

Disciplina: MAE0212: Introdução a Probabilidade e Estatística II

Professora: Silvia Ferrari

Nome:

Nota:

Use os espaços em branco, inclusive o verso das páginas, para responder às questões. Mostre os desenvolvimentos, não apenas as respostas.

Provinha 1 – Gabarito

1. Uma máquina produz cilindros cujos diâmetros seguem uma distribuição normal com média 50 mm e desvio padrão 2 mm. Os diâmetros de uma amostra aleatória de quatro cilindros são medidos a cada hora. A média da amostra é usada para decidir se o processo de fabricação está operando satisfatoriamente. Aplica-se a seguinte regra de decisão: “Se o diâmetro médio da amostra de quatro cilindros for maior ou igual a 52 mm, ou menor ou igual a 48 mm, deve-se parar a produção. Se o diâmetro médio estiver entre 48 e 52 mm, a produção continua”.

- a) (2 pontos) Qual é a probabilidade de uma parada desnecessária, ou seja, de parar a produção se a média dos diâmetros permanecer em 50 mm?
- b) (2 pontos) Qual é a probabilidade de a produção continuar se a média dos diâmetros dos cilindros produzidos pela máquina se deslocar para 53 mm?

- a) Defina $X = \text{“diâmetro do cilindro em mm”}$ e, então, segue que

$$X \sim N(50, 2^2) \Rightarrow \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^4 X_i}{4} \sim N\left(50, \frac{2^2}{4}\right).$$

Estamos interessados na probabilidade de ocorrência de uma parada desnecessária, que é dada por

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}(48 \leq \bar{X} \leq 52) &= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{48 - 50}{1} \leq Z \leq \frac{52 - 50}{1}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}(-2 \leq Z \leq 2) = 1 - 2 \cdot \mathbb{P}(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.0455. \end{aligned}$$

- b) Agora, queremos a probabilidade do processo continuar, dado que a média dos diâmetros dos cilindros se deslocou para 53 mm. Neste caso, a distribuição de referência é $\bar{X} \sim N\left(53, \frac{2^2}{4}\right)$, pois a distribuição de X mudou.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(48 \leq \bar{X} \leq 52) &= \mathbb{P}\left(\frac{48 - 53}{1} \leq Z \leq \frac{52 - 53}{1}\right) \\ &= \mathbb{P}(-5 \leq Z \leq -1) = \mathbb{P}(-5 \leq Z \leq 0) - \mathbb{P}(-1 \leq Z \leq 0) \\ &= \mathbb{P}(0 \leq Z \leq 5) - \mathbb{P}(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 - 0.34134 = 0.1586. \end{aligned}$$

2. (2 pontos) A confiabilidade de um componente é a probabilidade de que ele funcione sob as condições desejadas. Uma amostra aleatória simples de 1000 desses componentes é extraída e cada componente testado. Calcule a probabilidade de obter pelo menos 2% de itens defeituosos na amostra supondo que a confiabilidade dos itens seja 0.995.

Note que, se a confiabilidade é 0.995, então a probabilidade do componente ser defeituoso é 0.005. Defina $X_i = 1$ se o item da i -ésima amostra é defeituoso e $X_i = 0$ caso contrário. Observe que $\bar{X}$ é a proporção de itens defeituosos na amostra. Estamos interessados na probabilidade de obter pelo menos 2% de itens defeituosos. Note que

$$\bar{X} \sim N\left(0.005, \frac{0.005(1 - 0.005)}{1000}\right).$$

Assim, a probabilidade de obter pelo menos 2% de itens defeituosos na amostra é

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bar{X} \geq 0.02) &\approx \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{0.02 - 0.005}{\sqrt{0.005(1 - 0.005)/1000}}\right) \\ &\approx \mathbb{P}(Z \geq 6.725) \approx 1 - \mathbb{P}(Z \leq 6.725) \\ &\approx 1 - [0.5 + \mathbb{P}(0 \leq Z \leq 6.725)] \approx 0.\end{aligned}$$

3. A capacidade máxima de um elevador é de 640 kg. Suponha que os pesos dos passageiros sejam normalmente distribuídos com média 75 kg e desvio padrão 10 kg.

- a) (2 pontos) Qual é a probabilidade de que 8 passageiros ultrapassem o limite de peso do elevador?
- b) (2 pontos) Se o revestimento do piso do elevador for trocado por um que pesa 40 kg a mais do que aquele que for retirado, qual será a probabilidade de que 8 pessoas ultrapassem o limite de peso do elevador?

a) Defina $X = \text{"peso do passageiro em kg"}$, temos que

$$X \sim N(75, 10^2) \Rightarrow \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^8 X_i}{8} \sim N\left(75, \frac{10^2}{8}\right).$$

Estamos interessados na probabilidade de que o peso dos 8 passageiros ultrapasse o limite de peso de 640 kg, isto é

$$\sum_{i=1}^8 X_i > 640 \Rightarrow \bar{X} > \frac{640}{8} = 80,$$

assim, segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\bar{X} > 80) &= \mathbb{P}\left(Z > \frac{80 - 75}{10/\sqrt{8}}\right) \\ &\approx \mathbb{P}(Z > 1.4142) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 1.4142) \\ &= 1 - [0.5 + \mathbb{P}(0 \leq Z \leq 1.4142)] = 0.07927. \end{aligned}$$

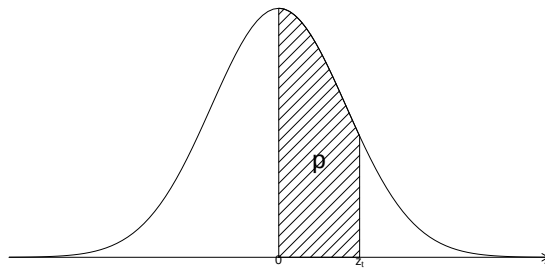
b) Note que, neste caso, o limite de peso do elevador passa a ser de 600 kg. Neste caso,

$$\sum_{i=1}^8 X_i > 600 \Rightarrow \bar{X} > \frac{600}{8} = 75,$$

assim, segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\bar{X} > 75) &= \mathbb{P}\left(Z > \frac{75 - 75}{10/\sqrt{8}}\right) \\ &= \mathbb{P}(Z > 0) = 0.5. \end{aligned}$$

Distribuição Normal



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0,1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0,2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0,3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0,4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0,5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0,6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0,7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0,8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0,9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1,0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1,1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1,2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1,3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41309	0.41466	0.41621	0.41774
1,4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1,5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1,6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1,7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1,8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1,9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2,0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2,1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2,2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2,3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2,4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2,5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2,6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2,7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2,8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2,9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3,0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900
3,1	0.49903	0.49906	0.49910	0.49913	0.49916	0.49918	0.49921	0.49924	0.49926	0.49929
3,2	0.49931	0.49934	0.49936	0.49938	0.49940	0.49942	0.49944	0.49946	0.49948	0.49950
3,3	0.49952	0.49953	0.49955	0.49957	0.49958	0.49960	0.49961	0.49962	0.49964	0.49965
3,4	0.49966	0.49968	0.49969	0.49970	0.49971	0.49972	0.49973	0.49974	0.49975	0.49976
3,5	0.49977	0.49978	0.49978	0.49979	0.49980	0.49981	0.49981	0.49982	0.49983	0.49983
3,6	0.49984	0.49985	0.49985	0.49986	0.49986	0.49987	0.49987	0.49988	0.49988	0.49989
3,7	0.49989	0.49990	0.49990	0.49990	0.49991	0.49991	0.49992	0.49992	0.49992	0.49992
3,8	0.49993	0.49993	0.49993	0.49994	0.49994	0.49994	0.49994	0.49995	0.49995	0.49995
3,9	0.49995	0.49995	0.49996	0.49996	0.49996	0.49996	0.49996	0.49996	0.49997	0.49997

Tabela 1: Probabilidades $p = P[0 \leq Z \leq Z_t]$ da Distribuição Normal padrão com valores de Z_t dados nas margens da tabela