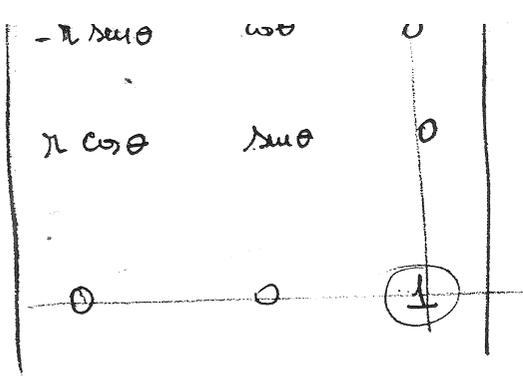


$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\theta, r, h)}$$



$$\int_0^{2\pi} d\psi r \sin^2 \psi = \pi$$

6 de agosto de 2013

$$-r \sin^2 \theta - r \cos^2 \theta$$

$$-r$$

Prova No. 5 (Recuperação)

Cálculo Vetorial e Aplicações (MAP 215)
Cálculo Diferencial e Integral III (MAT 205)

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$r^2 = \rho^2 + z^2$$

1. Calcule o volume do elipsóide de semi-eixos a, b, c :

$$E_{a,b,c} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$$

2. Calcule as integrais

$$I_{xx} = \int dx dy dz (r^2 - x^2) = \int dx dy dz (y^2 + z^2),$$

$$I_{yy} = \int dx dy dz (r^2 - y^2) = \int dx dy dz (x^2 + z^2),$$

$$I_{zz} = \int dx dy dz (r^2 - z^2) = \int dx dy dz (x^2 + y^2),$$

[que – a menos de um fator global do tipo (massa total/volume total) – representam os componentes diagonais do tal chamado *tensor de inércia* para uma distribuição de massa homogênea com centro de massa localizado na origem] no caso de um cilindro de raio a e de altura h :

$$C_{a,h} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq a^2 \text{ e } -h/2 \leq z \leq h/2\}$$

3. Em $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, considere o campo vetorial E de classe C^∞ definido por

$$E(\mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{r^5} \quad \text{com } r = |\mathbf{r}|,$$

onde \mathbf{p} é um vetor fixo dado. [Este campo vetorial é o campo eletrostático gerado por um dipolo matemático – isto é, um dipolo elétrico no limite onde a distância entre as duas cargas pontuais opostas que o compõem é negligenciável – localizado na origem, com momento dipolar \mathbf{p} .] Explicitamente, podemos supor que nosso

$$\left(-\frac{\pi_2^{-2}}{2}\right) - \left(-\frac{\pi_1^{-2}}{2}\right) = \frac{\pi_1^{-2}}{2} - \frac{\pi_2^{-2}}{2}$$

sistema de coordenadas cartesianas x, y, z seja orientado de modo que o vetor \mathbf{p} venha a ter a forma $\mathbf{p} = (0, 0, p)$ com $p \in \mathbb{R}$, e escrevendo $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, obtemos

$$\mathbf{E}(x, y, z) = (E_x(x, y, z), E_y(x, y, z), E_z(x, y, z)) = \left(\frac{3pxz}{r^5}, \frac{3pyz}{r^5}, \frac{p(3z^2 - r^2)}{r^5}\right).$$

- (a) Calcule a divergência $\nabla \cdot \mathbf{E}$ e o rotacional $\nabla \times \mathbf{E}$ de \mathbf{E} .
 (b) Introduzindo coordenadas esféricas

$$\int_{\gamma} d\mathbf{r} \cdot \vec{E}_r = \int_{\gamma} \vec{E}_r(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta) d\theta$$

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned}$$

com $0 < r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, calcule a integral de contorno

$$\int_{\gamma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

de \mathbf{E} ao longo dos seguintes caminhos:

- um segmento de um círculo de latitude, isto é, um círculo num plano paralelo ao plano $x - y$, usando φ como parâmetro ($\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$), com r e θ fixos,
 - um segmento de um meridiano, isto é, um círculo passando pelo eixo dos z , usando θ como parâmetro ($\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$), com r e φ fixos,
 - um segmento de uma reta radial emanando da origem, usando r como parâmetro ($r_1 \leq r \leq r_2$), com θ e φ fixos.
- (c) Use os resultados anteriores para deduzir um potencial para \mathbf{E} , isto é, um campo escalar ϕ de classe C^∞ sobre U tal que $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, observando que quaisquer dois pontos de U podem ser conectados pela composição de três caminhos do tipo acima descrito.

$$\left(-\cos \theta_2\right) - \left(-\cos \theta_1\right)$$