MAP0216 Introdução à Análise Real
MAT0206 Análise Real

$2^{\underline{o}}$ Semestre de 2013

$3^{\underline{a}}$ Prova

Entrega: até 5a. feira, 03/10/13

Justifique cuidadosamente suas afirmações.
Faça pelo menos uma questão de cada grupo

Gupo A: Indução

Questão 1 *(1 ponto)* Use o princípio da indução para mostrar que
$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = (n + 1)^2$.

Grupo B: Conjuntos: finitude, enumerabilidade

Questão 2 *(1 ponto)* Mostre que
$A = \{x \in \mathbf{Q} \mid x \text{ é da forma } 2n\sqrt{2} \text{ para } n \in \mathbf{N}\}$
é infinito.

Questão 3 *(1 ponto)* Mostre que
$A = \{x \in \mathbf{Q} \mid x \text{ é da forma } n^2\sqrt{2} \text{ para } n \in \mathbf{N}\}$
é enumerável.

Grupo C: Densidade

Questão 4 *(1.0 ponto)* Seja $p \in \mathbf{N}, p \geq 2$. Mostre que o conjunto $D \subset \mathbf{R}$ dado abaixo é denso em $\mathbf{R}$.

$$D = \{\tfrac{m}{p^n} \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\}.$$

Questão 5 *(1.0 ponto)* Mostre que se $X \subset \mathbf{R}$ é um subconjunto enumerável denso em $\mathbf{R}$, então seu complementar é denso em $\mathbf{R}$.

Grupo D: Intervalos encaixantes

Questão 6 *(1 ponto)*

(a) Dê exemplo de intervalos $I_n \subset \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$, fechados, não vazios, tais que

$$\cdots \subset I_{n+1} \subset I_n \subset \cdots \subset I_3 \subset I_2 \subset I_1, \quad \text{e} \quad \cap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset.$$

(b) Dê exemplo de intervalos $I_n \subset \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$, limitados, não vazios, tais que
$$\cdots \subset I_{n+1} \subset I_n \subset \cdots \subset I_3 \subset I_2 \subset I_1, \qquad \text{e} \qquad \cap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset.$$

Questão 7 *(1 ponto)* Decida se é Verdadeiro ou Falso, e Justifique:

Seja $\mathbf{K}$ *um corpo ordenado arquimediano e sejam* $I_n \subset \mathbf{K}$, $n \in \mathbf{N}$, *intervalos fechados, limitados e não vazios de* $\mathbf{K}$ *tais que*
$$\cdots \subset I_{n+1} \subset I_n \subset \cdots \subset I_3 \subset I_2 \subset I_1.$$
Então existe $\overline{x} \in \mathbf{K}$ *tal que* $\overline{x} \in I_n, \ \forall n \in \mathbf{N}$.

Grupo E: Sequências

Observação: Nesta prova, você pode usar o seguinte resultado:

"Em $\mathbf{R}$, *se* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *é uma sequência monótona e limitada, então ela é convergente."*

Questão 8 *(2 pontos)* Use a definição de sequência convergente para provar que:

"Num corpo ordenado, se uma sequência de números positivos $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge para* 0 *e uma sequência* $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *satisfaz* $0 \leq b_n \leq a_n, \forall n \in \mathbf{N}$, *então* $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge também para* 0*."*

Questão 9 Seja $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ uma sequência de números reais e $\overline{x} \in \mathbf{R}$. Considere a sequência $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definida por $d_n = |x_n - \overline{x}|$.

Mostre que (x_n) converge para $\overline{x}$ se e só se d_n converge para 0.

Questão 10 *(2 pontos)* Usando a Observação acima e o resultado da questão anterior, decida se cada uma das sequências abaixo é ou não convergente em $\mathbf{R}$. Justifique.

(a) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}, \ n \in \mathbf{N}$.

(b) $y_n = (-1)^n \sin(n\pi/4), \ n \in \mathbf{N}$.

(c) $z_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^n}, \ n \in \mathbf{N}$.

Questão 11 *(Valor: 2 pontos)*

Considere a sequência de números reais definida por
$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}, n \in \mathbf{N}.$$

(a) Prove por indução que $-1 \leq x_n \leq 0, \ \forall n \in \mathbf{N}$.

(b) Prove por indução que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ é monotônica.

(c) Conclua que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ é convergente (**Justifique!**) e use que vale

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}, n \in \mathbf{N}$$

para calcular $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Questão 12 Dê exemplo e justifique

(a) Sequência de números reais limitada não convergente.

(b) Sequência de números reais decrescente não convergente.

(c) Sequência de números reais convergente mas não monótona.

Grupo F: Supremo e ínfimo

Questão 13 Seja $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x = 1 - \frac{1}{n} \text{ para algum } n \in \mathbf{N}\}$.
Prove que A tem supremo, e que $\sup A = 1$.

Questão 14 Sejam $A, B \subset \mathbf{R}$ não vazios, tais que A é limitado superiormente e B é limitado inferiormente. Seja

$$A - B := \{a - b \mid a \in A, b \in B\}.$$

(a) Prove que $A - B$ tem supremo.

(b) Prove $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$.

Grupo G: V ou F

Questão 15 Escolha *quatro* dentre as afirmações abaixo e decida se cada uma delas é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.
Decida se cada uma das afirmaçõe abaixo é verdadeira ou falsa e justifique:

Afirmação 1 O conjunto $\{x \in \mathbf{R} \mid x = r\pi \text{ para algum } r \in \mathbf{Q}\}$ é denso em $\mathbf{R}$.

Afirmação 2 Num corpo ordenado não arquimediano, existe um natural $\overline{n}$ tal que $n \leq \overline{n}, \forall n \in \mathbf{N}$.

Afirmação 3 Para $n \in \mathbf{N}$, seja $I_n = \{x \in \mathbf{Q} \mid 1/(2n+1) \leq x \leq 1/(2n)\}$. O conjunto $A = \cup_{n \in \mathbf{N}} I_n$ tem ínfimo em $\mathbf{Q}$.

Afirmação 4 O conjunto $C = \cup_{n \in \mathbf{N}} [1+1/(2n), 2] \subset \mathbf{R}$ tem menor elemento.

Afirmação 5 O conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R} \mid y = \sin x\}$ é infinito.