USP - Universidade de São Paulo
IME - Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada
Disciplina: MAP2110 - Diurno
Professor: Rodrigo Bissacot
PROVA 1
Aluna(o): **N° USP:** **Data:23.04.2013**

OBSERVAÇÕES:
i) A prova pode ser feita a lápis.
iii) Não é necessário resolver as questões na ordem que aparecem na prova.
iii) Todas as afirmações, teoremas e exercícios das listas podem ser usados nas resoluções das questões, **não é necessário** refazer o exercício na prova se vai usá-lo em alguma questão. No entanto, se o exercício da prova justamente pede que você demonstre algo que foi provado em aula você precisa refazer a demonstração.
iv) Você precisa fazer somente 8,5 pontos na prova. No entanto, há mais que 8,5 pontos abaixo e você pode fazer toda a prova e esta será corrigida. Os pontos acima de 8,5 podem compensar caso você não tenha entregue as listas de exercícios ou caso o seu aproveitamento nas listas não seja satisfatório. A única ressalva é que cada avaliação vale no máximo 10 pontos e caso você some mais do que isso com listas e pontos na prova esta pontuação extra **não será transferida** para as outras avaliações.

Boa prova!

(1)(1,5 pontos) Usando operações elementares, determine o conjunto solução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x+y+z-t=2 \\ 2x-y-z-t=-1 \\ x-2y-2z-4t=-3 \\ 3x-3y-3z-t=-4 \end{cases}$$

Definição 1. *Dizemos que duas matrizes $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ são* ***semelhantes*** *quando existir uma matriz inversível $Q \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A = Q.B.Q^{-1}$.*

(2)(1,5 pontos) Prove, por indução, que para qualquer $m \in \mathbb{N}$ natural não-nulo, se $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ são matrizes semelhantes então A^m e B^m também são semelhantes.

(3)(1,5 pontos) Prove, por indução, que para todo $n \geq 1$ natural $2^{2n} - 1$ é divísivel por 3.

Ou seja, para todo n natural positivo existe um $k(n)$ (k depende de n) natural tal que $2^{2n} - 1 = 3.k(n)$.

(4)(1,5 pontos) Usando operações elementares determine se a matriz A abaixo é inversível ou não. Se A for inversível determine sua inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(5)(3 pontos) Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$ uma matriz triangular inferior. Mostre que A é inversível se, e somente se, nenhum dos coeficientes da diagonal principal é igual a zero. Ou seja, prove que se A é inversível se, e somente se, $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, $a_{33} \neq 0$ e $a_{44} \neq 0$.

Comentário: Esse resultado é válido para matrizes quadradas de qualquer ordem e não somente de ordem 4.

(6)(1,5 pontos)

(a) Sejam $T_1, T_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ transformações lineares. Mostre que $T_1(e_i) = T_2(e_i)$ para $1 \leq i \leq 4$ então $T_1 = T_2$. Aqui $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é o conjunto dos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^4$. Ou seja, $e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0)$ e $e_4 = (0,0,0,1)$. **Comentário:** Esse resultado é válido para transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ qualquer que seja o n natural.

(b) Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear tal que $T(e_1) = (-2,1,3,8), T(e_2) = (3,2,-5,1), T(e_3) = (-2,1,2,2)$ e $T(e_4) = (0,4,3,1)$. Escreva a Matriz da transformação linear T.

(7) (2 pontos) Seja $G = (V, E)$ um grafo finito tal que $V = \{1,2,3,4\}$ e seja $A \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ sua matriz de adjacência. Mostre que a soma de todos os coeficientes da matriz A resulta em $2.|E|$. Ou seja, você deve mostrar que:

$a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34} + a_{41} + a_{42} + a_{43} + a_{44} = 2.|E|$

Reescrevendo usando somatórios a identidade acima fica:

$$\sum_{1 \leq i,j \leq 4} a_{ij} = 2|E|.$$