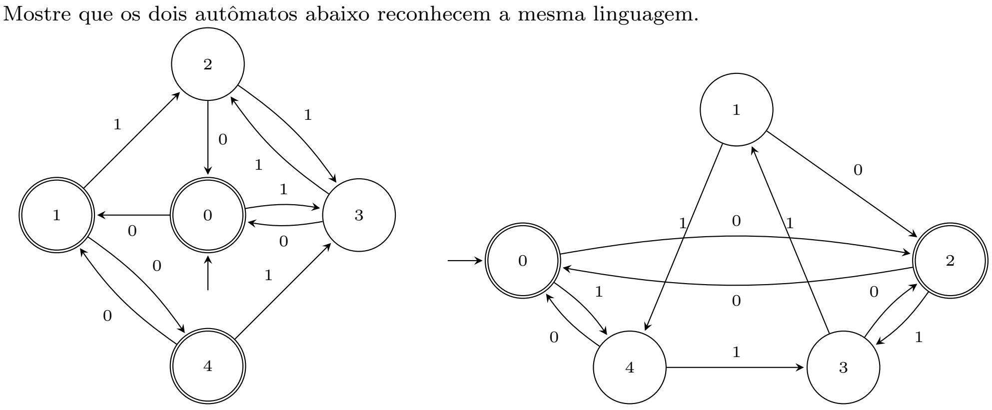
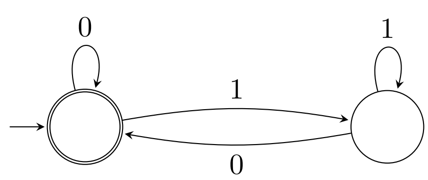
MAC-414 – Tomatinhos — Prova 2 – 3/11/2009
Resoluções

1. Mostre que os dois autômatos abaixo reconhecem a mesma linguagem.



Minimizando os dois autômatos (com o algoritmo), imediatamente se chega a autômatos isomorfos a



Assim, os dois autômatos reconhecem a mesma linguagem.

2. Sobre uma linguagem regular L você tem a seguinte informação:

   - as palavras $\lambda, a, aa, ba, bb, abb, bbb$ **estão** em L,

     e

   - as palavras $b, ab, aab, bba, aabb$ **não** estão em L.

   Mostre que um autômato determinístico que reconheça L tem que ter pelo menos 5 estados. Já vale bastante se provar que são necessários pelo menos 4 estados.

   O autômato minimal tem um estado para cada classe de $\equiv_L$; assim, basta mostrar que existem ao menos 5 classes. O conjunto é suficientemente pequeno para se procurar, por inspeção, informações sobre as classes. Na tabela abaixo, a linha x e coluna y contém:

   - $\checkmark$ se $xy \in L$
   - $\times$ se $xy \notin L$
   - ? se nada se pode afirmar sobre xy em relação a L

   O importante é que se duas palavras são tais que as respectivas linhas diferem em conter $\checkmark$ e $\times$, elas não são equivalentes. A tabela não contém todas as linhas possíveis, e apresenta só um conjunto suficiente de colunas.

	λ	a	bb	abb
λ	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
a	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$
aa	$\checkmark$	?	$\times$	?
b	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	?
bb	$\times$	$\times$	?	?

3. Dadas linguagens L, H, define-se a linguagem
$\mathcal{P}(L,H) = \{x \in \Sigma^* \mid \text{existe } y \in H \text{ tal que } xy \in L\}$. Em particular, $\mathcal{P}(L,\Sigma^*) = \text{Pref}(L)$. Mostre que

*se L é regular, então para **qualquer** linguagem H, $\mathcal{P}(L,H)$ é regular.*

Note que, como H não é "dada", não dá para procurar um *algoritmo* que transforme um autômato para L em um para $\mathcal{P}(L,H)$; ainda assim, é possível descrever um tal autômato!

Seja $\mathcal{A} = (K,\Sigma,\delta,s,F)$ um AD reconhecendo L. Seja $T = (p \in K \mid \text{existe}\, y \in H \text{ tal que}\, \delta(p,y) \in F\}$, e considere $\mathcal{A}' = (K,\Sigma,\delta,s,T)$. Vamos mostrar que $\mathcal{A}'$ reconhece $\mathcal{P}(L,H)$.

- Seja x uma palavra reconhecida por $\mathcal{A}'$; ou seja, $\delta(s,x) = p \in T$. Por definição de T, existe $y \in H$ tal que $\delta(p,y) \in F$, logo $\delta(s,xy) \in F$. Segue que $xy \in L$, portanto $x \in \mathcal{P}(L,H)$.
- Seja $x \in \mathcal{P}(L,H)$; então existe $y \in H$ tal que $xy \in L$, logo $\delta(s,xy) \in F$. Denotando $p = \delta(s,x)$, vem que $\delta(p,y) = \delta(s,xy) \in F$. Segue que $p \in T$, portanto $\mathcal{A}'$ reconhece x.

4. Para uma palavra w sobre o alfabeto $\{0,1\}$, seu *complemento* $\bar{w}$ é o que resulta de trocar em w todos os 0's por 1's e vice-versa. Para as linguagens abaixo, sobre esse alfabeto, decida quais são regulares e quais não, justificando sua decisão:

(a) $\{w \in \Sigma^* \mid w = \bar{w}\}$
Essa linguagem é simplemente λ, claro que regular.

(b) $\{w\bar{w} \mid w \in \Sigma^*\}$
Se fosse regular, sua interseção com 0^*1^* também seria. Mas isso é $\{0^n1^n \mid n \geq 0\}$ que sabemos não ser regular. Portanto, a linguagem não é regular.

(c) Dada uma linguagem regular L, a linguagem $\{\bar{w} : w \in L\}$
A linguagem (vamos denotar por $\bar{L}$) é regular. Duas formas de provar:

i. Dado um autômato determinístico para L, define-se um novo autômato, com mesmos K, s, F, e função de transição

$$\delta'(p,\sigma) = \delta(p,\bar{\sigma})$$

É fácil provar por indução que para toda palavra w, $\delta'(s,w) = \delta(s,\bar{w})$. Logo, $\delta'(s,w) \in F \Leftrightarrow \delta(s,\bar{w}) \in F$, o que mostra que o novo autômato reconhece $\bar{L}$.

ii. Dada uma ER para L, podemos transformá-la numa para $\bar{L}$ trocando todas as ocorrências de 0 por 1 e vice-versa. Para mostrar que isso funciona, define-se a tranformação recursivamente: dada uma ER e, produz uma outra , $B(e)$, por

A. $B(\emptyset) = \emptyset$, $B(\sigma) = B(\bar{\sigma})$.

B. $B(e_1 + e_2) = B(e_1) + B(e_2)$, $B(e_1e_2) = B(e_1)B(e_2)$, $B(e^*) = B(e)^*$.

É rotina provar que a $\mathcal{L}(B(e)) = \overline{\mathcal{L}(e)}$.