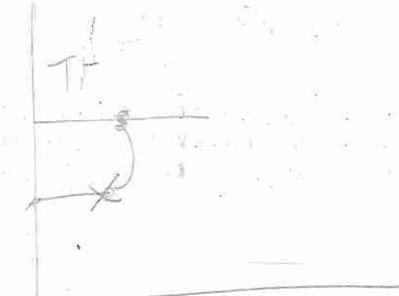


1. (valor máximo dessa questão = 2,5) As infrações de trânsito num certo trecho de estrada seguem um processo de Poisson de taxa igual a 4 por hora de 8:00h até 20:00h. Suponha que cada infração, independentemente uma das outras, pode ser considerada grave com probabilidade $p = 0,6$.

- (0,5) a) Qual é o número médio de infrações no intervalo entre 13:00h e 15:00h? Justifique. $\frac{8}{3}$ 99,69%
 (1,0) b) Qual é a probabilidade de haver pelo menos duas infrações no intervalo entre 13:00h e 15:00h? Justifique. $0,997$
 (1,0) c) Qual é a probabilidade de haver pelo menos duas infrações graves no intervalo entre 11:00h e 15:00h se sabemos que houve apenas uma infração (não sabemos de que tipo, grave ou não) entre 13:00h e 14:00h? Justifique. $0,9971$
 (1,0) d) Qual é a probabilidade de haver pelo menos uma infração grave no intervalo entre 13:00h e 15:00h se sabemos que houve 3 infrações graves entre 11:00h e 15:00h? Justifique. $0,848$

2. (valor máximo desta questão = 2,5) Seja $\{X_n\}_{n \geq 0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{0, 1, 2, 3\}$ com matriz de transição P dada por

	0	1	2	3
0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
3	0	0	0	$\frac{1}{3}$



- (0,5) a) Classifique esta cadeia. Justifique. *redutível, irreversível*
 (0,5) b) Determine: $P(X_6 = 0 | X_4 = 1)$. Justifique. $\frac{1}{9}$
 (1,0) c) Determine $P(X_6 = 0 | X_4 = 1, X_7 = 3)$. Justifique.
 (1,0) d) Estime $P(X_{57246597} = 0 | X_0 = 3)$. Justifique. $\frac{2}{3}$

3. (valor máximo desta questão = 2,5) O número de clientes $X_t \in \{0, 1, \dots\}$ num sistema $M/M/k$ (sistema de fila no qual clientes chegam conforme um processo de Poisson, os sucessivos tempos de serviço são variáveis aleatórias independentes e com distribuição exponencial e no qual há k servidores) em cada instante t evolue conforme uma cadeia de Markov com taxas de transição dadas por $q_{i,i+1} = 2h^{-1}, i \geq 0, q_{i,i-1} = 3h^{-1}, i \geq 1$.

- (0,5) a) Qual é o valor de k (isto é, quantos servidores este sistema de fila possui)? Justifique.
 (1,0) b) Suponha que no instante 0 a distribuição do sistema é tal que há n clientes no sistema com probabilidade $\frac{1}{2}^{n+1}$. Esta distribuição é estacionária? Justifique.
 (1,0) c) Suponha que esse sistema esteja vazio no instante 0. Qual é a probabilidade desse sistema estar vazio depois de um tempo muito longo? Justifique.
 (1,0) d) Se chegaram 4 clientes nas primeiras três horas de funcionamento do sistema qual é a probabilidade de que todas tenham chegado na primeira hora? Justifique.

4. (2,5) Certo aparelho pode estar em três estados: 0 = funcionando perfeitamente, 1 = funcionando, mas de forma inadequada e 2 = quebrado e sendo consertado. Os tempos de permanência (em minutos) em cada estado têm distribuições exponenciais independentes com médias 200 minutos, 50 minutos e 100 minutos, respectivamente. Ao final do tempo de permanência num estado a escolha do estado seguinte se faz conforme a matriz de transição dada por $Q(0,1) = Q(0,2) = Q(1,0) = Q(1,2) = Q(2,0) = Q(2,2) = 1/2$ e $Q(i,j) = 0$ caso contrário. Denote por X_t o estado do aparelho no instante $t \geq 0$.

- (0,5) a) Determine as taxas dessa cadeia de Markov. Justifique. $\begin{pmatrix} 0 & 400 & 400 \\ 100 & 0 & 100 \\ 100 & 0 & 200 \end{pmatrix}$
 (1,0) b) Determine uma distribuição estacionária. Ela é única? Justifique.
 (1,0) c) Se no instante zero o aparelho está funcionando perfeitamente (estado 0), estime a probabilidade dele estar funcionando, mas de forma inadequada (estado 1) logo depois da 137.539 mudança de estado (ou seja, logo depois da 137.539 transição da cadeia imersa). Justifique.

$q_i, i-1 = \mu$

$q_i, i+1 = \lambda$

