Questão 1. Seja $P(x, y)$ uma sentença aberta em um universo para x e y . Explique porque (ou demonstre que) a seguinte implicação é verdadeira:

$$\text{Se } “\exists y, \forall x, P(x, y)” \text{, então } “\forall x, \exists y, P(x, y)” \text{.}$$

Verifique que a recíproca é falsa. Faça isso exibindo uma sentença $P(x, y)$ em universos para x e y apropriados. $P(x, y)$ pode ser uma afirmação matemática ou uma afirmação do cotidiano.

Questão 2. Mostre que $\vec{u}, \vec{v}$ são LI se, e somente se, $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}$ são LI.

Questão 3. Sejam $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base e $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ dados por

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{f}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2.$$

- Mostre que $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ é uma base e calcule a matriz de mudança da base E para F .
- Calcule as coordenadas de $\vec{e}_2$ na base F .
- Encontre um vetor ortogonal a $\vec{f}_1$ e coplanar com $\vec{f}_1$ e $\vec{f}_2$.

Questão 4. Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $x \cdot Ax \geq 0$ para todo x é chamada *semi-definida positiva*. Mostre que os autovalores de uma matriz semi-definida positiva são não-negativos.

Questão 5. Uma matriz A de ordem $(m+n) \times (m+n)$ é chamada *triangular superior por blocos* se $A = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$, onde B é $m \times m$, C é $m \times n$, D é $n \times n$ e O é a matriz nula $n \times m$. Para uma matriz triangular superior por blocos A vale a seguinte propriedade: $\det(A) = \det(B)\det(D)$. Diagonalize,

se possível, a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.