

12
15,3
19,8

28 de maio de 2013

Prova No. 2

Cálculo Vetorial e Aplicações (MAP 215)
Cálculo Diferencial e Integral III (MAT 205)

1. Em $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, considere o campo escalar φ de classe C^∞ definido por

$$\varphi(\mathbf{r}) = f(r) \quad (1)$$

com

$$\mathbf{r} = (x, y, z), \quad r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

onde f é uma função de classe C^∞ sobre a semi-reta real positiva aberta.

Calcule seu gradiente $\nabla\varphi$, explicitando o resultado no caso especial em que $f(r) = 1/r^k$ com $k \in \mathbb{N}$.

2. Em $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, considere o campo vetorial \mathbf{E} de classe C^∞ definido por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = g(r) \mathbf{r} \quad (2)$$

com

$$\mathbf{r} = (x, y, z), \quad r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

onde g é uma função de classe C^∞ sobre a semi-reta real positiva aberta.

Tal campo vetorial costuma ser chamado de "campo central".

Calcule sua divergência $\nabla \cdot \mathbf{E}$ e seu rotacional $\nabla \times \mathbf{E}$, explicitando o resultado no caso especial em que $g(r) = 1/r^l$ com $l \in \mathbb{N}$. O que acontece quando $l = 3$?

3. Calcule, por integração explícita ao longo de um contorno de sua escolha, o potencial do campo central do item 2., justificando sua escolha de contorno e comparando o resultado com o resultado obtido no item 1.

$$\textcircled{\downarrow} \nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$