$z^2+x^2+y^2 = r^2 \cdot \text{sen}^2\theta \, (1) + r^2 \cdot \cos\theta \quad = r$

27 de junho de 2013

$x = r \cdot \text{sen}\,\theta \cdot \cos\varphi$
$y = r \cdot \text{sen}\,\theta \cdot \text{sen}\,\varphi$
$z = r \cdot \cos\theta$

Prova No. 3

Cálculo Vetorial e Aplicações (MAP 215)
Cálculo Diferencial e Integral III (MAT 205)

Em $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, considere mais uma vez o campo vetorial "central" $\boldsymbol{E}$ de classe C^∞ definido por

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = g(r)\,\boldsymbol{r}$$

com

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) \ , \ r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ ,$$

onde g é uma função de classe C^∞ sobre a semi-reta real positiva aberta.

Calcule o fluxo de $\boldsymbol{E}$

1. através da esfera S_a^2 de raio a em torno da origem; $x^2+y^2+z^2=a^2$
2. através de um quadrante da calota superior da esfera S_a^2 de raio a em torno da origem, digamos entre o equador e o polo norte e entre dois meridianos a 90^0 de distância;
3. através de cada uma das quatro faces do tetraedro

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0 \ , \ y \geqslant 0 \ , \ z \geqslant 0 \ , \ x + y + z \leqslant 1\}$$

que são explicitamente dadas por

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geqslant 0 \ , \ z \geqslant 0 \ , \ y + z \leqslant 1\} \ , \\ S_2 &= \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0 \ , \ z \geqslant 0 \ , \ x + z \leqslant 1\} \ , \\ S_3 &= \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0 \ , \ y \geqslant 0 \ , \ x + y \leqslant 1\} \ , \\ S_4 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0 \ , \ y \geqslant 0 \ , \ z \geqslant 0 \ , \ x + y + z = 1\} \ , \end{aligned}$$

supondo que, neste caso, g seja pelo menos contínua sobre a semi-reta real positiva fechada. Especifique, no caso da última destas quatro integrais de superfície, o resultado para o caso especial em que vale $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}$, ou seja, $g \equiv 1$.

$\Phi = \iiint_B \text{div}\,\vec{E}\; dx\,dy\,dz =$

$-a^2 \,\text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta \cdot \text{sen}^2\varphi - a^2 \,\text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta \cdot \cos^2\varphi$

$-a^2 \,\text{sen}\,\theta \cos\theta \,(1)$

$$\iiint_B \operatorname{div} \vec{F}\, dx\,dy\,dz = \Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$$

Usando o resultado da prova anterior de que $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = rg'(r) + 3g(r)$, verifique explicitamente a validade do teorema de Gauss, tanto para a bola B_a^3 de raio a em torno da origem (com bordo $\partial B_a^3 = S_a^2$),

$$\int_{S_a^2} \boldsymbol{da} \cdot \boldsymbol{E} = \int_{B_a^3} d^3x\, \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}\,, \tag{1}$$

com g arbitrária, como no caso do tetraedro (com bordo $\partial T = S_1 \cup S_2 \cup S_2 \cup S_4$),

$$\int_{\partial T} \boldsymbol{da} \cdot \boldsymbol{E} = \int_T d^3x\, \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}\,, \tag{2}$$

com $g \equiv 1$.

Sugestão: No caso dos itens 1. e 2. e da verificação da igualdade (1), recomenda-se usar coordenadas esféricas

$$\boxed{x = r \sin\theta \cos\varphi}\,, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi\,, \quad z = r\cos\theta\,.$$

Em todos os casos, é crucial encontrar os intervalos percorridos por cada uma das variáveis de integração.

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \vec{i} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ A_1 \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot F = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$|d\vec{a}| = a^2 \operatorname{sen}\theta \cdot d\theta\, d\varphi$$

$$dx\,dy\,dz = r^2 \operatorname{sen}\theta \cdot dr\, d\theta \cdot d\varphi$$