Primeira Prova de MAP 0151 - 2021
Licenciatura Noturno - IME USP, aos 18 de maio de 2021

Instruções

1. Resolva 2 das 3 questões abaixo.
2. Justifique suas afirmações, exercícios de matemática não se resolvem jogando futebol.
3. Prazo para entrega da resolução: Até 23:59:59 de 25 de maio de 2021.

Questões

Questão 1 (4.0 pontos) O objetivo esta questão é analisar o problema de encontrar uma boa aproximação para $\sqrt[4]{17}$.

(a) (0.5 ponto) Determine um natural n tal que $\sqrt[4]{17} \in [n, n+1]$.

(b) (2.0 pontos) Descreva três maneiras diferentes de proceder para encontrar sequências que se aproximem de $\sqrt[4]{17}$, justifique a convergência das suas sequências.

(c) (1.5 pontos) Encontre uma aproximação de $\sqrt[4]{17}$ com erro menor ou igual 0.01.

Questão 2 (4.0 pontos) Seja $f(x) = e^x + \alpha x - \beta$, com $\alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}$ e $\beta > 1$ e considere a equação $f(x) = 0$.

(A) Prove que essa equação tem uma solução, e apenas uma, em $(0, +\infty)$. Chame ξ a esta solução (1.0 ponto).

(B) Seja $a > 0$ tal que $f(a) > 0$, prove que o método de Newton aplicado a esta equação, com chute inicial $x_0 = a$, fornece uma sequência (x_n) que converge para ξ (1.0 ponto).

(C) Faça $\alpha = 1,\ \beta = 2$ e mostre que pode-se usar o método da falsa posição para a equação considerada no intervalo $[0, 1]$ e assim obter uma aproximação de ξ neste caso. Calcule duas etapas desse método. (2.0 pontos)

Questão 3 (6.0 pontos) Considere $p(x) = x^5 - 80x + c,\ x \in \mathbb{R}$, em que c é um real.

(i) (1.0 ponto) Prove que para todo $c \in \mathbb{R}$ a equação $p(x) = 0$ tem, no máximo, três raízes reais.

(ii) (0.5 ponto) Prove que, para $c \geq 0$ a equação $p(x) = 0$ tem uma, e apenas uma, raiz negativa, e esta é simples.

(iii) (1.5 pontos) Mostre que existe $\overline{c} > 0$ tal que, para $c \in (-\overline{c}, \overline{c})$ a equação $p(x) = 0$ tem exatamente três raízes reais, todas simples e, além disso, para $c > \overline{c}$ a equação $p(x) = 0$ tem exatamente uma raiz real, que é simples.

(iv) (0.5 ponto) Mostre que para $c = \overline{c}$ a equação $p(x) = 0$ tem uma raíz real simples e uma raíz dupla.
A partir de agora considere o caso $c = 10$.

(v) (0.5 ponto) Mostre que $p(x) = 0$ tem exatamente duas raízes em $[0, \infty[$, ambas simples, uma delas localizada em $[0, 1]$ e outra em $[2, 3]$
Chame α à raiz dessa equação que está em $[0, 1]$ e denote por β à localizada em $[2, 3]$.

Vai-se tentar usar o método das aproximações sucessivas (também chamado método do ponto fixo) para encontrar as raízes α e β de $p(x) = 0$ com a função $\varphi_1(x) = \frac{x^5+10}{80}$ ou com a função $\varphi_2(x) = \sqrt[5]{80x - 10}$.

(vi) (0.5 ponto) Para procurar uma aproximação de α (que está em $[0, 1]$) com o método das aproximações sucessivas, qual das duas funções $\varphi_1(x)$ ou $\varphi_2(x)$ você usaria? Porque? Qual seria o chute inicial que escolheria? Porque? (Observação: não vale responder que escolheria $x_0 = \alpha$)

(vii) (0.5 ponto) Para procurar uma aproximação de β (que está em $[2, 3]$) com o método das aproximações sucessivas, qual das duas funções $\varphi_1(x)$ ou $\varphi_2(x)$ você usaria? Porque? Qual seria o chute inicial que escolheria? Porque?

(viii) (0.5 ponto) Analise se o método de Newton, aplicado á equação $p(x) = 0$ no intervalo $[0, 1]$ com chute inicial $x_0 = 0$ converge para α. E se o chute inicial for $x_0 = 1$? (Justifique)

(ix) (0.5 ponto) Analise se o método de Newton, aplicado á equação $p(x) = 0$ no intervalo $[2, 3]$ com chute inicial $x_0 = 2$ converge para β. E se o chute inicial for $x_0 = 3$? (Justifique)