MAP0216 Introdução à Análise Real

MAT0206 Análise Real

5ª Prova - Peso 1.5

ENTREGA: Até 15/11/13

2º Semestre de 2013

Regra 1: Para nota serão consideradas obrigatoriamente pelo menos uma questão de cada uma das PARTES A, B, C, D, E e F.

Regra 2: Para compor a nota serão consideradas questões que somem no máximo 10.5 pontos.

Definição: Dada $f : A \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ limitada (isto é, a imagem $f(A) \subset \mathbf{R}$ de f é um subconjunto limitado), definimos $\inf f := \inf f(A)$.

PARTE A

Questão 1 (1 ponto) Seja $\mathbf{K}$ um corpo ordenado não arquimediano e $p \in \mathbf{N}, p \geq 2$. Seja $\beta \in K_+^*$. Mostre que o conjunto $D \subset \mathbf{K}$ abaixo é limitado.

$$D = \{\beta p^n \mid n \in \mathbf{N}\}.$$

Questão 2 (1 ponto) Em cada um dos itens abaixo, dê um exemplo do que se pede. Justifique.

- (a) Funções $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ estritamente positivas, limitadas, tais que $\inf(fg) = (\inf f)(\inf g)$.
- (b) Funções $h, k : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ estritamente positivas, limitadas, tais que $\inf(hk) > (\inf h)(\inf k)$.

Questão 3 (2 pontos) Sejam A e B subconjuntos de $\mathbf{R}$ não vazios e limitados superiormente. Seja $AB = \{ab \in \mathbf{R} \mid a \in A, b \in B\}$.

- (a) Mostre que se $A, B \subset \mathbf{R}^+$ então vale a afirmação:
“*Existe $\sup(AB)$ e $\sup(AB) = (\sup A)(\sup B)$.”*
- (b) Mostre um exemplo sem a hipótese $A, B \subset \mathbf{R}^+$ em que a afirmação apresentada no item (a) é falsa.

PARTE B

Questão 4 (1 ponto) Decida se cada uma das sequências de números reais abaixo é ou não é convergente. Justifique.

- (a) $x_n = \frac{\cos(n^n)}{n^{(n+1)/n}}, n \in \mathbf{N}$.
- (b) $z_n = (n + \frac{1}{n})^n, n \in \mathbf{N}$.

Questão 5 (1 ponto) Decida se cada uma das sequências de números reais abaixo converge. Justifique.

- (a) $x_n = 2^{n+1} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{n}\right)^n, n \in \mathbf{N}$.
- (b) $y_n = \sqrt[n]{n^3 + 5n^2 + 2n + 6}, n \in \mathbf{N}$.

Questão 6 (1.5 pontos) Em cada item, determine o maior intervalo aberto (a, b) , onde $a, b \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tal que para cada $x \in (a, b)$ a série converge. Não se esqueça de mostrar que encontrou o intervalo aberto maximal!

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$.
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}(x-2)^n$.

PARTE C

Questão 7 (0.5 pontos) Mostre que o conjunto X é fechado em $\mathbf{R}$.

$$X = \{x \in \mathbf{R} \mid xe^x - \sin x \geq 0\}.$$

Questão 8 (0.5 pontos) Mostre que o subconjunto $Y \subset \mathbf{Q}$ é aberto em $\mathbf{Q}$:

$$Y = \{x \in \mathbf{Q} \mid 0 < x \leq \pi\}.$$

Questão 9 (2 pontos) **Em cada item, ache A° , A' e $\bar{A}$.** Decida ainda se A é ou não é fechado, e se é ou não é aberto. Justifique.

(a) $A = \bigcap_{n=2}^{\infty} (\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$.

(b) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{2n}, 1 + \frac{1}{n}]$.

PARTE D

Questão 10 (1 ponto) Decida se cada conjunto A abaixo é ou não compacto em $\mathbf{R}$:

(a) $A = B \cap C$ onde B é compacto em $\mathbf{R}$ e C é fechado em $\mathbf{R}$.

(b) $A = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$ onde A_n é compacto em $\mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Questão 11 (2 pontos) Decida se cada conjunto B abaixo é ou não compacto em $\mathbf{Q}$:

(a) $B = \{1/n \in \mathbf{Q} \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{0\}$.

(b) $B = \{x \in \mathbf{Q} \mid 0 \leq x \leq 1\}$.

PARTE E

Questão 12 (1.5 pontos) Em cada item, decida se o limite existe ou não, e justifique.

(a) $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^4 \operatorname{sgn}(x-3)$, onde $\operatorname{sgn} y = \begin{cases} 1, & \text{se } y > 0, \\ -1, & \text{se } y < 0. \end{cases}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$.

Questão 13 (1.5 pontos) Decida se $S : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ é contínua em $x = 0$.

$$S(x) = \begin{cases} x \sin(\ln(|x|)), & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Questão 14 (1.5 pontos) Decida se $T : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ é contínua em $x = 0$.

$$T(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbf{Q}, \\ x, & \text{se } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

PARTE F

Questão 15 (1.5 pontos) Mostre que cada uma das funções abaixo é uniformemente contínua.

(a) $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ onde $g(x) = 2|x|$.

(b) $h : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ onde $h(x) = e^x \cos x$.

Questão 16 (1.5 pontos) Mostre que cada uma das funções abaixo é uniformemente contínua.

(a) $\ell : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ onde $\ell(x) = \sin x$.

(b) $h : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ onde $h(x) = e^x \cos x$.