Noções de Probabilidade e Processos Estocásticos - MAE228

Prova simulada 2

1. Seja $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, 2^K\}$. Seja $(X_i)_{i\geq 0}$ uma cadeia de Markov sobre o alfabeto $\mathcal{A}$, com as seguintes probabilidades de transição:

$$p(0|x) = \frac{1}{2}, \quad \forall x \in \mathcal{A}$$

$$p(x|0) = \frac{1}{2^{K+1}} \quad \forall x \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$$

$$p(x+1|x) = p(x-1|x) = \frac{1}{4}, \forall x \neq 0, 1, 2^K$$

$$p(2|1) = p(2^K|1) = \frac{1}{4}$$

$$p(1|2^K) = p(2^K - 1|2^K) = \frac{1}{4}$$

   (a) Classifique os estados desta cadeia.

   (b) Calcule a probabilidade invariante.

   (c) Para todo $x \in \mathcal{A}$ definimos

   $$T_x = \inf\{n \geq 1 : X_n = x\}.$$

   Calcule $E[T_0|X_0 = 0]$.

   (d) Compare esse resultado com o resultado do item (b) e comente.

   (e) Construa um código de Shannon para a probabilidade invariante desta cadeia.

   (f) Sejam $Y_1, Y_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tendo como distribuição comum

   $$\mathbb{P}[Y_n = x] = \mu(x),$$

   onde $\mu(x)$ é a probabilidade invariante da cadeia $(X_i)_{i\geq 0}$. Calcule a esperança de $l_S(Y_1)$, onde $l_S(Y_1)$ é o comprimento do código de Shannon de Y_1.

   (g) Considere o seguinte código de prefixos C para o modelo i.i.d de item anterior.

   $$C(0) = 1,$$
   $$C(x) = 0^x 1,$$

   onde 0^k representa uma seqüência de k zeros.

   Calcule o comprimento médio desse código. Compare os resultados dos itens (f) e (g) e comente.

(h) Seja $K = 2$ e seja $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ uma seqüência de variáveis aleatórias i.i.d no alfabeto $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, com

$$\mathbb{P}[Y_i = x] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{8}, & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Suponha que comprimimos por concatenação a seqüência $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ usando um código de Shannon. Mostre que se $n = 10^5$, a probabilidade de que o comprimento da seqüência codificada seja maior ou igual a 201000 bits é menor ou igual a 0.1 (dica: use a desigualdade de Chebyshev).

2. Seja $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$. Seja $(X_i)_{i \geq 0}$ uma cadeia de Markov sobre o alfabeto $\mathcal{A}$ com matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(a) Calcule a probabilidade invariante desta cadeia.

(b) Defina um código de Shannon para cada uma das seguintes distribuições de probabilidade sobre o alfabeto $\mathcal{A}$

i. a distribuição invariante calculada no item (a).

ii. a distribuição $p(\cdot\,|a)$

iii. a distribuição $p(\cdot\,|b)$

iv. a distribuição $p(\cdot\,|c)$

(c) Um gerador de números aleatórios fornece a seqüência de números aleatórios independentes e uniformemente ditribuidos no intervalo $[0, 1]$:

0.03 0.27 0.46 0.98 0.56 0.82 0.67 0.96 0.90 0.37 0.09

Usando esses números aleatórios, simule uma seqüência de tamanho 11, utilizando a probabilidade invariante da cadeia para gerar o primeiro símbolo X_0.

(d) Comprima por concatenação a seqüência gerada no item anterior usando o seguinte processo:

i. Comprima o primeiro símbolo utilizando o código de Shannon para a probabilidade invariante especificado no item (b).

ii. A partir dai para cada novo símbolo X_n, com $n \geq 1$, utilize o código definido no item (b) para a distribuição $p(\cdot\,|X_{n-1})$.

Observe que não há ambigüidade neste processo de codificação.