

$$f = g(*) \Rightarrow f' = g'(*) \cdot (*.)'$$

2 de julho de 2013

$$h = \sqrt{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2)^{1/2} = (w(x))^{1/2}$$

$$h' = \frac{1}{2} \cdot w^{\frac{1}{2}-1} \cdot w'$$

Prova No. 4  
(Substitutiva)

Cálculo Vetorial e Aplicações (MAP 215)  
Cálculo Diferencial e Integral III (MAT 205)

$$h' = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-1/2} \cdot 2x$$

$$x \cdot g'(\rho) + 1 \cdot g'(\rho)$$

$$h' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

1. Em  $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) / z \in \mathbb{R}\}$ , considere o campo vetorial  $B$  de classe  $C^\infty$  definido por

$$B(x, y, z) = g(\rho) (-y, x, 0) \quad (1)$$

com

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

onde  $g$  é uma função de classe  $C^\infty$  sobre a semi-reta real positiva aberta.

Calcule sua divergência  $\nabla \cdot B$  e seu rotacional  $\nabla \times B$ , explicitando o resultado no caso especial em que  $g(\rho) = 1/\rho^l$  com  $l \in \mathbb{N}$ .

O que acontece quando  $l = 2$ ?

2. Mantendo a notação do problema anterior, calcule a integral de contorno

$$\oint_{\gamma} dx \cdot B$$

de  $B$  ao longo de um círculo de raio  $R$  qualquer em torno do eixo dos  $z$ , digamos no plano  $x - y$ . Utilizando uma parametrização adequada, generalize ao caso de um círculo de raio  $R$  qualquer em torno do eixo dos  $z$ , digamos no plano  $x - y$ , que circula esse eixo  $n$  vezes, onde  $n$  é um inteiro qualquer, positivo ou negativo.

O que acontece quando  $l = 2$ ?

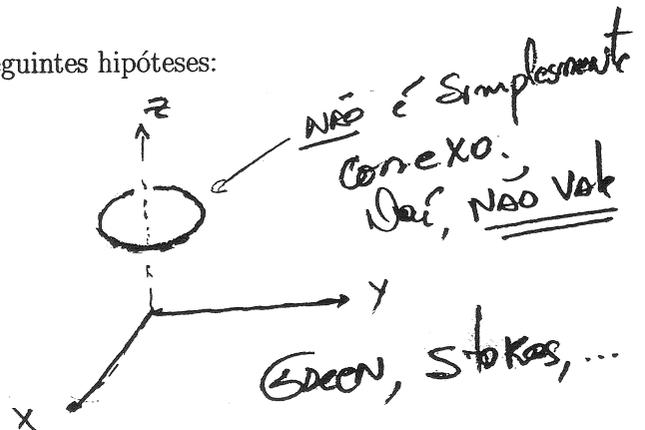
3. Mantendo a notação dos problemas anteriores, e no caso especial em que  $l = 2$ , qual seria o valor da integral de contorno

$$\oint_{\gamma} dx \cdot B$$

Stokes

para um caminho fechado  $\gamma$  qualquer, nas seguintes hipóteses:

$$\int_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{x} = \iint_G \text{rot } B \cdot \vec{n} \, ds$$

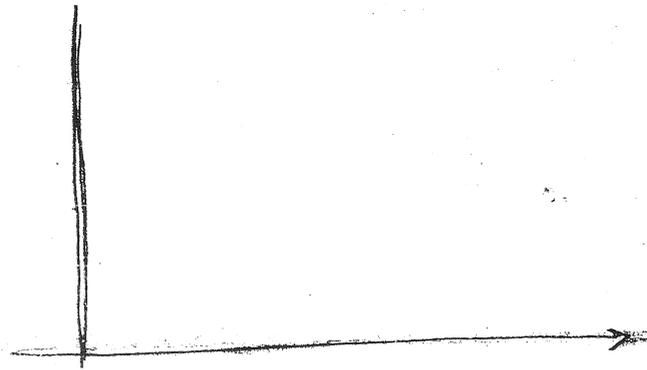


$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} \, dA$$

- (a) O caminho não envolve o eixo dos  $z$ .
- (b) O caminho envolve o eixo dos  $z$ , circulando-o  $n$  vezes, onde  $n$  é um inteiro qualquer (positivo ou negativo ou até zero: este é o caso do item anterior).

Para esta pergunta, requer-se apenas uma resposta e um argumento que a justifique, em termos dos resultados dos itens anteriores e de teoremas apresentados em sala de aula, mas sem cálculo explícito.

1. (Ponto extra) Encontre, no caso especial em que  $g(\rho) = 1/\rho^l$  com  $l \in \mathbb{N}$ , um campo vetorial  $A$  de classe  $C^\infty$  em  $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) / z \in \mathbb{R}\}$  tal que  $\vec{B} = \nabla \times A$ .



$$\frac{1}{\rho^l} \cdot \delta = \frac{1}{\rho^{l-1}} \cdot \delta = (\rho)^{1-l} \delta$$

$$\rho^{-l} = (\rho)^{1-l} \delta$$