USP - Universidade de São Paulo
IME - Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada
Disciplina: MAP2110 - Diurno
Professor: Rodrigo Bissacot
PROVA 2
Aluna(o): **N° USP:** **Data:28.05.2013**

OBSERVAÇÕES:
i) A prova pode ser feita a lápis.
iii) Não é necessário resolver as questões na ordem que aparecem na prova.
iii) Todas as afirmações, teoremas e exercícios das listas podem ser usados nas resoluções das questões, **não é necessário** refazer o exercício na prova se vai usá-lo em alguma questão. No entanto, se o exercício da prova justamente pede que você demonstre algo que foi provado em aula você precisa refazer a demonstração.
iv) Você precisa fazer somente 8,5 pontos na prova. No entanto, há mais que 8,5 pontos abaixo e você pode fazer toda a prova e esta será corrigida. No feriadão será entregue uma lista (lista 3) que irá compor a lista da segunda avaliação. A ntrega da lista não é obrigatória, se você for bem na prova pode simplesmente não entregar a lista, se foi mal deve entregá-la no inuito de sanar as deficiências que apresentou nesta prova. A única ressalva é que cada avaliação vale no máximo 10 pontos e caso você some mais do que isso com listas e pontos na prova esta pontuação extra **não será transferida** para as outras avaliações.

Boa prova!

(1)(1,5 pontos) Seja V o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $v_1 = (2,4,8,7)$, $v_2 = (4,-2,1,3)$ e $v_3 = (3,5,2,4)$. Ou seja,

$$V =< v_1, v_2, v_3 >= \{v \in \mathbb{R}^4 : v = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \alpha_3.v_3, \text{com } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ em } \mathbb{R}\}.$$

É verdade que $w = (6,1,-9,8) \in V$? Justifique sua resposta.

---

(2)(2 pontos) Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear.

(a) Mostre que $Ker(T) = \{v \in \mathbb{R}^n : T(v) = 0_{\mathbb{R}^n}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

(b) Mostre que T é injetora se, e somente se, para *todo* conjunto finito $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ de vetores L.I. a imagem destes vetores também forma um conjunto L.I.. Ou seja, $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_k)\}$ é L.I. sempre que $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ o for.

(3)

(a) (1 ponto) Mostre que os seguintes conjuntos $\beta_1 = \{(-3,1),(1,2)\}$ e $\beta_2 = \{(1,1),(-1,2)\}$ são bases de $\mathbb{R}^2$.

(b) (0,5 pontos) Sejam $T_1, T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transformações lineares tais que:

$T_1(-3,1) = 2.(-3,1)$ e $T_2(1,1) = 2.(1,1)$

$T_1(1,2) = -3.(1,2)$ e $T_2(-1,2) = -3.(-1,2)$.

Determine as matrizes $[T_1]_{\beta_1}^{\beta_1}$ e $[T_2]_{\beta_2}^{\beta_2}$.

Obs: Aqui $\beta_1 = \{v_1, v_2\}$ é a base do item (a) onde $v_1 = (-3,1)$ e $v_2 = (1,2)$. Analogamente, $\beta_2 = \{w_1, w_2\}$ é a base onde $w_1 = (1,1)$ e $w_2 = (-1,2)$.

(c) (1 ponto) Seja $c = \{(1,0),(0,1)\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Determine a seguintes matrizes $[I]_c^{\beta_1}$, $[I]_{\beta_1}^c$, $[I]_{\beta_2}^c$ e $[I]_c^{\beta_2}$.

(d) (1 ponto) Determine as matrizes $[T_1]_c^c$ e $[T_2]_c^c$. Usando estas matrizes determine as funções coordenadas $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tais que $T_1(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$. Faça o mesmo no caso de T_2 ou seja, determine $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tais que $T_2(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$.

(e) (0,5 pontos) Observando os resultados dos itens (b) e (d), você diria que é correta e precisa a seguinte frase:

"Se as matrizes de duas transformações lineares T_1, T_2 são iguais então $T_1 = T_2$"?

Se sim, explique o porquê. Se não, justifique a razão de ser equivocada ou imprecisa a afirmação.

---

(4) (3 pontos)

Seja S um subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelos vetores $v_1, v_2, ..., v_k$.

Ou seja, $S = < v_1, v_2, ..., v_k >$.

Mostre que *todo* conjunto com mais de k vetores em S é L.D..

Você deve mostrar que se $X = \{w_1, w_2, ..., w_{\ell-1}, w_\ell\} \subset S$ com $\ell > k$ então X é L.D..

---

(5) (1,5 pontos) Usando o exercício (4) conclua que, fixado um subespaço $S \subseteq \mathbb{R}^n$, todas as bases de S possuem a mesma quantidade de elementos. Em particular, conclua que todas as bases do $\mathbb{R}^n$ possuem examante n elementos.