

PROF

PABLO A. FERRARI

Processos estocásticos MAE 228 noturno 2005
Segunda Prova, 23 de junho 2005

Exercício 1.

Considere a cadeia de Markov em $\{1, 2, 3, 4\}$ com matriz de transição

$$Q = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

a. A matriz é irredutível?

b. Qual a fração de tempo que a cadeia passa no estado 1 se começar com a medida uniforme?

Exercício 2.

Considere uma cadeia de Markov em $\{1, 2, 3\}$ com matriz de transição

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

a. Calcule a medida invariante.

b. Qual o tempo medio para voltar para o estado 1

c. Para quais valores de $n \geq 1$ vale que $P^n(1, 1) > 0$? Qual a conclusão que podemos tirar sobre o período da matriz?

Exercício 3. Construa um algoritmo para simular as variáveis aleatórias

a. A variável X com espaço de estados $\{2, 3, 4\}$ com lei $p_2 = 1/3$, $p_3 = 1/3$, $p_4 = 1/3$. Suponha que o número aleatório uniforme é 0,8574. Qual o valor simulado por seu algoritmo?

b. Geométrica em $\{1, 2, \dots\}$ com parâmetro $3/4$, isto é $P(X = k) = (1/4)^{k-1}(3/4)$. Suponha que o número aleatório uniforme é 0,5784. Qual o valor simulado por seu algoritmo?

$$\left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{1-k}$$

Exercício 4.

a. Usando o método da inversão gere uma variável aleatória com lei $f(x) = K/x$, para x no intervalo $[1, 3]$. Qual o valor simulado se o número uniforme for 0,38529875?

b. Use o método da rejeição para construir um algoritmo que simule uma variável com distribuição $f(x) = Ke^{-x^2}$ para x no intervalo $[1, 2]$. Use a distribuição exponencial como $g(x)$.

c. Use o método da rejeição para construir um algoritmo que simule uma variável com distribuição $f(x) = Ke^{-x^2}$ para x no intervalo $[1, 2]$. Use a distribuição uniforme em $[0, 1]$ como $g(x)$.