2011 - Eduardo Jordão Neves

MAE 228 - Noções de Probabilidade e Processos Estocásticos - Prova 2

Justifique suas respostas!

1. (valor máximo dessa questão = 2,5) As infrações de trânsito num certo trecho de estrada seguem um processo de Poisson de taxa igual a 4 por hora de 8:00h até 20:00h. Suponha que cada infração, independentemente uma das outras, pode ser considerada grave com probabilidade $p = 0,6$.

   (0,5) a) Qual é o número médio de infrações no intervalo entre 13:00h e 15:00h? Justifique. 8

   (1,0) b) Qual é a probabilidade de haver pelo menos duas infrações no intervalo entre 13:00h e 15:00h? Justifique. 99,698%

   (1,0) c) Qual é a probabilidade de haver pelo menos ~~duas~~ infrações graves no intervalo entre 11:00h e 15:00h se sabemos que houve apenas uma infração (não sabemos de que tipo, grave ou não) entre 13:00h e 14:00h? Justifique. 0,9971

   (1,0) d) Qual é a probabilidade de haver pelo menos ~~uma~~ infração grave no intervalo entre 13:00h e 15:00h se sabemos que houve 3 infrações graves entre 11:00h e 15:00h? Justifique. 0,848

2. (valor máximo desta questão = 2,5) Seja $\{X_n\}_{n\geq 0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{0, 1, 2, 3\}$ com matriz de transição $\mathbf{P}$ dada por

$P(N \geq 7)$

$0,6 \cdot P(X \geq 1) + 0,4 P(X \geq 2)$

$X \sim \text{Poisson}(p\lambda T) \quad T = 3$

$$\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$$

redutível

   (0,5) a) Classifique esta cadeia. Justifique. redutível, irredutível

   (0,5) b) Determine: $P(X_6 = 0|X_4 = 1)$. Justifique. 1/9

   (1,0) c) Determine $P(X_6 = 0|X_4 = 1, X_7 = 3)$. Justifique.

   (1,0) d) Estime $P(X_{57246597} = 0|X_0 = 3)$. Justifique. 2/7

3. (valor máximo desta questão = 2,5) O número de clientes $X_t \in \{0, 1, \ldots\}$ num sistema $M/M/k$ (sistema de fila no qual clientes chegam conforme um processo de Poisson, os sucessivos tempos de serviço são variáveis aleatórias independentes e com distribuição exponencial e no qual há k servidores) em cada instante t evolue conforme uma cadeia de Markov com taxas de transição dadas por $q_{i,i+1} = 2h^{-1}$, $i \geq 0$, $q_{i,i-1} = 3h^{-1}$, $i \geq 1$.

   (0,5) a) Qual é o valor de k (isto é, quantos servidores este sistema de fila possue)? Justifique.

   (1,0) b) Suponha que no instante 0 a distribuição do sistema é tal que há n clientes no sistema com probabilidade $\frac{1}{2}^{n+1}$. Esta distribuição é estacionária? Justifique.

   (1,0) c) Suponha que esse sitema esteja vazio no instante 0. Qual é a probabilidade desse sistema estar vazio depois de um tempo muito longo? Justifique.

   (1,0) d) Se chegaram 4 clientes nas primeiras tres horas de funcionamento do sistema qual é a probabilidade de que todas tenham chegado na primeira hora? Justifique.

4. (2,5) Certo aparelho pode estar em três estados: 0=*funcionando perfeitamente*, 1=*funcionando, mas de forma inadequada* e 2=*quebrado e sendo consertado*. Os tempos de permanência (em minutos) em cada estado têm distribuições exponenciais independentes com médias 200 minutos, 50 minutos e 100 minutos, respectivamente. Ao final do tempo de permanência num estado a escolha do estado seguinde se faz conforme a matriz de transição dada por $Q(0,1) = Q(0,2) = Q(1,0) = Q(1,2) = Q(2,0) = Q(2,2) = 1/2$ e $Q(i,j) = 0$ caso contrário. Denote por X_t o estado do aparelho no instante $t \geq 0$.

   (0,5) a) Determine as taxas dessa cadeia de Markov. Justifique.

   (1,0) b) Determine uma distribuição estacionária. Ela é única? Justifique.

   (1,0) c) Se no instante zero o aparelho está *funcionando perfeitamente* (estado 0), estime a probabilidade dele estar *funcionando, mas de forma inadequada* (estado 1) logo depois da 137.539 mudança de estado (ou seja, logo depois da 137.539 transição da cadeia imersa). Justifique.

$q_{i,i-1} = \mu$

$q_{i,i+1} = \lambda$

$M/M/k$

$\lambda \quad k \cdot \mu$