$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\theta,r,h)} = \begin{vmatrix} -r\,\mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ r\cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} d\varphi\, \mathrm{sen}^2\varphi = \pi}$$

6 de agosto de 2013

$-r\,\mathrm{sen}^2\theta - r\cos^2\theta$

$-r$

Prova No. 5

(Recuperação)

Cálculo Vetorial e Aplicações (MAP 215)
Cálculo Diferencial e Integral III (MAT 205)

$r^2 = x^2 + y^2$

$r^2 = \rho^2 + z^2$

1. Calcule o volume do elipsóide de semi-eixos a, b, c:

$$E_{a,b,c} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1 \}$$

2. Calcule as integrais

$$I_{xx} = \int dx\,dy\,dz\;(r^2 - x^2) = \int dx\,dy\,dz\;(y^2 + z^2)\;,$$
$$I_{yy} = \int dx\,dy\,dz\;(r^2 - y^2) = \int dx\,dy\,dz\;(x^2 + z^2)\;,$$
$$I_{zz} = \int dx\,dy\,dz\;(r^2 - z^2) = \int dx\,dy\,dz\;(x^2 + y^2)\;,$$

[que – a menos de um fator global do tipo (massa total/volume total) – representam os componentes diagonais do tal chamado *tensor de inércia* para uma distribuição de massa homogênea com centro de massa localizado na origem] no caso de um cilindro de raio a e de altura h:

$$C_{a,h} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant a^2 \quad \text{e} \quad -h/2 \leqslant z \leqslant h/2 \}$$

3. Em $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, considere o campo vetorial $\boldsymbol{E}$ de classe C^∞ definido por

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} - r^2\boldsymbol{p}}{r^5} \qquad \text{com} \quad r = |\boldsymbol{r}|\;,$$

onde $\boldsymbol{p}$ é um vetor fixo dado. [Este campo vetorial é o campo eletrostático gerado por um dipolo matemático – isto é, um dipolo elétrico no limite onde a distância entre as duas cargas pontuais opostas que o compõem é neglicenciável – localizado na origem, com momento dipolar $\boldsymbol{p}$.] Explicitamente, podemos supor que nosso

$$\left(-\frac{r_2^{-2}}{2}\right) - \left(-\frac{r_1^{-2}}{2}\right) = \frac{r_1^{-2}}{2} - \frac{r_2^{-2}}{2}$$

sistema de coordenadas cartesianas x, y, z seja orientado de modo que o vetor $\boldsymbol{p}$ venha a ter a forma $\boldsymbol{p} = (0, 0, p)$ com $p \in \mathbb{R}$, e escrevendo $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ e $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, obtemos

$$\boldsymbol{E}(x, y, z) = (E_x(x, y, z), E_y(x, y, z), E_z(x, y, z)) = \left(\frac{3pxz}{r^5}, \frac{3pyz}{r^5}, \frac{p(3z^2 - r^2)}{r^5}\right).$$

(a) Calcule a divergência $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}$ e o rotacional $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}$ de $\boldsymbol{E}$.

(b) Introduzindo coordenadas esféricas

$$\int_\gamma dr \vec{E}_r = \int \vec{E}(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta)$$

$$x = r \sin\theta \cos\varphi \,, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi \,, \quad z = r \cos\theta \,,$$

com $0 < r < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, calcule a integral de contorno

$$\int_\gamma d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

de $\boldsymbol{E}$ ao longo dos seguintes caminhos:

i. um segmento de um círculo de latitude, isto é, um círculo num plano paralelo ao plano $x - y$, usando φ como parâmetro ($\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$), com r e θ fixos,

ii. um segmento de um meridiano, isto é, um círculo passando pelo eixo dos z, usando θ como parâmetro ($\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$), com r e φ fixos,

iii. um segmento de uma reta radial emanando da origem, usando r como parâmetro ($r_1 \leqslant r \leqslant r_2$), com θ e φ fixos.

(c) Use os resultados anteriores para deduzir um potencial para $\boldsymbol{E}$, isto é, um campo escalar ϕ de classe C^∞ sobre U tal que $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$, observando que quaisquer dois pontos de U podem ser conectados pela composição de três caminhos do tipo acima descrito.

$$(-\cos\theta_2) - (-\cos\theta_1)$$