10 de junho de 2014

Prova No. 3

Cálculo Vetorial e Aplicações (MAP 215)
Cálculo Diferencial e Integral III (MAT 205)

1. Para qualquer campo vetorial $\boldsymbol{A}$ definido e de classe C^1 sobre um aberto U qualquer de $\mathbb{R}^3$ e qualquer compacto K de $\mathbb{R}^3$ contido em U e com bordo ∂K "suficientemente regular", o teorema de Gauss afirma que vale a relação

$$\int_K dx\, dy\, dz\ (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A})(x, y, z) \;=\; \int_{\partial K} d\sigma(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\ .$$

Prove esta relação, usando o teorema fundamental do cálculo, no caso especial em que K é um cubo da forma

$$C \;=\; [\,a, b\,] \times [\,c, d\,] \times [\,e, f\,]\ ,$$

decompondo o lado esquerdo na soma de três termos distintos e o lado direito na some de seis termos distintos.

2. Considere um campo vetorial $\boldsymbol{B}$ definido e de classe C^1 sobre um aberto U qualquer de $\mathbb{R}^3$ e uma curva fechada orientada γ em U. Usando o teorema de Gauss, argumente que se a divergência de $\boldsymbol{B}$ for igual a zero, então o fluxo de $\boldsymbol{B}$ através de uma superfície orientada e "suficientemente regular" Σ contida em U e com bordo γ,

$$\int_\Sigma d\sigma(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\ ,$$

não depende de Σ, mas apenas de γ. (Neste caso, costuma-se falar do fluxo de $\boldsymbol{B}$ através de γ, por abuso de linguagem.)

3. Calcule o fluxo de um campo vetorial $\boldsymbol{B}$ homogêneo e estático, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{B}$, através de uma circunferência orientada de raio a contida em um plano que forma um ângulo α com $\boldsymbol{B}$, em função de α. (Denotando o vetor normal ao referido plano, devidamente orientado, por $\boldsymbol{n}$, podemos definir α por $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} \,=\, B \cos\alpha$, onde $B = |\boldsymbol{B}|$.)