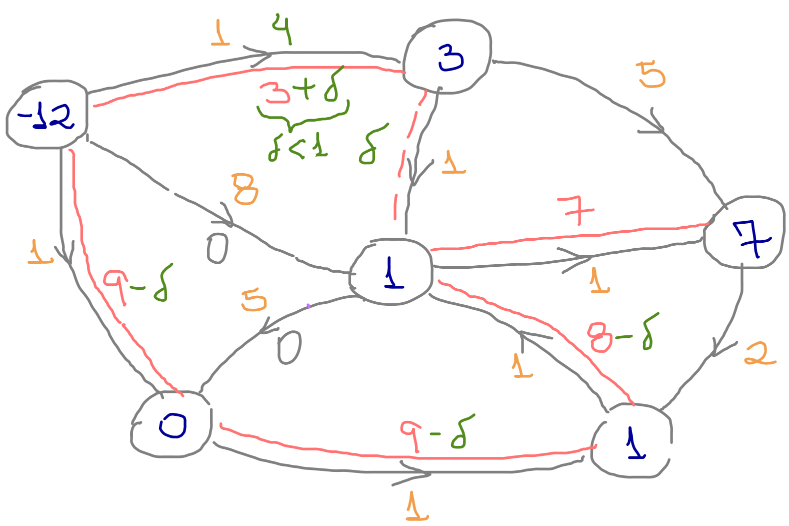
✓ = compensa colocar
X = ñ compensa

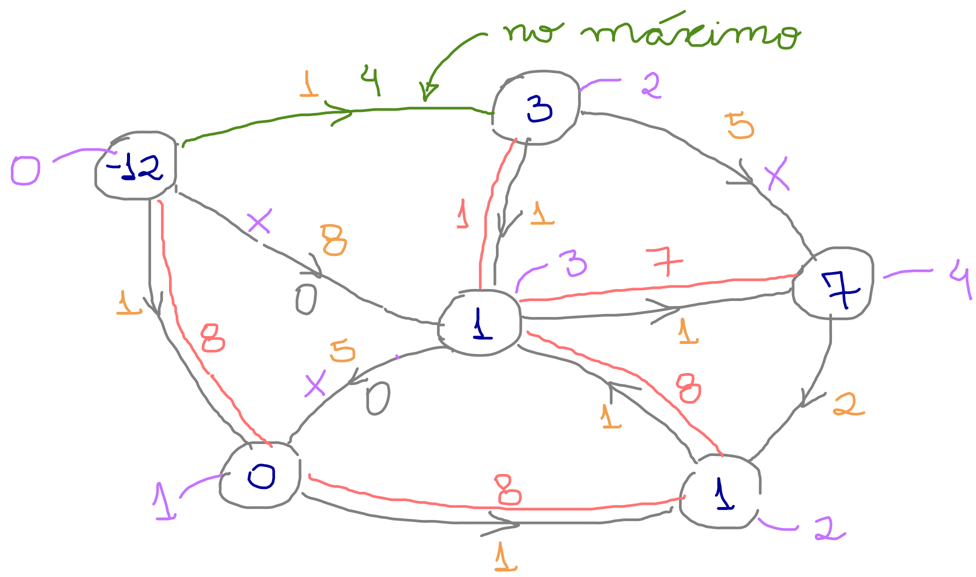






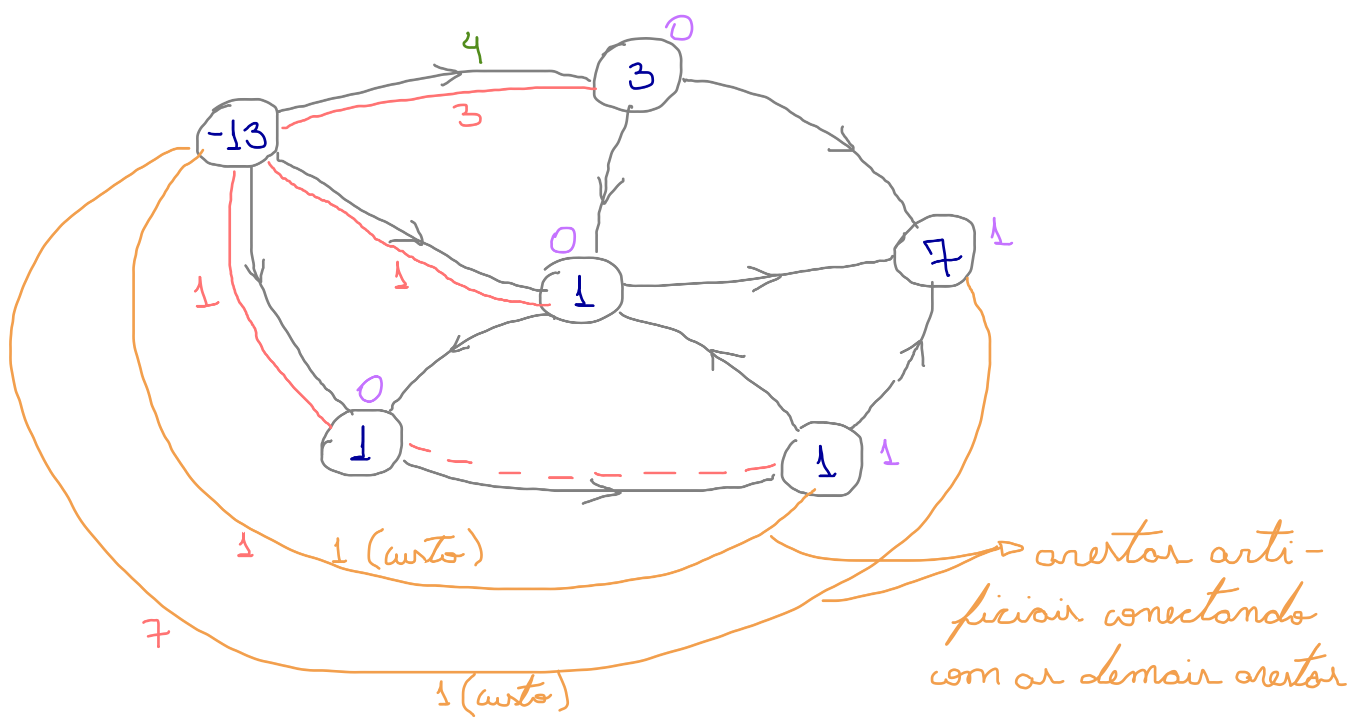


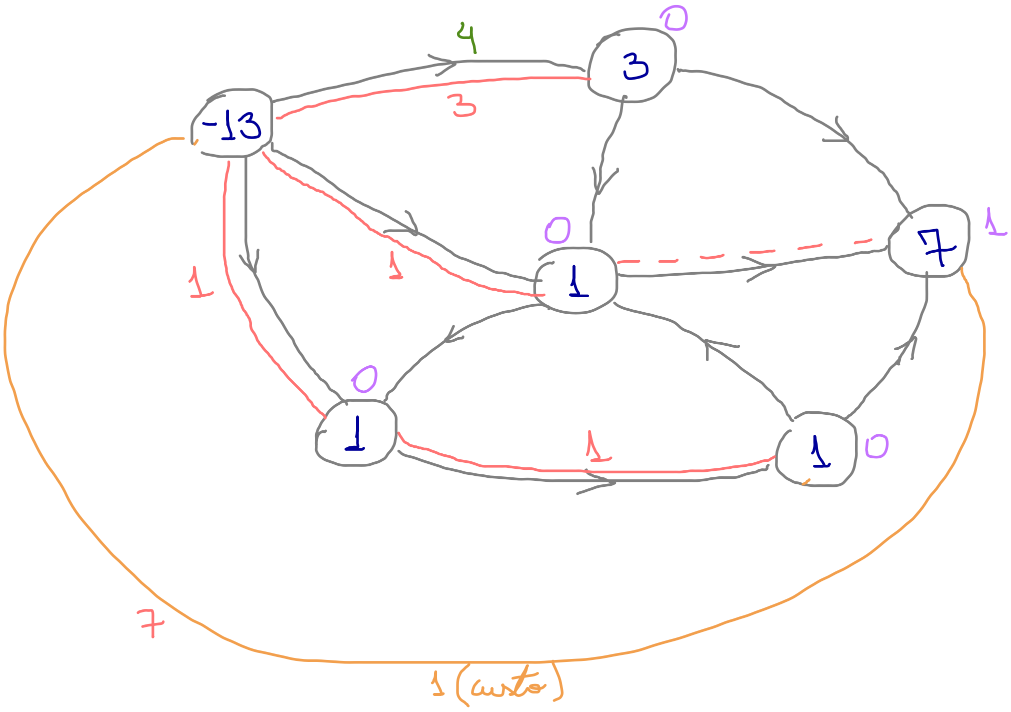


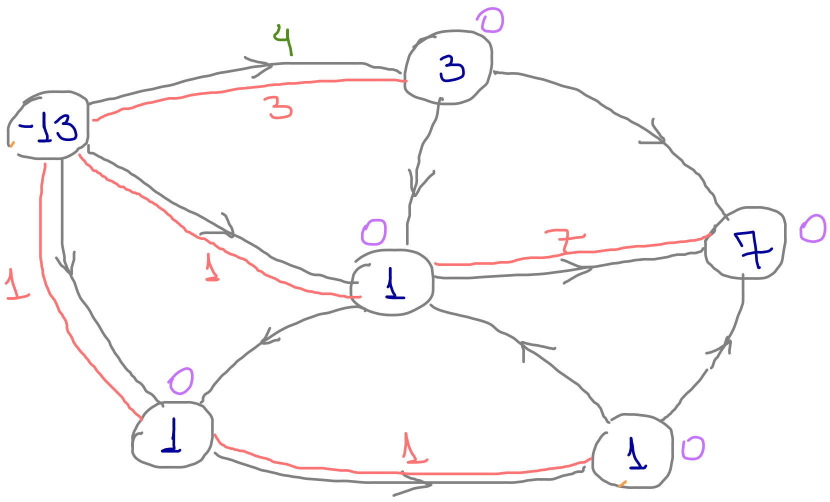


Portanto, estamos na solução ótima. Note que não vale a pena diminuir (ou retirar) a aresta que está no máximo, pois o custo desta aresta é 1 e pago 2 para ir por outro caminho.

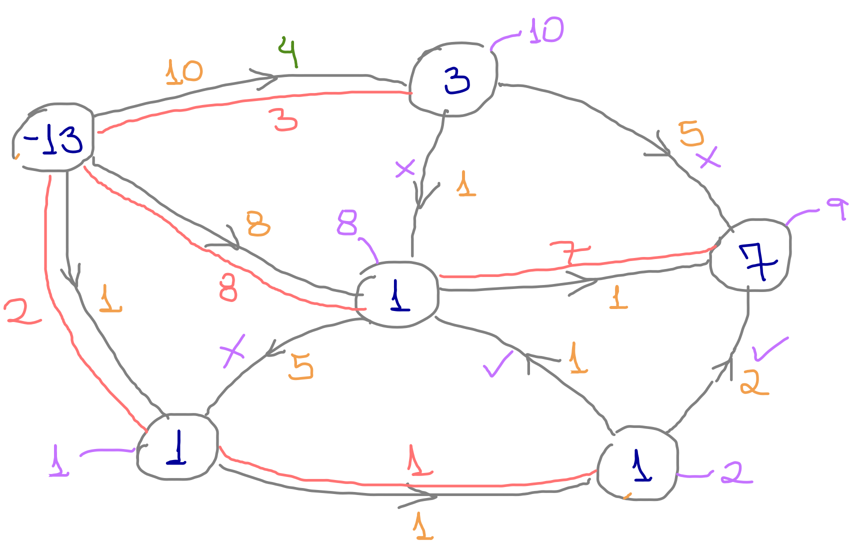
Como escolher a árvore inicial?

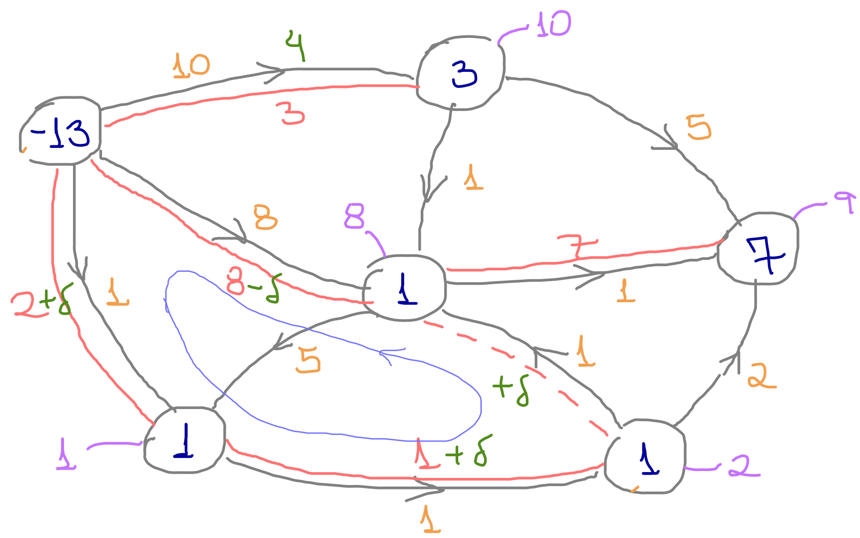


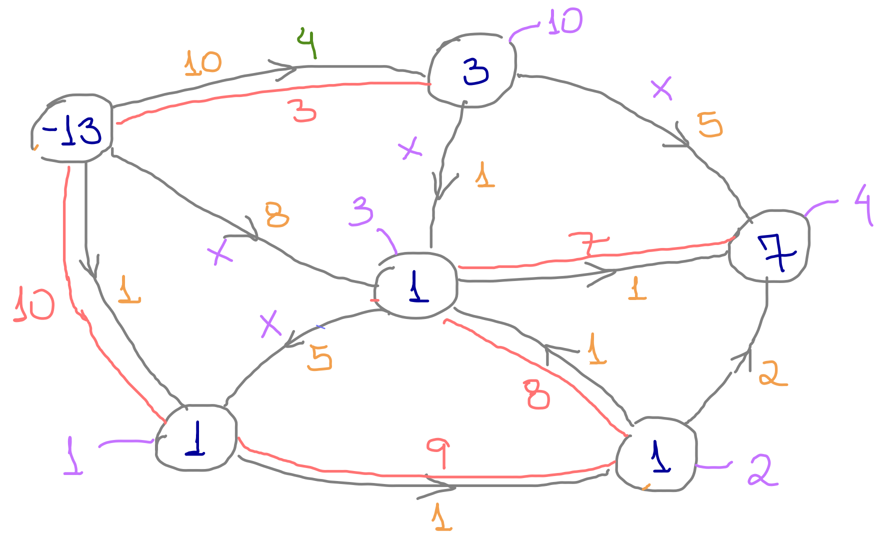




fim da 1ª fase



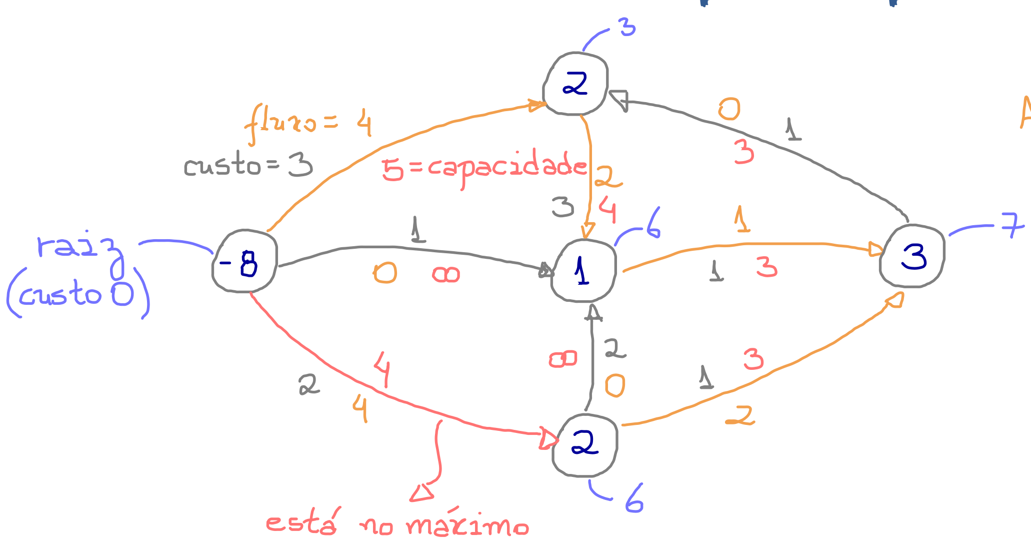




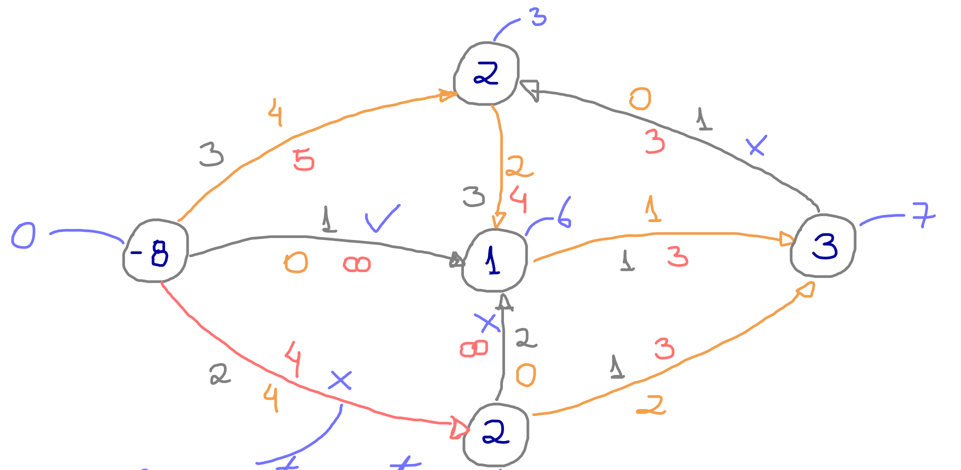
fim

07/11/2013

Método Simplex para Redes



Árvore: grafo conexo sem ciclos

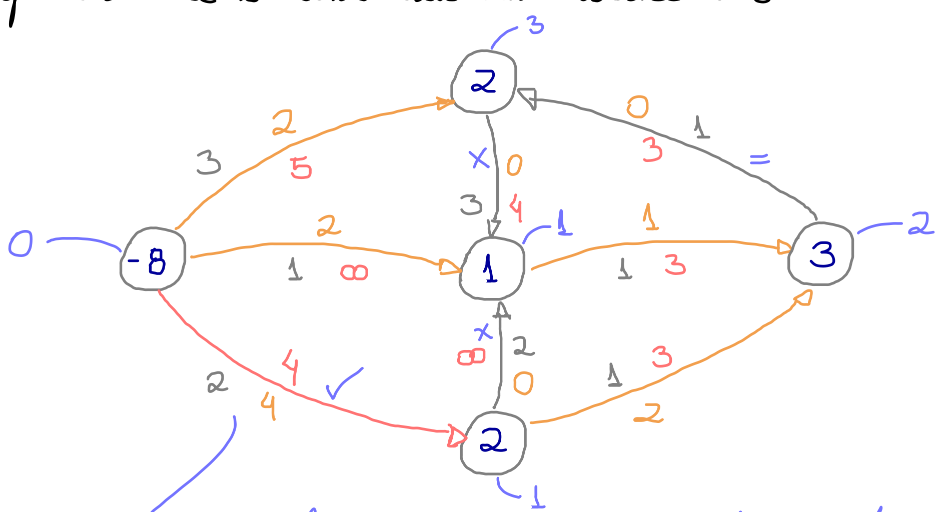


porque esta aresta está no máximo

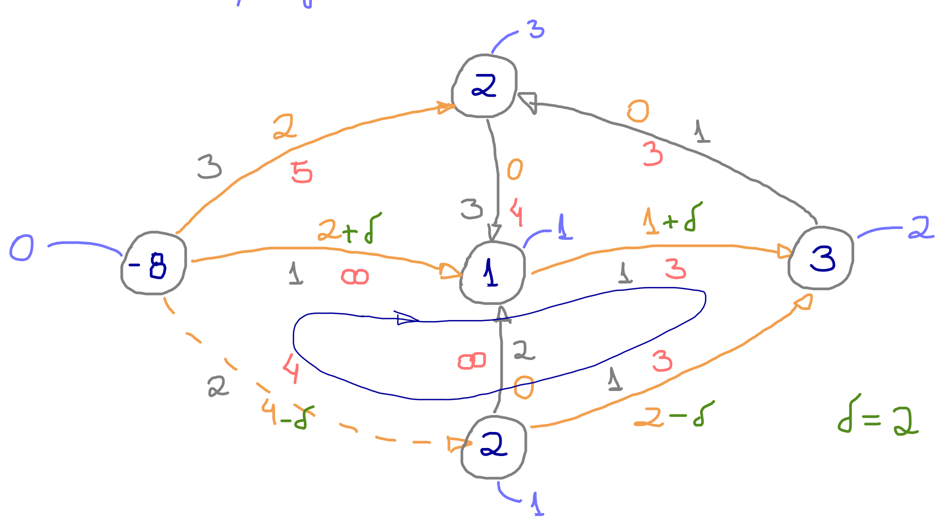
Custo atual:

$4 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 29$

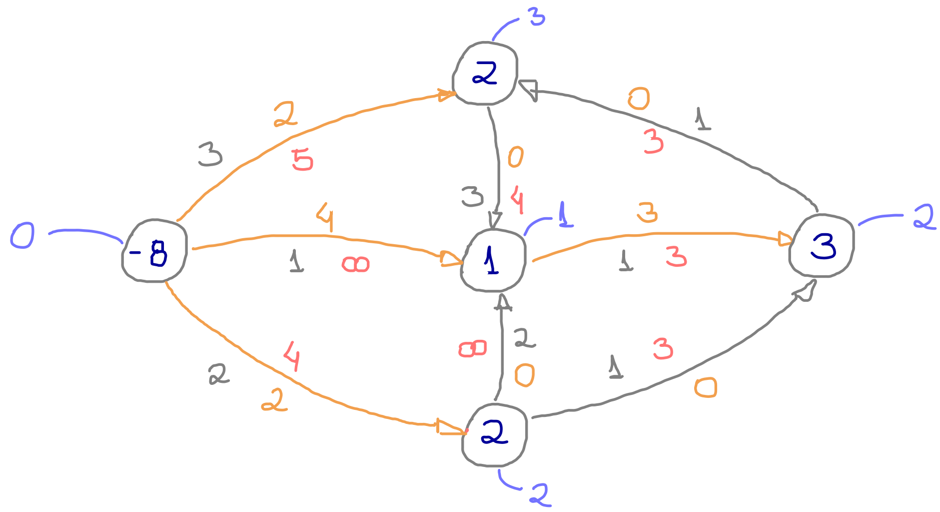
se a aresta não tivesse no máximo valeria a pena colocar ela na árvore e aumentar o seu fluxo, pois seu custo é apenas 2 e o custo atual do vértice é 6.



vale a pena diminuir esta aresta, pois estou pagando 2 e o custo do vértice é 1.



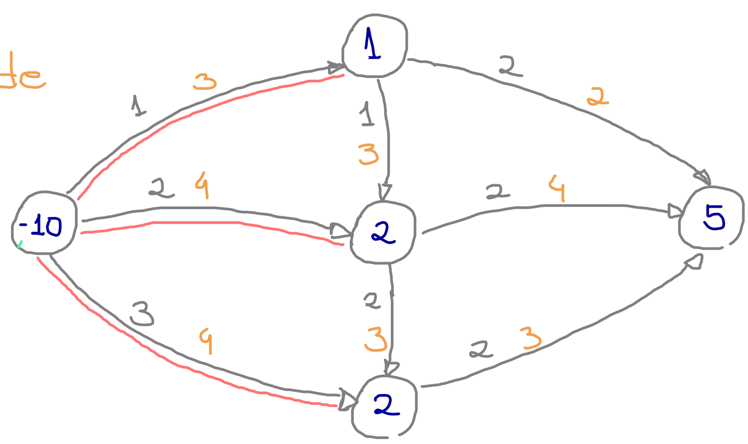
$\delta = 2$



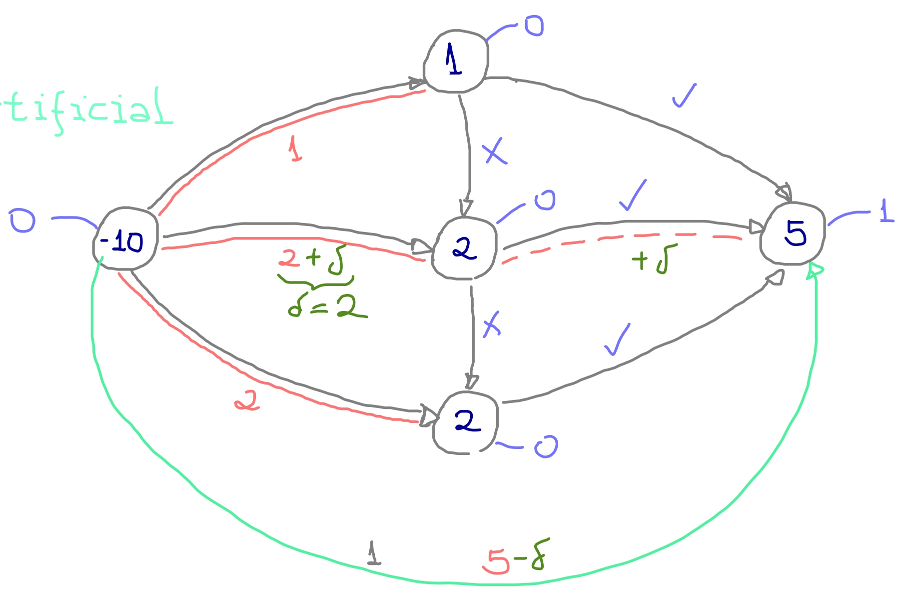
Custo atual: $3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 17$

12/11/2013

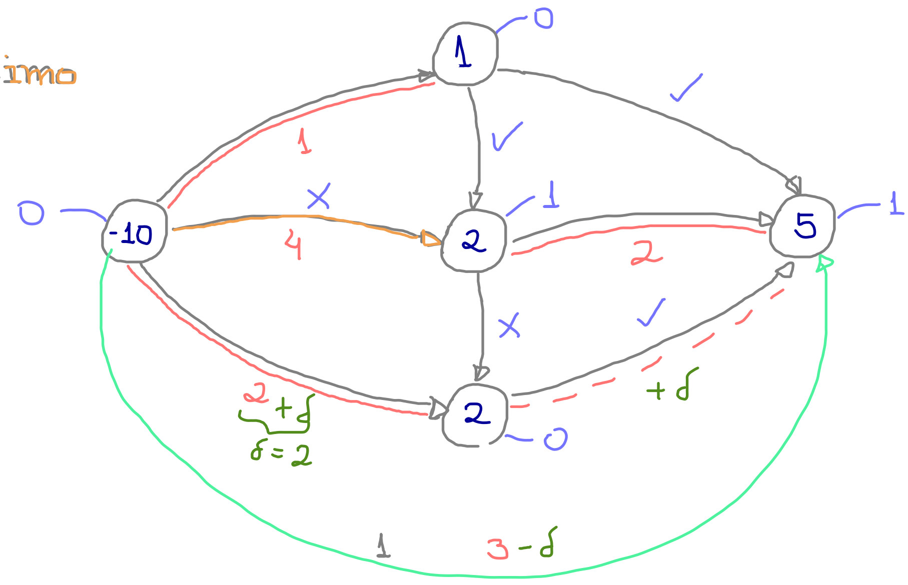
— custo
— capacidade

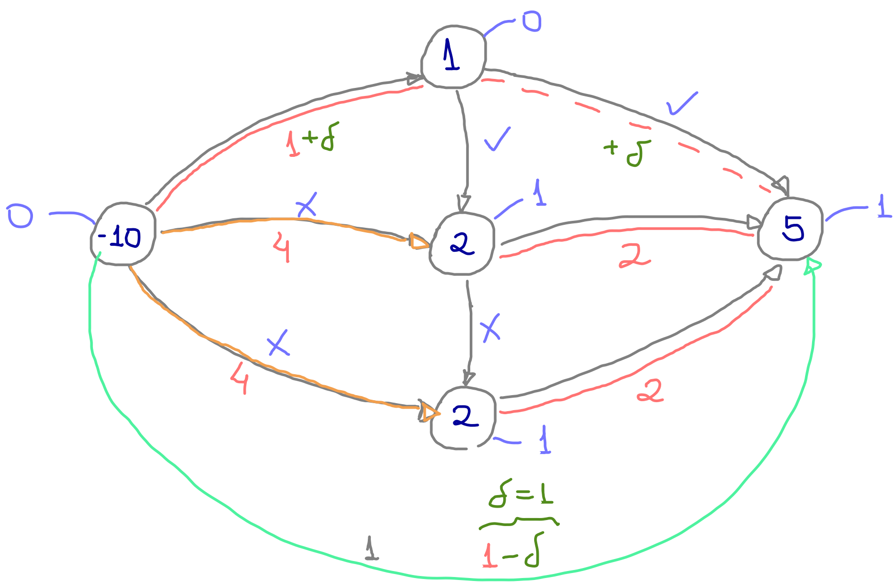


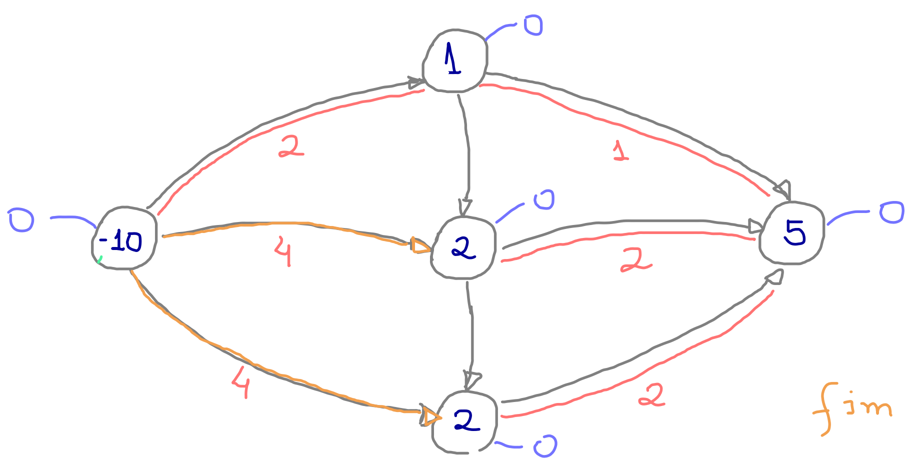
— aresta artificial



— no máximo

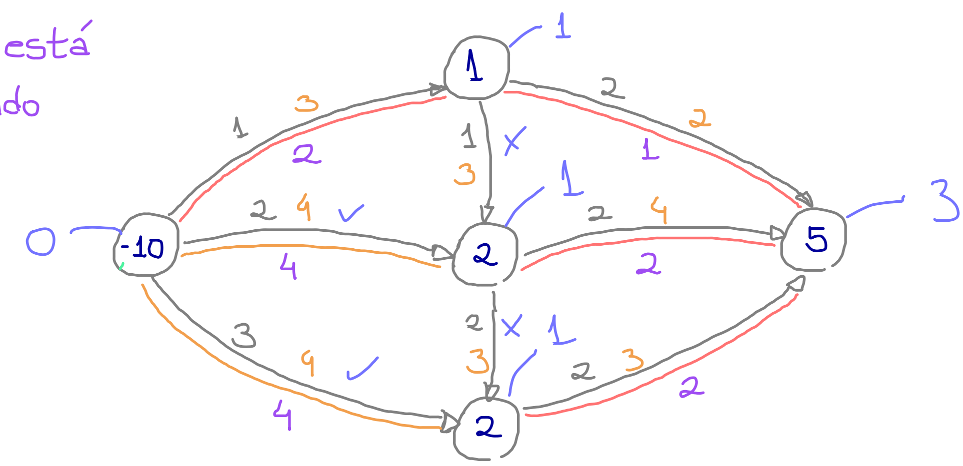


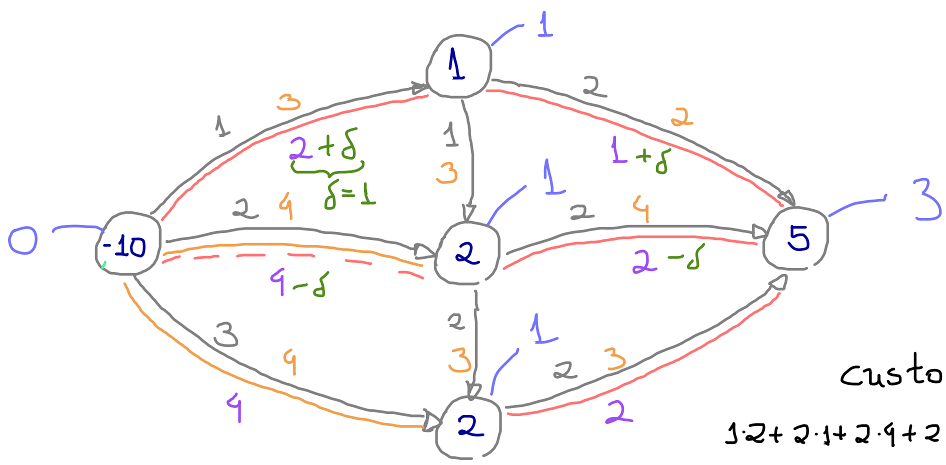




fim da 1ª fase

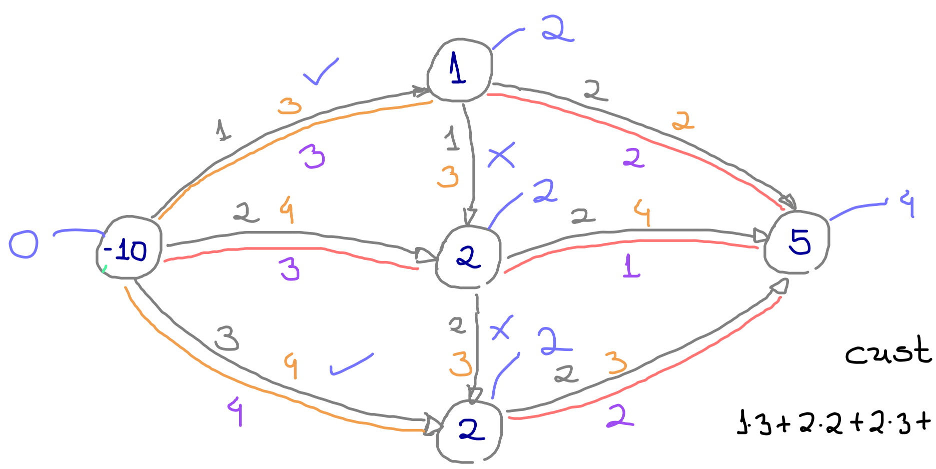
— quanto está passando





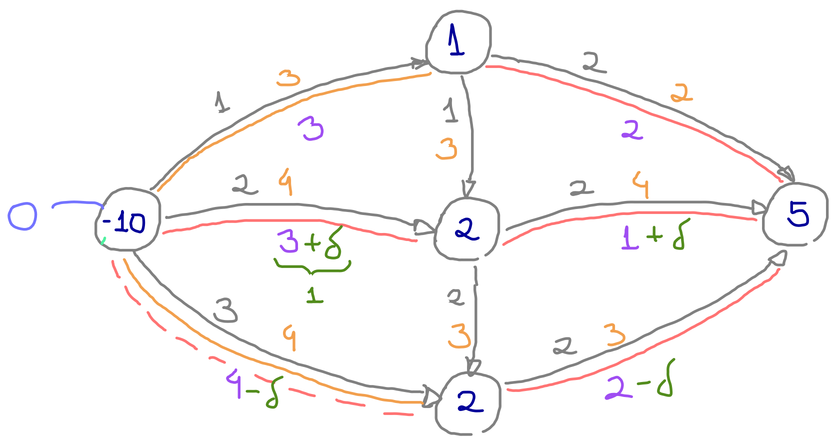
custo atual

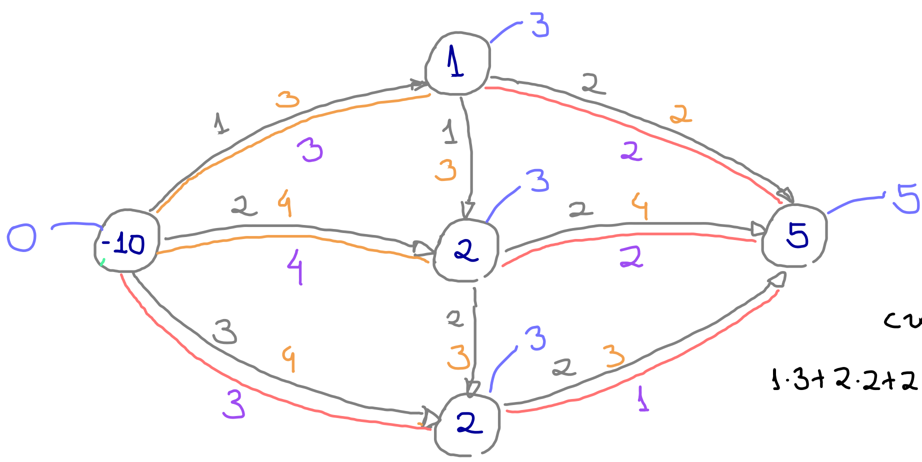
$1\cdot2+2\cdot1+2\cdot4+2\cdot2+3\cdot4+2\cdot2=32$



custo atual

$1\cdot3+2\cdot2+2\cdot3+2\cdot1+3\cdot4+2\cdot2=31$



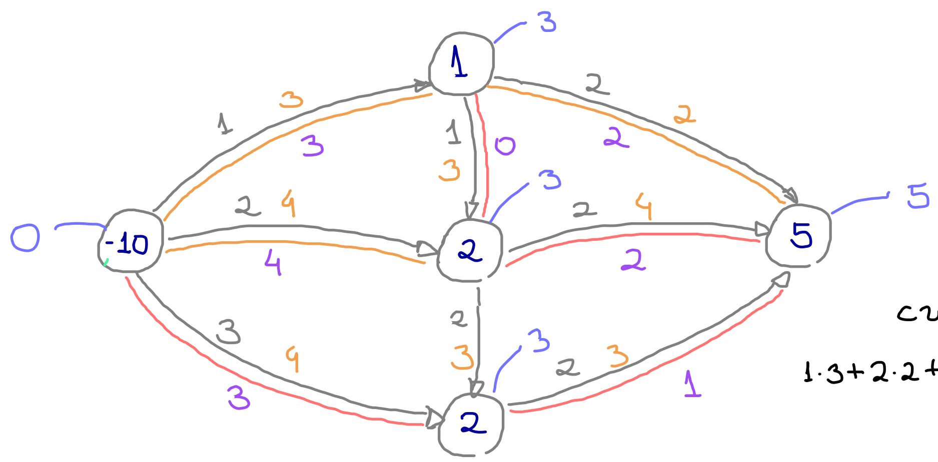


custo atual

$1\cdot3+2\cdot2+2\cdot4+2\cdot2+3\cdot3+2\cdot1=30$

fim

Solução do professor:

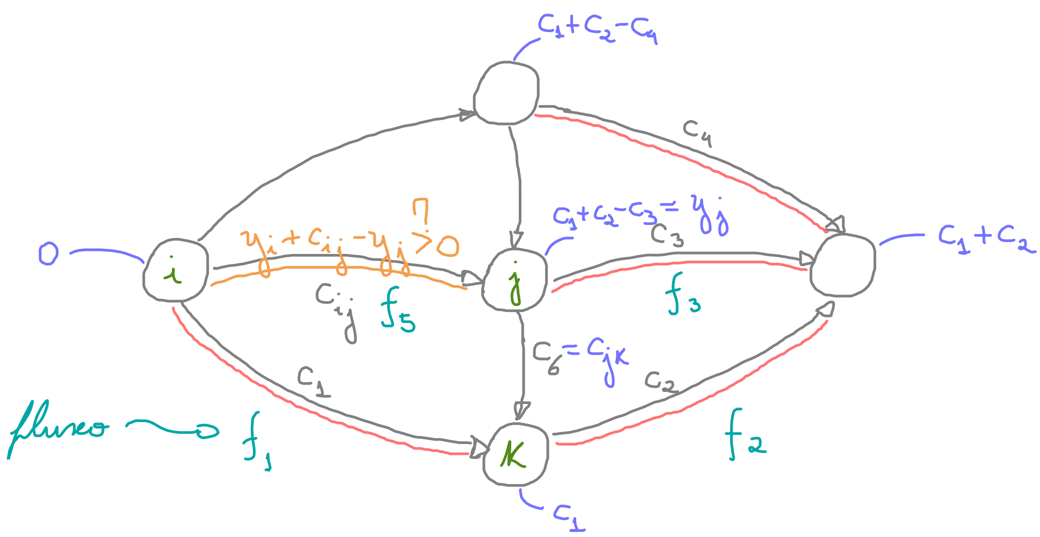


custo atual

$1\cdot 3 + 2\cdot 2 + 2\cdot 4 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 + 2\cdot 1 = 30$

Portanto, o problema é degenerado!

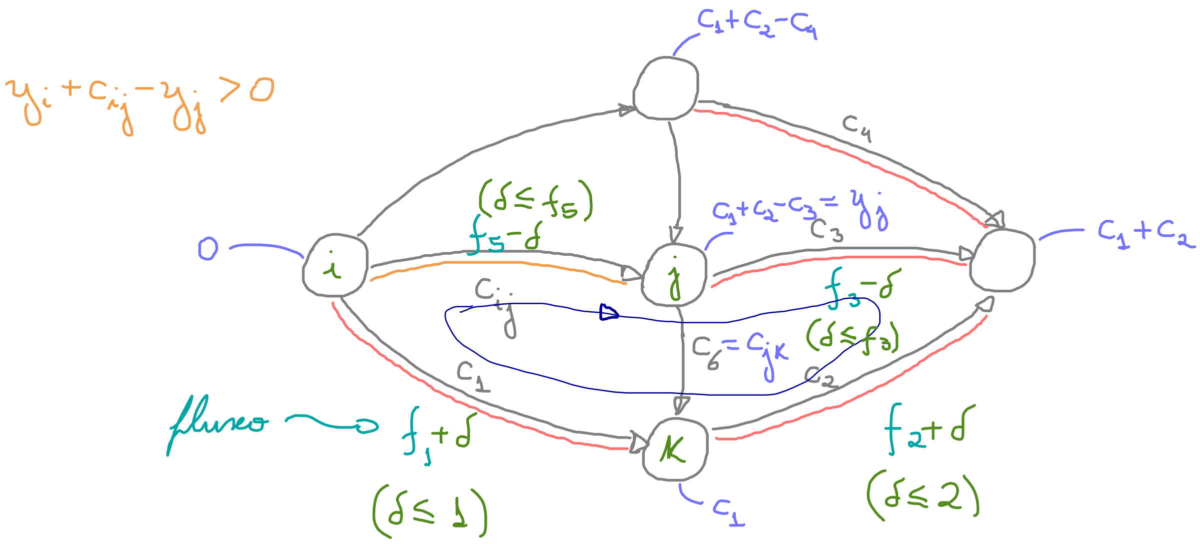
19/11/2013



$y_j + c_{jk} - y_k$ $\begin{cases} < 0, \text{ vale a pena colocar a aresta} \\ > 0, \text{ aresta não entra} \end{cases}$

Se estiver no máximo: $y_j + c_{jk} - y_k$ $\begin{cases} < 0, \text{ não entra} \\ > 0, \text{ entra} \end{cases}$

Note que os y's são a solução do dual.



Esboço do algoritmo: (visão "top-down")

```
while (1) {
      calcule_os_custos_dos_nos( );
      aresta = calcule_aresta_que_entra( );
      if (aresta == -1) return;
      insira_aresta (aresta);
}
```

Representação dos nós e arestas:

```
struct Aresta {
     Noh *inicio;
     Noh *fim;
     int custo;
     int fluxo;
     int capacidade;
     boolean na_arvore;
};
struct Noh {
     int demanda;
     int n_arestas;
     Aresta **arestas;
};
```

Outra representação:

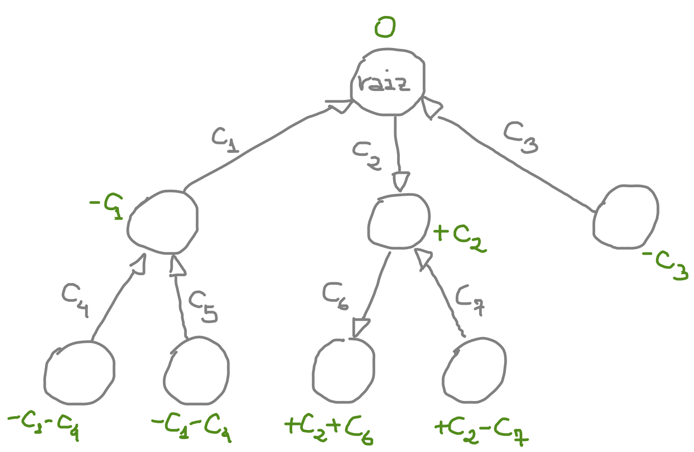
```
struct Aresta {
    int custo;
    int fluxo;
    int capacidade;
    Noh *inicio;
    Noh *fim;
    Aresta *proxima_no_inicio;   /* lista ligada entre as arestas do nó início */
    Aresta *proxima_no_fim;      /* lista ligada entre as arestas do nó fim */
    bool na_arvore;
};
struct Noh {
    int demanda;
    int custo;
    Aresta *primeira_aresta;     /* apontador para a aresta que leva ao pai */
    Aresta *aresta_para_o_pai;   /* apontador para a aresta que leva ao pai */
};


void calcule_os_custos_dos_nos()
{
    calcule_os_custos_recursivos(raiz)
    .
    .
    .
}

void calcule_os_custos_recursivos(Noh* noh)
{
    para cada aresta A ligando
    nó a um filho na árvore
    if (A->inicio == noh) {
        A->fim->custo = noh->custo + A->custo;
```

```
            calcule_os_custos_recursivo (A->fim);
        } else {
            A-> inicio -> custo = noh -> custo - A -> custo;
            calcule_os_custos_recursivo (A-> inicio);
        }
}
```

21/11/2013

O algoritmo SIMPLEX para redes...

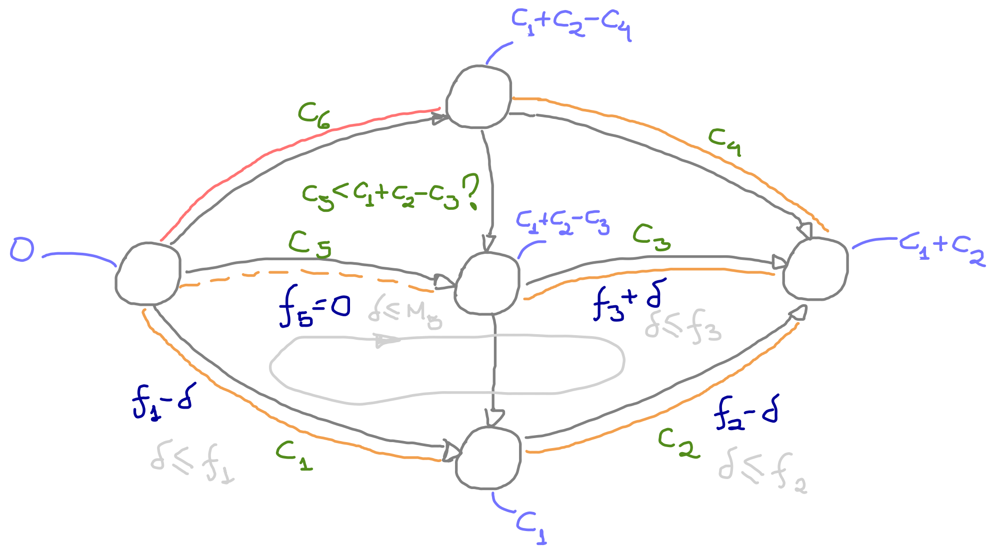
algoritmos x estrutura de dados



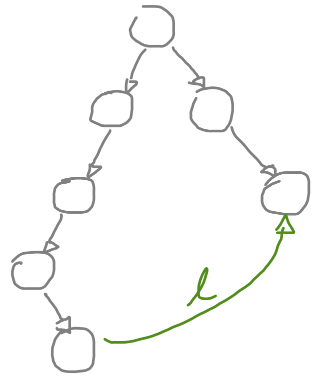

```
class Noh
{
    int custo;
    List<Aresta> filhos;
};
class Aresta
{
    int custo;
    Noh inicio;
    Noh fim;
};
```

```
void custos (Noh raiz)
{
    raiz.custo = 0;
    custos_recursivo (raiz);
}
void custos_recursivo (Noh noh)
{
        para cada aresta a ∈ noh.filhos
        {
            if(a.inicio == noh) {
                a.fim.custo = noh.custo + a.custo;
                custos_recursivo (a.fim);
            }
```

```
            else {
                a.inicio.custo = noh.custo - a.custo;
                custos_recursivo(a.inicio);
            }
        }
}
```




```
class Noh
{
    int custo;
    List<Aresta> filhos;
    int prof; /*profundidade*/
    Noh pai;
};

class Aresta
{
    int custo;
    Noh inicio;
    Noh fim;
    bool na_arvore;
    int fluxo;
    int capacidade
};

List < Noh > ciclo (Aresta entrante)
{
    return ciclo_recursivo (List<Noh>(entrante.inicio,
                                      entrante.fim) );
}

List < Noh > ciclo_recursivo(List < Noh > l)
{
    Noh a = begin(l);
    Noh b = end(l);
    if (a.prof > b.prof)
        return ciclo_recursivo(a.pai + l);
    if (a.pai == b.pai)
```



```
        return (a.pai + l);
    else
        return ciclo_recursivo (a.pai + l + b.pai);
}
```