Noções de Probabilidade e Processos Estocásticos - MAE228

Prova simulada 1

1. Seja $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Sejam $(X_i)_{i\geq 1}$ variáveis aleatórias assumindo valores em $\mathcal{A}$. Para cada um dos modelos seguintes calcule

$$\mathbb{P}\{X_1 = 0, X_2 = 0\}\ ,$$
$$\mathbb{P}\{X_1 = 0, X_2 = 1\}\ ,$$
$$\mathbb{P}\{X_1 = 1, X_2 = 0\}\ ,$$
$$\mathbb{P}\{X_1 = 1, X_2 = 1\}\ .$$

   (a) $(X_i)_{i\geq 1}$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com

$$\mathbb{P}\{X_i = 0\} = \frac{8}{17}$$
$$\mathbb{P}\{X_i = 1\} = \frac{9}{17}\ .$$

   (b) $(X_i)_{i\geq 1}$ é uma cadeia de Markov com matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

   e distribuição inicial igual à (única) distribuição invariante.

2. Faça um código de prefixos utilizando as especificações de Shannon para cada um dos modelos apresentados na questão (1). Calcule o comprimento médio do código nos dois modelos.

3. Um gerador de números aleatórios fornece a seqüência de números aleatórios independentes e uniformemente ditribuidos no intervalo $[0, 1]$:

$$0.75 \quad 0.92 \quad 0.89 \quad 0.64 \quad 0.20 \quad 0.59 \quad 0.45 \quad 0.31 \quad 0.35 \quad 0.29$$

   (a) Usando esses números aleatórios, simule uma seqüência de tamanho 10 do modelo de Markov introduzido na questão (1). Gere o primeiro valor da seqüência utilizando a distribuição invariante da cadeia.

   (b) Comprima por concatenação esta seqüência usando o código de prefixo associado ao modelo independente da questão (1).

   (c) Calcule o comprimento por símbolo da sequência codificada. Comente. Como poderímos melhorar esta codificação?

4. Seja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uma seqüência gerada com o modelo independente da questão (1). Encontre um $\bar{n}$ tal que $\forall n \geq \bar{n}$

$$\mathbb{P}\left\{|\hat{p}_n - \frac{9}{17}| > 0.1\right\} \leq 0.25\,,$$

onde $\hat{p}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

(Sugestão: Use a Lei Fraca dos Grandes Números.)

5. Uma cadeia de Markov assumindo valores no alfabeto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ tem uma matriz de probabilidades de transição da forma

$$P = \begin{pmatrix} * & 0 & * & * & * \\ 0 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde $*$ designa um valor estritamente positivo compatível com o fato de P ser uma matriz de probabilidades de transição.

Diga tudo o que puder sobre esta cadeia de Markov (irredutibilidade ou não da cadeia, classificação dos estados, existência de uma ou de muitas probabililddades invariantes, ...).