MAE228 - Noções de Probabilidade e Processos Estocásticos
Prof. Fábio Prates Machado - Prova 1 - 17/04/2013

1) (2,5 pontos) Uma certa comunidade é composta de m famílias, n_i das quais possui i crianças, $\sum_{i=1}^{r} n_i = m$. Denote por X o número de crianças de uma **família escolhida** aleatoriamente entre as m famílias. Paralelamente, denote por Y o número de crianças da famílias de uma **criança escolhida** aleatoriamente entre as $\sum_{i=1}^{r} in_i$ crianças.

   a) Encontre $E[X]$ e $E[Y]$ e verifique a relação entre elas;
   b) Apresente um argumento para justificar a igualdade (ou diferença) entre os valores das duas esperanças.

2) (2,5 pontos) Oito torres são colocadas aleatoriamente no tabuleiro de xadrez (8 linhas x 8 colunas), cada uma ocupando um apenas um dos quadrados. Qual é a probabilidade de que

   a) Elas fiquem dispostas em linha reta (horizontal, vertical ou diagonal)?
   b) Em cada linha e em cada coluna do tabuleiro uma e apenas uma torre seja encontrada?

3) (2,5 pontos) Uma moeda é lançada continuamente, de maneira independente, até que pela primeira vez suas duas faces tenham sido observadas. Assumindo a probabilidade de cara igual a p, calcule e responda:

   a) A distribuição do número de lançamentos necessários;
   b) O número esperado de lançamentos necessários;
   c) A probabilidade de que o último lançamento seja uma cara;
   d) Qual é o número esperado de vezes que um dado honesto deve ser lançado de maneira independente, até que todas as 6 faces apareçam pelo menos uma vez?

4) (2,5 pontos) Dizemos que uma variável aleatória não-negativa X **não possui memória** se

$$P[X > s + t | X > t] = P[X > s] \text{ para todo } s, t \geq 0.$$

   Verifique se as variáveis aleatórias com as distribuições definidas abaixo, possuem esta propriedade

   a) $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ - Binomial;
   b) $Y \sim \mathcal{G}(p)$ - Geométrica;
   c) $Z \sim \mathcal{E}(\lambda)$ - Exponencial.