

# Cadeias de Markov

Larissa dos Anjos Miyagi

3 de maio de 2011

## 1 Exercício 1

A trajetória de tamanho  $t$  de um estado inicial  $i$  a um estado final  $j$  é dado por  $\tau = [\tau(1) = i, \tau(2), \dots, \tau(t), \tau(t+1) = j]$ . Se uma cadeia de Markov está inicialmente no estado  $i$ , a probabilidade de ela seguir a trajetória  $\tau$  é:

$$\prod_{k=1}^t P_{\tau(k)}^{\tau(k+1)}$$

Se selecionarmos o estado inicial  $i$ , de distribuição  $v$ ,  $v \geq 0, v1=1$ , a probabilidade da cadeia estar no estado  $j$  depois de  $t$  transições, seguindo qualquer trajetória, é dada por  $w_j$ , onde:

$$w = v \prod_{k=1}^t P$$

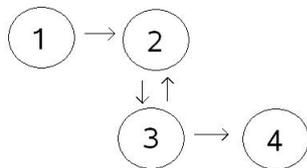
Então, como  $t=1$  (uma transição), a probabilidade de ele estar no estado  $j$  é de  $vP^1$ .

## 2 Exercício 2

- Redutível

Uma cadeia de Markov é redutível se existe um ponto inicial e um final em que não possui trajetória.

Exemplo:



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Irredutível

Ao contrário da redutível, esta cadeia é irredutível quando existem caminhos para qualquer estado inicial/final.

Exemplo:

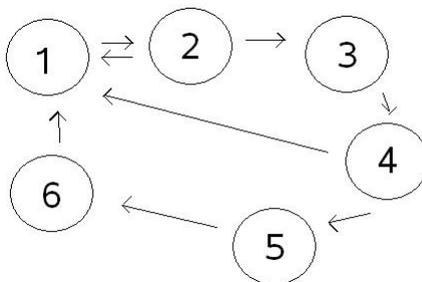


$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0,7 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$$

- Periódica

Uma cadeia de Markov é considerada periódica quando todos caminhos possíveis são múltiplos de uma constante k.

Exemplo:

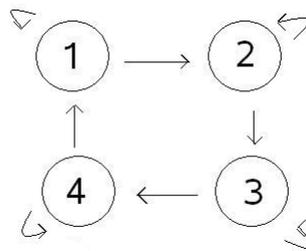


$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Aperiódica

Ao contrário da cadeia periódica, numa cadeia de Markov considerada aperiódica todos os caminhos não compartilham um múltiplo comum.

Exemplo:



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,9 \\ 0,9 & 0 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}$$

### 3 Bibliografia

*http://www.ime.usp.br/stern*