

Prova No. 2

Equações de Derivadas Parciais (MAP 413)

1. Sejam Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$, g uma função contínua sobre $\partial\Omega$ e $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções u_k contínuas sobre $\bar{\Omega}$, todas de classe C^2 e harmônicas sobre Ω , tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k|_{\partial\Omega} = g \quad \text{uniformemente sobre } \partial\Omega .$$

Mostre que existe uma função u contínua sobre $\bar{\Omega}$, de classe C^2 e harmônica sobre Ω , tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = u \quad \text{uniformemente sobre } \bar{\Omega} ,$$

de modo que, obviamente,

$$u|_{\partial\Omega} = g .$$

Sugestão: Para a convergência uniforme, argumente que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ser uniformemente convergente equivale a $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ser uniformemente de Cauchy e aplique o princípio do máximo. Para mostrar que o limite u é uma função harmônica, use o teorema da média esférica.

2. Considere os seguintes problemas de Cauchy.

- (a) Encontre, em uma dimensão espacial, a solução u da equação homogênea de difusão

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(t, x) = 0 \quad (1)$$

com condição inicial Gaussiana

$$u(0, x) = \exp(-x^2/a^2) \quad (2)$$

onde a é uma constante.

- (b) Encontre, em uma dimensão espacial, a solução u da equação homogênea de ondas

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(t, x) = 0 \quad (3)$$

com condição inicial Gaussiana

$$u(0, x) = \exp(-x^2/a^2) \quad , \quad \dot{u}(0, x) = 0 \quad (4)$$

onde a é uma constante.

- (c) Discuta a possibilidade de adaptar estes métodos para resolver o mesmo problema em n dimensões espaciais ($n > 1$).

Sugestão: (a) Formalizando a ideia de que a solução representa “um pacote Gaussiano em decaimento”, faça um “Ansatz” da forma

$$u(t, x) = f(t) \exp(-x^2/g(t))$$

e resolva as equações diferenciais ordinárias para as funções f e g (primeiro para g e depois para f) que decorrem da equação de difusão para φ , em conjunto com a condição inicial. (b) Formalizando a ideia de que a solução representa “a superposição de dois pacotes Gaussianos de ondas, um propagando à esquerda e outro à direita”, a solução é imediata, conforme discutido em sala de aula.