

Primeira Prova de MAP 0151 - 2016
Licenciatura Noturno - IME USP, aos 05 de abril de 2016

Isntuções:

1. As questões 1 e 2 desta prova devem ser feitas em sala de aula, até as 22:50 de 05 de abril de 2016.
2. A questão 3 deve ter uma resolução entregue na sala do professor (sala 292 do bloco A do IME) entre 19:20 e 19:35 do dia 06 de abril de 2016.
3. A prova deve ser resolvida individualmente, durante a sua resolução é permitida a consulta a livros, apontamentos, notas de aula e similares.
4. Justifique as afirmações que fizer nas resoluções das questões.

Questões:

Questão 1 (3.0 pontos) Quer-se estudar a equação $e^{-x} - 2x = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

- (A) Prove que esta equação tem exatamente uma solução real, e esta está no intervalo $[0, 1]$.
- (B) Mostre que pode-se usar o Método do ponto fixo com a função $\varphi(x) = \frac{e^{-x}}{2}$ no intervalo $[0, 1]$ a partir com $x_0 = 0$ para encontrar uma sequência que converge para a raiz procurada.
- (C) Se (x_n) é a sequência gerada no item anterior pelo método do ponto fixo, determine um n tal que a distância de x_n à raiz procurada é menor do que 10^{-2} .

Questão 2 (3.5 pontos) Considere $p(x) = -x^6 - 2x^5 - 3x^4 + 3x^3 + 3x - 1$.

- (A) (0.75) Prove que $p(x)$ tem exatamente uma raiz negativa, e esta é simples.
- (B) (0.75) Mostre que, contadas com sua multiplicidade, $p(x)$ tem uma ou três raízes positivas.
- (C) (1.0) Mostre que $p(x)$ tem exatamente uma raiz no intervalo $]2, +\infty[$, e esta é simples.
- (D) (1.0) Prove que no intervalo $[0, 2]$ há exatamente duas raízes de $p(x)$, ambas simples.

Questão 3 (4.5 pontos) Seja $p(x) = x^7 - 91x + 50$ e considere $\varphi(x) = \frac{x^7+50}{91}$ e $\psi(x) = \sqrt[7]{91x - 50}$.

- (A) (0.5) Mostre que $p(x)$ tem duas raízes positivas, ambas simples, uma em $[0, 1]$, e a outra em $[2, 3]$.
Chame α à primeira dessas raízes e de ω a segunda.
- (B) (1.0) Para usar o método do ponto fixo no intervalo $[0, 1]$ para achar α , você usaria $\phi(x)$ ou $\psi(x)$? Porque? Qual o chute inicial x_0 que você usaria para garantir convergência do método? Justifique. (Não vale escolher $x_0 = \alpha$)
- (C) (1.0) Para usar o método do ponto fixo no intervalo $[2, 3]$ para achar ω , você usaria $\phi(x)$ ou $\psi(x)$? Porque? Qual o chute inicial x_0 que você usaria para garantir convergência do método? Justifique. (Não vale escolher $x_0 = \omega$)
- (D) (1.0) Discuta o uso do método de Newton para determinar α , destacando convergência, escolha de condições iniciais, ...
- (E) (1.0) Se você for usar o método da dicotomia para determinar ω a partir do intervalo $[2, 3]$, quantas etapas do mesmo seriam necessárias para garantir que encontrou-se uma aproximação de ω com erro menor do que 10^{-2} . Justifique.