USP - Universidade de São Paulo
IME - Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada
Disciplina: MAP2110 - Diurno
Professor: Rodrigo Bissacot
PROVA 3
Aluna(o): **N° USP:** **Data:27.06.2013**

OBSERVAÇÕES:
i) A prova pode ser feita a lápis.
iii) Não é necessário resolver as questões na ordem que aparecem na prova.
iii) Todas as afirmações, teoremas e exercícios das listas podem ser usados nas resoluções das questões, **não é necessário** refazer o exercício na prova se vai usá-lo em alguma questão. No entanto, se o exercício da prova justamente pede que você demonstre algo que foi provado em aula você precisa refazer a demonstração.
iv) Você precisa fazer somente 8,5 pontos na prova. No entanto, há mais que 8,5 pontos abaixo e você pode fazer toda a prova e esta será corrigida. A lista que você entregou hoje irá compor sua nota. A lista de hoje vale 4 pontos. A única ressalva é que cada avaliação vale no máximo 10 pontos e caso você some mais do que isso com listas e pontos na prova esta pontuação extra **não será transferida** para as outras avaliações.

Boa prova!

(1)(2,5 pontos) Usando operações elementares e propriedades da função determinante calcule $\det A$ da seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 6 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & 6 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

.

(2)(2,5 pontos) Seja $[n] = \{1, 2, ..., n\}$.
Mostre que o conjunto das bijeções de $[n]$ em $[n]$ possui $n!$ elementos.

(3)(2 pontos) Sejam $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ matrizes quadradas com B inversível. Mostre que $\mathrm{p}_{\mathrm{AB}}(t) = \mathrm{p}_{\mathrm{BA}}(t)$.

Notação: $\mathrm{p}_{\mathrm{AB}}(t)$ e $\mathrm{p}_{\mathrm{BA}}(t)$ denotam os polinômios característicos de AB e BA, respectivamente.

(4) (6 pontos)

Suponha que você tenha uma população de imaturos, jovens e adultos que evolui no tempo segundo a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Assim, se no tempo t temos $x(t)$ imaturos, $y(t)$ jovens e $z(t)$ adultos e nosso vetor de população no tempo t é dado por $v(t) = (x(t), y(t), z(t))$ então no tempo $t+1$ teremos o vetor $v(t+1) = A.v(t)$.

(a) (1,5 pontos) A população crescerá ou diminuirá ao longo do tempo? Justifique sua resposta.

(b) (1,5 pontos) Para tempos muitos grandes podemos dizer que $v(t) = c.\lambda^t.w$, onde c é uma constante não-negativa. Determine o vetor w e o valor de λ.

(c) (1,5 pontos) Suponha que no tempo $t = 0$ tenhamos 2 imaturos, 4 jovens e 3 adultos. Neste caso, quanto vale a constante c do item anterior?

(d) (1,5 pontos) Suponha que a nossa unidade de tempo é dia, nas hipóteses do item (c), quantos jovens teríamos depois de 200 dias depois da primeira medição (tempo zero)?
Obs: deixe indicado o valor.