Bruna Iralinting

MAP2110 - Modelagem e Matemática
P1 – 27/04/2017

1 QUESTÃO

(1.0 ponto) Considere um sistema linear $n \times n$ dado por $Ax = b$ e E uma matriz que representa uma sequência de operções elementares. Mostre que os sistemas lineares

$$Ax = b \quad \text{e} \quad A'x = b',$$

onde $A' = EA$ e $b' = Eb$, são equivalentes, isto é, toda solução de $Ax = b$ também é solução de $A'x = b'$ e vice-versa.

2 QUESTÃO

(2.0 pontos) De quantas maneiras podemos combinar linearmente as matrizes

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{para obter a matriz} \quad \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}?$$

3 QUESTÃO

Seja α um número diferente de zero.

1. (2.5 pontos) Calcule A^{-1}, a matriz inversa de A,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. (1.5 pontos) Escreva A^{-1} como o produto de matrizes elementares.

4 QUESTÃO

1. (1.0 ponto) Aplique o Método de Eliminação de Gauss (MEG) à matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. (0.5 ponto) Com o resultado do item anterior, defina as matrizes L e U como

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix},$$

onde m_{ij} é o multiplicador necessário para anular a posição ij durante a eliminação gaussiana (são "os valores debaixo da escada") e U é a matriz triangular superior resultante da aplicação do método.

Verifique que $LU = A$.

FATO 1: é possível mostrar, com todo o rigor matemático, que isto funciona sempre que não forem necessárias permutações de linhas entre si! Esta é a chamada Fatoração LU da matriz A. Havendo permutações ao longo do processo, há uma outra fatoração tão surpreendente quanto esta. Aguarde...

3. (0.5 ponto) Calcule L^{-1}, a inversa de L.

FATO 2: matrizes triangulares como L, com "1's" em sua diagonal, têm sempre inversa. A inversa de matrizes triangulares inversíveis é também triangular!

4. (1.5 ponto) No contexto do exposto acima, note que dado

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

podemos resolver o sistema linear $Ax = b$ lembrando que $Ax = LUx = b$ e fazendo

$$L^{-1}Ax = L^{-1}b \Leftrightarrow Ux = L^{-1}b = b',$$

isto é, resolver por substituição retroativa $Ux = b'$.

Qual a complexidade computacional para se obter o produto $L^{-1}b$ para um n qualquer? Ignore produtos por zeros.

Depois de obtidas as matrizes L e U, para cada novo lado direito b, a resolução do sistema linear $Ax = b$ tem complexidade computacional dada pela soma do custo computacional do cálculo $L^{-1}b$ com o custo computacional de uma substituição retroativa.

Qual a complexidade computacional da solução de cada novo sistema linear?

Boa prova!