

MAE0228 - Noções de Probabilidade e Processos Estocásticos

2a prova - 15/06/2016 - Prof. Fábio Machado

A prova é sem consulta. Responda as questões da maneira mais clara, organizada e detalhada possível. Cada questão vale 2,5 pontos. Escolha 4 questões. Boa prova!

1. Em uma série de experimentos de Bernoulli dependentes, a probabilidade de sucesso em uma determinada realização é $\frac{k+1}{k+2}$ onde k é o número de sucessos nos últimos dois experimentos. Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[\text{sucesso no } n\text{-ésimo experimento}]$$

2. Mostre que em Processo de Poisson mostre, para $0 < s < t$,

$$P[N(s) = k | N(t) = n] = \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

3. Certo aparelho tem três possíveis estados: $0 = \text{funcionando}$, $1 = \text{quebrado e aguardando início de serviço de reparo}$ e $2 = \text{quebrado e sendo consertado}$. Os tempos de permanência (em minutos) em cada estado têm distribuições geométricas independentes com médias $\mu_0 = 5$ min, $\mu_1 = 3$ min e $\mu_2 = 2$ min, resp. Ao final do tempo de permanência num estado a escolha do estado seguinte se faz conforme a matriz de transição dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para $X_n \in \{0, 1, 2\}$ definindo o estado do aparelho no instante n (“funcionando”, “quebrado e aguardando início de serviço de reparo”, ou “quebrado e sendo consertado”)

- a) Mostre que $\{X_n\}_{n \geq 0}$ é uma cadeia de Markov.
- b) Determine a matriz de probabilidades de transição de $\{X_n\}_{n \geq 0}$.
- c) Determine a distribuição estacionária de $\{X_n\}_{n \geq 0}$.
- d) $\{X_n\}_{n \geq 0}$ é reversível?

4. Suponha que você jogue um dado (honesto de seis lados) repetidamente, contando o número total de pontos que apareceram (por exemplo, se numa jogada sai a face cinco você adiciona o valor cinco a soma total de pontos), até o instante em que surgir o primeiro seis. Qual é o valor esperado do total de pontos (incluindo o valor seis)?

5. Veículos passam em um ponto de uma estrada segundo um Processo de Poisson com taxa de um veículo por minuto. Se 5% destes veículos são vans, então: (a) Qual é a probabilidade de que pelo menos uma van passe pelo ponto da estrada durante uma hora? (b) Sabendo que 10 vans passaram pelo ponto da estrada durante uma hora, qual é o número esperado de veículo que passaram pela estrada nesse período? (c) Se 50 veículos passaram pela estrada durante uma hora, qual é a probabilidade que 5 destes sejam vans?