

MAP2210 – Aplicações de Álgebra Linear

2ª Prova

19 de Junho de 2006

Resolva cinco das seguintes seis questões:

1. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ com seu produto escalar usual, e seja $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ um vetor unitário. Seja $W \subseteq \mathbb{R}^3$ o plano dado pela equação $ax + by + cz = 0$. Determine a matriz que representa a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre W na base canônica.
2. No espaço vetorial das funções contínuas definidas em $[-1, 1]$ e tomando valores reais, considere o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx .$$

Encontre o polinômio da forma $p(x) = a + bx^2 - x^4$ que é ortogonal segundo este produto interno a todos os polinômios de grau ≤ 3 .

3. Numa prova, um certo professor de álgebra linear resolveu transmitir a seus alunos uma mensagem criptografada (pelo método de Hill) em dígrafos no alfabeto usual A--Z com equivalentes numéricos 0–25. A mensagem é:

SPCOWPGBCO

Sabendo que os primeiros dois dígrafos correspondem à palavra BOAS, determine a matriz de decodificação e decodifique a mensagem.

4. Seja $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica e definida positiva, seja $b \in \mathbb{R}^n$ um vetor fixo, e considere a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{2} x^t A x - b^t x .$$

Mostre que f possui um único ponto de mínimo, e que esse ponto é precisamente a solução do sistema linear $Ax = b$.

5. Seja x um vetor não nulo em $\mathbb{R}^n$, e considere a matriz $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ dada por $A = xx^t$. Prove que $\lambda = 0$ é um autovalor de A com multiplicidade $n - 1$. Qual é o único autovalor não nulo de A ?

6. Considere o espaço vetorial V das matrizes 2×2 reais e simétricas. Dadas duas matrizes quaisquer $A, B \in V$, seja $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB)$ (onde $\text{tr}(X)$ é o traço de X).

(a) Mostre que a expressão acima define um produto interno em V .

(b) Encontre uma base ortonormal para V segundo este produto interno.