6 de maio de 2015

Prova No. 1

Equações de Derivadas Parciais (MAP 413)

1. No plano $\mathbb{R}^2$, considere o operador diferencial de segunda ordem a coeficientes constantes
$$D \;=\; a\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b\,\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2c\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + e\,\frac{\partial}{\partial x} + f\,\frac{\partial}{\partial y}\;.$$
   (a) Formule os critérios para D ser elíptico ou hiperbólico, em termos da matriz $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$.

   (b) Formule os critérios para D ser parabólico, em termos dos autovalores da matriz $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ e a posição do vetor $u = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ em relação aos seus auto-espaços.

   Justifique suas respostas.

2. Considere a equação diferencial parcial homogênea em $\mathbb{R}^3$
$$\left(\Delta - m^2\right) f \;=\; 0\;.$$
   (a) Calcule, em $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$, a solução geral f desta equação que é invariante sob rotações, ou seja, tal que f é uma função apenas da variável radial
$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\;.$$
   Sugestão: Tente resolver a equação diferencial ordinária na variável radial r para f pela substituição $f(r) = g(r)/r$.

   (b) Calcule o fluxo do gradiente desta solução f sobre uma esfera S_r^2 de raio r em $\mathbb{R}^3$, ou seja, a integral
$$\int_{S_r^2} d\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla} f\;.$$
   (c) Usando este resultado, deduza a expressão explícita para o potencial de Yukawa G_Y, que é a função f dos itens anteriores sujeita às condições
$$\lim_{r\to\infty} G_Y(r) \;=\; 0 \quad,\quad \lim_{r\to 0}\int_{S_r^2} d\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla} G_Y \;=\; 1\;.$$