

MAP2210 – Aplicações de Álgebra Linear

1ª Prova

26 de Abril de 2006

Resolva cinco das seguintes seis questões:

1. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule A^n para todo $n \geq 1$.

2. Encontre uma decomposição LU para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 6 \\ 1 & 1 & 11 \\ 4 & 22 & 9 \end{bmatrix}.$$

Utilize a decomposição obtida para resolver o sistema linear $AX = B$, onde $X = (x, y, z)^t$ e $B = (1, -1, 3)^t$.

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Desenhe um grafo orientado com vértices v_1, v_2, v_3 cuja matriz de adjacência seja igual a A .
- (b) Quantos caminhos distintos de comprimento 8 existem ligando o vértice v_1 ao vértice v_3 ?

4. Três fabricantes de lâmpadas A , B e C , controlam o mercado. Inicialmente, A detém 60% do mercado, B detém 30% e C detém somente 10%. A cada ano, entretanto, A perde 10% de seus consumidores para C e 5% para B ; já B perde 10% de seus consumidores para A e 10% para C ; e finalmente C perde 5% para A e 5% para B . Quais serão as fatias do mercado controladas por A , B , e C após três anos? E após vinte anos?

5. Calcule e^A nos seguintes casos:

$$(a) A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Encontre a solução geral do seguinte sistema linear de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 - 4x_2 - 7x_3 \\ \dot{x}_2 = 9x_1 + 10x_2 + 15x_3 \\ \dot{x}_3 = -4x_1 - 4x_2 - 6x_3 \end{cases}$$

Sugestão: Verifique se a matriz do sistema é diagonalizável.