MAC0338 – Análise de Algoritmos

SEGUNDO SEMESTRE DE 2018

Terceira Prova – 4 de dezembro

Nome do aluno: ____ **Curso**: ______________

Assinatura: ____

No. USP: _________________________ **Professor**: __________________________________

Instruções

1. **Escreva suas iniciais no canto inferior direito de TODAS as folhas, sob o risco de perder 0,5 ponto em caso de não cumprimento.**
2. Não destaque as folhas deste caderno.
3. A prova pode ser feita a lápis.
4. A legibilidade também faz parte da nota! **Sua prova será escaneada**, então não utilize as bordas das folhas e deixe a escrita bem visível.
5. A prova consta de quatro questões. Verifique antes de começar a prova se o seu caderno de questões está completo.
6. Não é permitido o uso de folhas avulsas para rascunho.
7. Não é necessário apagar rascunhos no caderno de questão mas especifique qual é a resposta e qual é o rascunho.
8. A prova é sem consulta e tem duração de duas horas.
9. Você pode usar, sem ter que escrever, algoritmos vistos em aula. Neste caso, antes de usá-lo, deixe claro qual é o protótipo do algoritmo, o que ele devolve/faz, e quanto tempo ele consome em função de sua entrada.

Não escrever nesta parte da folha

Questão	Vale	Nota
1	2,5	
2	2,5	
3	2,5	
4	2,5	
Total		

Boa prova!

1. [2,5 pontos]
Considere o algoritmo de Floyd-Warshall visto em aula, para o problema de encontrar caminhos de comprimento mínimo entre todos os pares de vértices de um grafo orientado G, com vértices $1, \ldots, n$, em que cada arco e tem comprimento $c_e \geq 0$. Um subproblema importante para este algoritmo era o seguinte: dados vértices $i, j \in [n]$ e um certo $k \in \{0, \ldots, n\}$, determine o comprimento mínimo de um caminho de i a j em que todo vértice interno está em $[k]$.

   (a) Escreva o pseudocódigo de uma modificação do algoritmo de Floyd-Warshall que recebe G e c e devolve uma matriz D de tamanho $n \times n$, tal que $D[i][j]$ é o comprimento mínimo de um caminho de i a j, **e também algum dado extra** (por exemplo, um vetor ou matriz), que permita recuperar tais caminhos ótimos.

   (b) Escreva o pseudocódigo de um algoritmo que recebe G e c como acima, assim como o certo **dado extra**, e um par de vértices i e j e imprima um caminho de comprimento mínimo de i a j, se existir.

2. [2,5 pontos]
   Uma sequência de n operações é executada em uma estrutura de dados. A i-ésima operação custa i se i é uma potência de 2, e 1 caso contrário. (Começamos da 1ª operação, não da 0ª operação.) Determine o tempo amortizado por operação. **Justifique** sua resposta.

3. [2,5 pontos]
   Considere a análise amortizada de uma tabela dinâmica, como vista em aula, em que fazemos n operações de inserção num vetor, que é realocado com o dobro do tamanho cada vez que se precisa fazer uma inserção num vetor que está lotado (seguido de uma cópia do vetor antigo no novo). Vimos em aula uma análise amortizada por créditos em que os únicos custos reais considerados são os de preencher uma posição do vetor com um elemento, isto é, preencher uma posição do vetor com um elemento custava \$1, e alocações de vetores não tinham custo. Considere agora que alocar um vetor de tamanho k custa $\$k$, além dos custos anteriores de \$1 por preenchimento de posição do vetor. Modifique a análise amortizada por créditos vista em sala para mostrar que o custo amortizado por operação continua sendo $O(1)$.

4. [2,5 pontos]
Para cada uma das afirmações abaixo, determine se ela é verdadeira ou falsa. Se for falsa, explique o que há de errado com a afirmação. Note que uma afirmação falsa pode conter fatos verdadeiros, e **faz parte do seu trabalho delinear quais partes são verdadeiras e quais são falsas**.

   (a) O problema Π de decidir se um dado inteiro $n > 1$ é primo está na classe coNP, pois basta usar um divisor não-trivial (um divisor d de n tal que $1 \neq d \neq n$) como certificado de resposta negativa, e portanto Π não está em NP.

   (b) O problema Π de, dado um grafo G, decidir se G tem um circuito hamiltoniano, é NP-difícil, pois existe uma redução do problema Satisfatibilidade para Π.

   (c) O problema Π de, dados um grafo G e um inteiro $k > 0$, determinar se G tem uma clique de tamanho $\leq k$, é NP-completo, porque Π pode ser reduzido ao problema Satisfatibilidade, que é NP-completo pelo Teorema de Cook e Levin.

   (d) Todo problema (de decisão) que está em P pode usar a própria instância com resposta positiva como certificado de resposta positiva, e toda instância com resposta negativa como certificado de resposta negativa, e portanto P está contido em NP $\cap$ coNP.

   (e) O problema Π de, dados $n \in \mathbb{N}$ e custos $c_S \in \mathbb{N}$ para cada subconjunto S de $[n]$, encontrar um subconjunto de $[n]$ de custo mínimo, não está em P, pois qualquer algoritmo que resolve Π consome tempo $O(2^n)$, e portanto Π está na classe NP dos problemas não polinomiais.