

# **Cálculos de Crença**

Larissa dos Anjos Miyagi

18 de abril de 2011

## Sumário

1	Introdução	3
2	Estrutura Suporte	3
3	A Tabela	3
4	Probabilidade	4
5	Lógica Clássica	5
6	Possibilidade	7
7	Improbabilidade	7
8	Descrença	9
9	Conclusão	10
10	Referências	10

## 1 Introdução

Muitos padrões de Cálculos de Crença podem ser formalizados no contexto de Cálculos de Crença Abstratos. Veremos abaixo o que significam funções como Probabilidade, Possibilidade, Descrença, entre outras.

Para cada cálculo há uma definição diferente para as estruturas. Veremos então, quais são seus respectivos conjuntos soluções e a definição para somatório, escala e produtório para cada uma delas. Também seguem exemplos para facilitar o entendimento dos cálculos de crença a serem analisados.

## 2 Estrutura Suporte

Na estrutura suporte,  $\langle \Phi, \oplus, \otimes \rangle$ , o primeiro elemento é a função suporte  $\Phi$ , num universo de sentenças  $\mathcal{U}$ . Os valores de suporte nulo e concreto são representados por  $\mathbf{0}$  e  $\mathbf{1}$ , respectivamente. O segundo elemento é um operador de *somatório*,  $\oplus$ , que define uma soma ou união de algum cálculo sobre alguma(s) sentença(s) e o terceiro elemento é um operador de escala ou "condicionalização",  $\otimes$ .

O operador de suporte de *somatório*,  $\oplus$ , dá o valor de suporte da disjunção de duas sentenças diferentes, baseado nos seus valores de suporte individuais.

$$\neg(A \wedge B) \Rightarrow \Phi(A \vee B) = \Phi(A) \oplus \Phi(B).$$

É a função  $\Phi$  sobre todos os elementos que pertencem a A ou B, sem os elementos que pertencem a A e pertencem a B.

O operador de suporte de escala atualiza o estado anterior de uma crença para um novo estado a partir de uma observação. Assim, isso pode ser interpretado como predizer ou propagar mudanças de crença após uma possível observação. Formalmente, o operador de suporte de escala,  $\otimes$ , nos dá o valor de suporte condicional de B dado que A ocorreu, tendo o valor de suporte incondicional de A e da conjunção  $C = A \wedge B$  (elementos que pertencem a A e B):

$$\Phi_A(B) = \Phi(A \wedge B) \otimes \Phi(A).$$

O operador de escala *produtório* reconstitui o antigo estado de crença através dos valores do novo estado de crença e da observação que conduziu a ela. Então isso pode ser interpretado como explicar ou despropagar mudanças de crença por uma observação dada. Se  $\Phi$  não rejeita A, o operador de suporte de *produtório*,  $\otimes$ , nos dá o inverso do operador de escala:

$$\Phi(A \wedge B) = \Phi_A(B) \otimes \Phi(A).$$

## 3 A Tabela

As estruturas suporte para alguns critérios de cálculos de crença são dados na tabela abaixo, onde os valores de suporte de duas sentenças são dadas por:

$a = \Phi(A)$ ,  $b = \Phi(B)$  e  $c = \Phi(C)$ ,  $C = A \wedge B$ . Na tabela, a relação  $a \preceq b$  indica que o valor  $a$  representa um suporte menor que o valor  $b$ .

Tipo de Cálculo	$\Phi(U)$	0	1	$a \preceq b$	$a \oplus b$	$c \oslash a$	$a \otimes b$
Lógica Clássica	{0,1}	0	1	$a \leq b$	$\max(a, b)$	$\min(c, a)$	$\min(a, b)$
Probabilidade	[0,1]	0	1	$a \leq b$	$a + b$	$\min(c, a)$	$\min(a, b)$
Possibilidade	[0,1]	0	1	$a \leq b$	$\max(a, b)$	$c/a$	$a \times b$
Improbabilidade	[0,1]	1	0	$b \leq a$	$a + b - 1$	$(c - a)/(1 - a)$	$a + b - a \times b$
Descrença	{0..∞}	∞	0	$b \leq a$	$\min(a, b)$	$c - a$	$a + b$

Tabela 1: Operações no Cálculo de Crença

Nas próximas seções veremos melhor o que significa cada um destes cálculos.

## 4 Probabilidade

Definição clássica: Seja um espaço amostral finito  $\Omega$ , formado por eventos simples igualmente possíveis. Seja  $A$  um conjunto de eventos contido em  $\Omega$ . Se  $A$  pode ser decomposto em eventos simples de  $\Omega$ , então a probabilidade de ocorrência de  $A$  é dada por:

$$\Phi(A) = \frac{x_A}{x_\Omega}$$

com  $0 \leq \Phi(A) \leq 1$ , onde  $x_A$  é o número de elementos em  $A$  e  $x_\Omega$  é o número de elementos em  $\Omega$ .

Veja que  $\Phi(A) = 0$  quando  $A = \emptyset$ , ou seja, não há nenhuma chance de que  $A$  ocorra. E  $\Phi(A) = 1$  quando  $A = \Omega$ , ou seja,  $A$  ocorrerá com certeza. Se existe um conjunto  $B$ , e  $B \supset A$ , ou seja,  $x_A \leq x_B$ , então:  $\Phi(A) \leq \Phi(B)$  ( $a \leq b$ ).

Considere um espaço amostral  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , o conjunto de casos possíveis quando um dado é lançado.



Seja  $A = \{2, 4, 6\}$  um conjunto apenas com os pares. Qual a probabilidade de, ao jogar um dado, ocorra  $A$ , ou seja, um número par fique na face superior do dado? A resposta é dada por:

$$\Phi(A) = \frac{x_A}{x_\Omega} = \frac{3}{6} = 0.5$$

Agora, considere o conjunto  $B = \{x \mid x < 10\}$ , qualquer elemento  $x$ , tal que este seja menor que 10. Qual a probabilidade de que  $B$  ocorra? Como todo o conjunto amostral  $\Omega$  é menor que 10, com certeza  $B$  ocorrerá. Portanto o valor de  $\Phi$  será:

$$\Phi(B) = 1$$

Observe que se  $B = \{x \mid x > 10\}$ ,  $B \not\subseteq \Omega$  (B não está contido em  $\Omega$ ), não há nenhum evento no espaço amostral, então  $\Phi(B) = 0$ .

Agora, considere os conjuntos  $A = \{2, 4, 6\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$  e  $C = A \cap B = \{2\}$ .

Qual a probabilidade que C ocorra?

$$\Phi(C) = \frac{x_C}{x_\Omega} = \frac{1}{6}$$

Qual a probabilidade que B ocorra, sabendo-se que A ocorreu (probabilidade condicional)?

$$\Phi_A(B) = \frac{\Phi(A \cap B)}{\Phi(A)} = \frac{\Phi(C)}{\Phi(A)} = \frac{x_C}{x_A} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

Agora, se tivermos apenas a última informação  $\Phi_A(B)$  e  $\Phi(A)$ , podemos encontrar  $\Phi(A \cap B)$ , utilizando o produtório:

$$\Phi(A \cap B) = \Phi_A(B) \times \Phi(A) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

## 5 Lógica Clássica

Na lógica clássica, há duas soluções possíveis:

**0** sentença falsa

**1** sentença verdadeira

Uma proposição da forma  $A \wedge B$  (A e B) é dita *conjunção*. Uma conjunção é considerada verdadeira se e somente se ambas A e B forem verdadeiras. Há evidentemente quatro possibilidades: A verdadeira e B verdadeira, A verdadeira e B falsa, A falsa e B verdadeira e A e B ambas falsas. Somente no primeiro caso a conjunção é verdadeira. Exemplo:  $A = "1 + 1 = 2"$  e  $B = "Florianópolis fica no Sul do Brasil"$ , então a conjunção é verdadeira ( $A \wedge B = 1$ ). Isso se expressa por meio da seguinte tabela-de-verdade:

A	B	A e B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Podemos ver então, que  $\Phi(A \wedge B) = \min(\Phi(A), \Phi(B))$ .

Uma proposição da forma  $A \vee B$  (A ou B) é dita *disjunção*. O 'ou' é entendido em seu sentido inclusivo, ou seja, a disjunção A ou B será verdadeira quando pelo menos uma das proposições A ou B for verdadeira. Assim, A ou B é verdadeira se e somente se A for verdadeira, ou B for verdadeira ou ambas o forem.

Exemplo: Se  $A = "São Paulo tem 5000 habitantes"$  e  $B = "O céu é verde"$ , então a disjunção  $A \vee B$  é falsa (0). Se mudarmos para:  $A = "São Paulo$

tem **mais de 5000 habitantes**” e  $B = \text{”O céu é verde”}$ , como  $A$  é verdadeira a disjunção torna-se verdadeira ( $A \vee B = 1$ ).

Podemos ver isso dá a seguinte tabela-verdade:

<b>A</b>	<b>B</b>	<b>A ou B</b>
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

E aqui vemos que  $\Phi(A \text{ ou } B) = \max(\Phi(A), \Phi(B))$ . Basta que uma das afirmações seja verdadeira ( $A = 1$  ou  $B = 1$ ) para a disjunção o ser ( $A \vee B = 1$ ).

Chama-se proposição *condicional* a uma proposição da forma *”Se A, então B”*. Em uma proposição da forma *Se A, então B*, a proposição  $A$  é dita ser o antecedente do condicional, enquanto que  $B$  é o seu conseqüente. Podemos dizer que o condicional é verdadeiro se e somente se o antecedente é verdadeiro e o conseqüente é verdadeiro. Se  $A$  implica  $B$ , o condicional é verdadeiro ( $\Phi_A(B) = 1$ ), caso contrário é falso ( $\Phi_A(B) = 0$ ). Exemplos:

1) ”Se a temperatura é 35 graus, então o dia está quente”, neste caso ambas afirmações são verdadeiras, então o condicional é verdadeiro ( $\Phi_A(B) = 1$ ).

2) ”Se  $1+1 = 2$ , então Florianópolis é a capital da França.”  $A = 1$ ,  $B = 0$ , então ( $\Phi_A(B) = 0$ ).

Mas não há qualquer necessidade de haver conexões entre as proposições do antecedente do conseqüente. Basta saber se são verdadeiras ou falsas.

<b>A</b>	<b>B</b>	<b>A e B</b>	<b>Se A, então B</b>
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

Aqui encontramos a relação:  $\Phi_A(B) = \min(\Phi(A \text{ e } B), \Phi(A))$ . Logo, esta é a definição de escala na lógica clássica. Para encontrar  $\Phi(A \text{ e } B)$ , podemos usar o suporte produtivo:  $\Phi(A \text{ e } B) = \min(\Phi(A), \Phi(B))$

Um número  $x$  ente 0 e 10 será sorteado. Se  $A$  significa que  $x$  é par, e  $B$  significa que  $x \leq 6$ , veja como ficam os cálculos:

Para recebermos os valores de  $A$  e  $B$ , podemos derivá-los das probabilidades de  $A$  e  $B$  da seguinte forma:

$$P(A) = 0 \Rightarrow L(A) = 0$$

$$P(A) > 0 \Rightarrow L(A) = 1$$

onde  $P(A)$  é a probabilidade de  $A$  ocorrer, e  $L(A)$  é o valor de  $A$  na lógica clássica. Considere o exemplo do dado da seção anterior.

$$A = \{2, 4, 6\}, P(A) = \frac{1}{2} \Rightarrow L(A) = 1$$

x	A	B	A e B	A ou B	Se A, então B
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0
2	1	1	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	1	1	1	1	1
5	0	1	0	1	0
6	1	1	1	1	1
7	0	0	0	0	0
8	1	0	0	1	0
9	0	0	0	0	0
10	1	0	0	1	0

Se tivermos um novo conjunto B:

$$B = \{x|x < 0\}, P(B) = 0 \Rightarrow L(A) = 0$$

## 6 Possibilidade

Podemos associar a distribuição possibilidade com um evento A interpretando  $\Phi(A)$  como um grau de facilidade que A pode ocorrer, assumindo algum critério. O suporte nulo, 0, significa que o evento analisado não pode acontecer de forma alguma. Exemplo: A possibilidade de um homem voar como o superhomem. O suporte concreto, 1, significa que o evento pode ocorrer muito facilmente. Exemplo: Chover no final da tarde, em janeiro, no centro de São Paulo. Mas pode haver um evento com possibilidade entre 0 e 1, por exemplo, um vulcão entrar em erupção no Hawaí amanhã, é necessário fazer cálculos baseados em informações pertinentes para estimar um valor apropriado para essa possibilidade.

A disjunção é definida da seguinte forma:

$$a \oplus b = \max(a, b)$$

onde  $a = \Phi(A)$ ,  $b = \Phi(B)$ , funções possibilidade dos eventos A e B, respectivamente.

Os suportes escala e produtório são semelhantes aos da função probabilidade, vistos acima.

Também é possível passar os valores da possibilidade utilizando a função max, que transforma a soma das probabilidades dos eventos no valor máximo entre estes.

## 7 Improbabilidade

A improbabilidade de um evento A é o valor complementar a probabilidade do evento A ( $\text{Imp}(A) = P(A)'$ ), então podemos derivar o valor da improbabilidade do valor da probabilidade, e vice-versa.

O operador de suporte de improbabilidade é dado por:

$$a' = 1 - a,$$

Sendo  $a = P(A)$  e  $a' = \text{Imp}(A)$ .

Portanto, quando  $P(A) = 0$ ,  $\text{Imp}(A) = 1$  (no exemplo do dado, o caso  $B = \{x \mid x > 10\}$ ); se  $P(A) = 1$ ,  $\text{Imp}(A) = 0$  (caso que  $B = \{x \mid x < 10\}$ ). Se considerarmos o conjunto  $A = \{2, 4, 6\}$  das seções anteriores,  $\text{Imp}(A) = 1 - 1/2 = 1/2$ .

Para calcular a improbabilidade da disjunção A ou B, devemos calcular  $(a + b)'$

$$\begin{aligned} (a + b)' &= 1 - a - b = 1 + 1 - a - 1 - b = 1 - a + 1 - b - 1 = \\ &= (1 - a) + (1 - b) - 1 = a' + b' - 1 \end{aligned}$$

Para o operador  $\odot$ :

Sejam  $a = P(A)$ ,  $c = P(A \cap B)$ ,  $a' = 1 - a$ ,  $c' = 1 - c$ .

$$\begin{aligned} \left(\frac{c'}{a'}\right) &= 1 - \frac{c}{a} = 1 - \frac{1 - c'}{1 - a'} = \\ &= \frac{(1 - a') - (1 - c')}{1 - a'} = \frac{1 - a' - 1 + c'}{1 - a'} = \frac{c' - a'}{1 - a'} \end{aligned}$$

Já para o operador  $\otimes$ :

Produtório de probabilidade:  $P(A) \times P(B) \Rightarrow$  produtório de improbabilidade:  $1 - P(A) \times P(B)$ .

Sejam  $a = P(A)$ ,  $b = P(B)$ ,  $a'$  e  $b'$  seus respectivos complementares.

$$\begin{aligned} \text{Imp}(a' \times b') &= 1 - a \times b = 1 - (1 - a') \times (1 - b') = 1 - (1 - a' - b' + a' \times b') = \\ &= 1 - 1 + a' + b' - a' \times b' = a' + b' - a' \times b' \end{aligned}$$

que é a definição dada na tabela.

Exemplo numérico:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $A = \{2, 4, 6\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$ ,  $C = A \cap B = \{2\}$ .

$a = \text{Imp}(A) = 1 - 1/2 = 1/2$ ;

$b = \text{Imp}(B) = 1 - 1/2 = 1/2$ ;

$c = \text{Imp}(C) = 1 - 1/6 = 5/6$ .

$$a \oplus b = a + b - 1 = 1/2 + 1/2 - 1 = 0$$

$$c \odot a = \frac{c - a}{1 - a} = \frac{5/6 - 1/2}{1 - 1/2} = \frac{2}{3}$$

$$a \otimes b = a + b - a \times b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Para  $b' \leq a'$ , é trivial ver que:  $a \leq b \Rightarrow b' \leq a'$ .

## 8 Descrença

A definição de descrença é a recusa ou relutância em acreditar. O suporte nulo pode ser representado pela razão infinita para descrever em uma afirmação e o suporte 1 é a mínima descrença que apesar de não se acreditar, existe uma chance de ter acontecido. Exemplo: A descrença sobre a Lua ser um satélite da Terra é mínima, pois temos certeza sobre a afirmação, sabemos que é verdadeira. Mas para dizer que hoje, a Lua está na fase minguante, a descrença tem um valor numérico, pois ela pode estar na fase nova, crescente, cheia ou minguante e não há certeza sobre isso sem que analisemos um calendário. E se dissermos que a Lua é uma estrela, a descrença sobre isso será infinita, pois temos certeza de que a Lua não é uma estrela.

Podemos derivar o cálculo da descrença em um evento A utilizando o cálculo da sua probabilidade da seguinte forma:

$$D(A) = \frac{1}{P(A)} - 1$$

onde  $D(A)$  é a descrença sobre A, e  $P(A)$  é a probabilidade de A ocorrer.

Exemplo:

Sejam  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e  $A = \{x \mid x \in Z\}$ , x é um número inteiro.

$P(A) = 1$ , pois todo x em  $\Omega$  é inteiro. Então:

$$D(A) = \frac{1}{1} - 1 = 0$$

significa que a descrença sobre A ocorrer é nula (há certeza de que A ocorre). Agora considere o conjunto  $B = \{x \mid x < 0\}$ , x é negativo. Como não há negativos em  $\Omega$ ,  $P(B) = 0$ . Como não é possível a divisão por 0, calcularemos o limite:

$$D(A) = \lim \frac{1}{P(A)} - 1 = \infty$$

Se  $P(A) \leq P(B)$ , então:  $D(A) \geq D(B)$ .

A estrutura de suporte de somatório de descrença é definida por:

$$a \oplus b = \min(a, b),$$

onde  $a = D(A)$ , e  $b = D(B)$ , ou seja, o menor dos valores entre a descrença em A e a descrença em B. No nosso exemplo acima:

$$a \oplus b = \min(0, \infty) = 0$$

A estrutura de suporte de escala definida pela subtração:

$$c \otimes a = D_A(B) = c - a,$$

onde  $c = D(A \cap B)$ . E a estrutura de suporte produtivo:

$$a \otimes b = c = D(A \cap B) = a + b = D(A) + D(B)$$

Tendo os valores da descrença, é possível encontrar os valores de escala da possibilidade utilizando a função log. Sejam  $a = D(A)$  e  $b = D(B)$ ,

$$\log(a) + \log(b) = \log(a \times b)$$

$$a' \otimes b' = e^{\log(a \times b)}$$

obtendo assim, o valores do produtório  $a' \times b'$  da possibilidade. Isso vale também para a escala,  $\otimes$ .

## 9 Conclusão

A formalização dos cálculos de crença é muito importante, pois organiza e cria um padrão para os cálculos. Também podemos obter a relação entre eles, utilizando os valores de probabilidade na lógica clássica, por exemplo, podendo criar programas (que são baseados na lógica). Sem essas relações, isso não seria possível e perderíamos grande parte da utilização destes cálculos, portanto esta formalização é fundamental, principalmente para o desenvolvimento de algoritmos de análise de dados.

## 10 Referências

1. J.M. Stern, Cognitive Constructivism and the Epistemic Significance of Sharp Statistical Hypotheses in Natural Sciences
2. <http://www.ime.usp.br/~viviane/MAP2212/ep3.pdf> (acessado em 01/04/2011)
3. <http://www.ime.usp.br/~jstern/papers/papersJS/jsuai1.pdf> (acessado em 15/04/2011)
4. <http://www.aaai.org/Papers/AAAI/1992/AAAI92-096.pdf> (acessado em 15/04/2011)
5. <http://www.cfh.ufsc.br/~dkrause/LivroLogica/Capitulo2.pdf> (acessado em 16/04/2011)
6. <http://www.somatematica.com.br/emedio/probabilidade.php> (acessado em 15/04/2011)
7. <http://pessoal.utfpr.edu.br/heidemann/arquivos/Aula08Probabilidadesdefinicoes.pdf> (acessado em 16/04/2011)
8. <http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/cc/cc34/cc3428.pdf> (acessado em 17/04/2011)